Классифицирующее пространство для почти плоских расслоений

А.С. Мищенко*(Москва) и Н.Телеман (Анкона)

4 февраля 2005 г.

Аннотация

Используя естественную конструкцию Ханке и Шика ([1]), мы представляем здесь простое описание почти плоских расслоений в смысле Кона, Громова и Московичи ([2]). Для корректного определения классифицирующего пространства нам потребовалось слегка изменить понятие почти плоского расслоения, фиксировав понятие почти плоской структуры в расслоении и расширить это понятие для произвольных клеточных пространств в терминах функций склейки и при помощи квази-связностей. В частности, мы получаем, естественное объяснение того, что всякое почти плоское расслоение приходит из классифицирующего пространства фундаментальной группы.

1 Структура почти плоского расслоения

Согласно определению [2] элемент $\alpha \in K(M)$ над гладким многообразием M называется почти плоским расслоением, если для любого $\varepsilon > 0$ существует два векторных расслоения ξ, η с линейными связностями ∇^ξ, ∇^η на них, для которых выполнены условия

1. $\alpha = \xi - \eta \in K(M)$,
2. $\|\Theta^\xi\| < \varepsilon$, $\|\Theta^\eta\| < \varepsilon$, где

$$\|\Theta\| = \sup_{x \in M} \{\|\Theta_x(X \wedge Y)\| : \|X \wedge Y\| \leq 1\}, \tag{1}$$

а $\Theta_x(X \wedge Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ обозначает форму кривизны линейной связности ∇.

Если элемент α является почти плоским расслоением, то сумма $\alpha \oplus \beta$ тоже является почти плоски расслоением для тривиального расслоения β. Это значит, что без потери общности можно рассматривать только такие элементы K-группы, которые представляются настоящими векторными расслоениями.

*Частично поддержан грантами РФФИ № 02-01-00574, поддержки научных школ НШ-619.2003.1 и "Российские университеты" ур.04.03.063

Другими словами, можно рассматривать две последовательности векторных расслоений $\xi = \{\xi_k\}$ и $\eta = \{\eta_k\}$ с фиксированными линейными связностями ∇^1_k и ∇^2_k на них, для которых

$$\xi_k = \eta_k \oplus \alpha, \tag{2}$$

$\dim \alpha = d$, $\dim \xi_k = n_k$, $\dim \eta_n = m_k = n_k - d$. Далее, предположим,что

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|\Theta^i_k\| = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Таким образом, вместо расслоения α мы будем рассматривать более тонкую структуру, а именно так называемую структуру почти плоского расслоения, которая состоит из

1. Последовательности расслоений $\xi = \{\xi_k\}$ и $\eta = \{\eta_k\}$ с фиксированными линейными связностями ∇^1_k и ∇^2_k на них, для которых выполнено условие

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|\Theta^i_k\| = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

2. Последовательности изоморфизмов

$$f_k : \xi_k \approx \eta_k \oplus \alpha. \tag{5}$$

Одно и то же расслоение α может допускать наличие нескольких структур почти плоского расслоения. Скажем, что структура почти плоского расслоения

$$\mathcal{P} = \{\alpha; \xi = \{\xi_k, \nabla^1_k\}; \eta = \{\eta_k, \nabla^2_k\}, f = \{f_k\}\}$$

эквивалентна другой структуре почти плоского расслоения

$$'\mathcal{P} = \{'\alpha;\ '\xi = \{'\xi_k,' \nabla^1_k\};\ '\eta = \{'\eta_k,' \nabla^2_k\};\ 'f = \{'f_k\}\},$$

если одна из другой может быть получена путем выполнения последовательности следующих операций:

1. Переходу к подпоследовательности;

2. Гомотопии линейных связностей ∇^1_k и ∇^2_k в классе связностей, удовлетворяющих условиям (4), и гомотопии изоморфизмов $f = \{f_k\}$;

3. Стабилизации всех расслоений, т.е прибавления тривиальных расслоений как к расслоениям $\xi = \{\xi_k\}$, $\eta = \{\eta_k\}$, так и к расслоению α с естественным продолжением связностей ∇^1_k и ∇^2_k и изоморфизмов $f = \{f_k\}$ на прямые суммы.

Класс структур почти плоского расслоения с точностью до их эквивалентности в предыдущем смысле будем называть почти плоским расслоением на многообразии M. Среди почти плоских расслоений выделяется тривиальное расслоение, которое представлено тривиальной структурой плоского расслоения

$$\mathcal{P}^0 = \{\alpha^0; \xi^0 = \{\xi^0_k, \nabla^{1,0}_k\}; \eta^0 = \{\eta^0_k, \nabla^{2,0}_k\}, f^0 = \{f^0_k\}\},$$

у которого все расслоения α^0, ξ_k^0, η_k^0 и связности $\nabla_k^{1,0}$, $\nabla_k^{2,0}$ тривиальны, а изоморфизмы f_k^0 тождественны. Во множестве почти плоских расслоений определяется операция прямой суммы $\mathcal{P} \oplus' \mathcal{P}$, для которой тривиальное расслоение является нейтральным элементом. Таким образом, множество $\mathcal{V}ect_{af}(M)$ классов эквивалентных почти плоских структур образует полугруппу по отношению к операции прямой суммы и соответствующая группа Гротендика обозначается через $\mathcal{K}_{af}(M)$.

2 Свойство почти плоского расслоения в терминах функций склейки и квази-связностей

Структура почти плоского расслоения требует в своем определении, чтобы база такого расслоения была бы гладким многообразием. Чтобы расширить категорию баз до, скажем, полиэдров, а также, чтобы наши понятия не зависели от выбора конкретной гладкой структуры на гладком многообразии, мы сформулируем все условия для структуры почти плоского расслоения в таких терминах, которые допускают автоматическое их распространение на более широкую категорию. Для простоты мы ограничимся симплициальными пространствами с фиксированной симплициальной структурой. В этот класс входят гладкие компактные многообразия. При фиксированной базе M все рассматриваемые расслоения можно снабдить локально тривиальной структурой координатных косых произведений, заданных по одному и тому же атласу карт. В качестве карт такого атласа можно рассмотреть открытые звезды вершин фиксированной симплициальной структуры. Именно, через $V(M)$ обозначим (конечное) множество вершин симплициальной структуры, а множество всех симплексов обозначим через

$$S(M) = \coprod_{k=0}^{\dim M} S_k(M), \quad V(M) = S_0(M).$$

Тогда каждый k-мерный симплекс $\sigma \in S_k(M)$ однозначно задается набором своих вершин, с которым и можно его отождествить:

$$\sigma \stackrel{def}{=} (a_0, a_1, \dots, a_k); \quad a_i \in V(M), \quad 0 \le i \le k.$$

Тогда атлас карт $\mathcal{U} = \{U_i\}$ задается по формуле

$$U_i \stackrel{def}{=} \mathbf{star}\ (a_i) = \bigcup(\sigma \in S(M) : a_i \in \sigma) \tag{6}$$

Каждое расслоение $\xi, \dim\xi = n$ на пространстве M допускает структуру координатного косого произведения на указанном атласе карт. Другими словами расслоение порождает систему функций склеек

$$\varphi_{ij}(x) : \mathbf{C}_n \longrightarrow \mathbf{C}^n; \quad x \in U_{ij} = U_i \cap U_j. \tag{7}$$

Существенным для нас является тот факт, что для гладкого многообразия M при наличии линейной связности ∇ в расслоении ξ эти функции склейки можно построить каноническим образом. Именно, пусть $\gamma : [0,1]\longrightarrow M$ некоторая кривая, соединяющая две точки x_0 и x_1 на многообразии M,

$$x_0 = \gamma(0), \quad x_1 = \gamma(1). \tag{8}$$

Пусть $T_\gamma : \xi_{x_0}\longrightarrow\xi_{x_1}$ — операция параллельного перенесения вдоль кривой γ, определяемая связностью ∇. Тогда функции склейки можно построить на парном пересечении $U_{ij} = U_i \cap U_j$ двух карт по формуле

$$\varphi_{ij}(x) \stackrel{def}{=} T_{[a_i,x]\cup[x,a_j]} : \xi_{a_i}\longrightarrow\xi_{a_j}, x \in U_{ij}. \tag{9}$$

В формуле (9) кривая $[a_i, x]\cup[x, a_j]$ задается как последовательное объединение двух отрезков $[a_i, x]$ и $[x, a_j]$, каждый из которых лежит в симплексе, содержащем все три точки a_i, x и a_j. Разумеется, все слои ξ_{a_i} изоморфны друг другу при помощи произвольных изоморфизмов

$$\psi_{a_i} : \xi_{a_i}\longrightarrow\mathbf{C}^n, \tag{10}$$

так что формулу (9) следует уточнить, добавим в нее изоморфизмы (10):

$$\varphi_{ij}(x) \stackrel{def}{=} \psi^{-1}_{a_i} \cdot T_{[a_i,x]\cup[x,a_j]} \cdot \psi_{a_j} : \mathbf{C}^n\longrightarrow\xi_{a_i}\longrightarrow\xi_{a_j}\longrightarrow\mathbf{C}^n, x \in U_{ij}. \tag{11}$$

В случае, когда точка x находится на отрезке $[a_i, a_j]$, то

$$\varphi_{ij}(x) = \psi^{-1}_{a_i} \cdot T_{[a_i,a_j]} \cdot \psi_{a_j} = \varphi_{ij}, \tag{12}$$

т.е. не зависит от выбора точки на этом отрезке. Функция склейки $\varphi_{ij}(x)$ не является постоянной, как это должно быть для структуры плоского расслоения, но ее отклонение от постоянной функции может быть оценено при помощи формы кривизны следующим образом:

$$\|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}\| \le \max_k \|\varphi_{ik} \cdot \varphi_{kj} - \varphi_{ij}\| \le C \cdot \varepsilon, \tag{13}$$

где C оценивает максимальную площадь треугольников (a_i, a_k, a_j), а ε оценивает норму формы кривизны (1).

Поэтому определение почти плоской структуры может быть сформулировано не в терминах линейной связности, а в терминах свойств функций склейки координатных косых произведений. Рассмотрим

1. Последовательность расслоений $\xi = \{\xi_k\}$ и $\eta = \{\eta_k\}$ с фиксированными координатными косыми произведениями на их, которые задаются на фиксированном атласе карт U_i функциями склейки

$$\varphi^{k,s}_{ij}(x), \quad x \in U_{ij}, \quad s = 1, 2,$$

для которых выполнено условие

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \sup_{x,y\in U_{ij}} \|\varphi^{k,s}_{ij}(x) - \varphi^{k,s}_{ij}(y)\| = 0, \quad s = 1, 2. \tag{14}$$

2. Последовательность изоморфизмов

$$f_k : \xi_k \approx \eta_k \oplus \alpha. \tag{15}$$

Такое определение структуры почти плоского расслоения уже подходит не только для гладких многообразий, а и для произвольных симплициальных полиэдров.

2.1 Почти плоские квази-связности

В работе [3] показано, что всякое почти плоское расслоение на односвязном конечном CW–комплексе тривиально. Более того, тривиально не только само расслоение, но и его почти плоская структура. Метод доказательства этого утверждения заключается в том, чтобы по заданной системе функций склейки построить так называемую квази-связность в смысле [4], которая удовлетворяет некоторому условию почти плоскости, адекватному предыдущему определению в терминах функций склейки. Чтобы избежать излишних трудностей мы изложим здесь основные конструкции квази-связностей из работы [3], в частности, для того, чтобы прояснить естественность возникающих здесь нерешенных проблем.

Рассмотрим векторное расслоение ξ над топологическим пространством X и диаграмму из двух проекций

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\mathbf{pr}_r} & X \\ \Big\downarrow \mathbf{pr}_l & & \\ X & & \end{array} \tag{16}$$

Тогда над пространством $X \times X$ получается два расслоения

$$\begin{array}{ccccccc} \xi & \longleftarrow & \mathbf{pr}_l^*(\xi) & & \mathbf{pr}_r^*(\xi) & \longrightarrow & \xi \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X & \xleftarrow{\mathbf{pr}_l} & X \times X & = & X \times X & \xrightarrow{\mathbf{pr}_r} & X \end{array} \tag{17}$$

Ограничение диаграммы (17) на диагональ $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ порождает канонический изоморфизм

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xi & \longleftarrow & \mathbf{pr}_l^*(\xi) & \longleftarrow & \Delta^*\mathbf{pr}_l^*(\xi) & \xleftrightarrow{\mathbf{id}} & \Delta^*\mathbf{pr}_r^*(\xi) & \longrightarrow & \mathbf{pr}_r^*(\xi) & \longrightarrow & \xi \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X & \xleftarrow{\mathbf{pr}_l} & X \times X & \xleftarrow{\Delta} & X & = & X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X & \xrightarrow{\mathbf{pr}_r} & X \end{array} \tag{18}$$

поскольку

$$\Delta \mathbf{pr}_r = \Delta \mathbf{pr}_l = \mathbf{id}. \tag{19}$$

Квази-связностью называется такой гомоморфизм векторных расслоений

$$\tau : \mathbf{pr}_l^*(\xi) \longrightarrow \mathbf{pr}_r^*(\xi), \tag{20}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\xi & \longleftarrow & \mathbf{pr}_l^*(\xi) & \stackrel{\tau}{\longrightarrow} & \mathbf{pr}_r^*(\xi) & \longrightarrow & \xi \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \stackrel{\mathbf{pr}_l}{\longleftarrow} & X\times X & = & X\times X & \stackrel{\mathbf{pr}_r}{\longrightarrow} & X\ ,
\end{array}
\tag{21}
$$

ограничение которого на диагональ совпадает с тождественным изоморфизмом:

$$
\tau_{|\Delta(X)} = \mathbf{id} : \Delta^*\mathbf{pr}_l(\xi)\longrightarrow\Delta^*\mathbf{pr}_r^*(\xi). \tag{22}
$$

В частности, это означает, что в некоторой достаточно малой окрестности диагонали гомоморфизм τ является изоморфизмом. В терминах квази-связности можно дать определение, что значит, что расслоение ξ является ε–плоским. Именно, для трех точек $x, y, z \in X$ рассмотрим композицию

$$
\tau_{x,y}\cdot\tau_{y,z} : \xi_x\longrightarrow\xi_z. \tag{23}
$$

Квази-связность τ назовем ε–плоской, если выполнено неравенство

$$
\|\tau_{y,z}\cdot\tau_{x,y} - \tau_{x,z}\| < \varepsilon \tag{24}
$$

для любых трех точек $x, y, z \in X$.

Рассмотрим некоторую окрестность диагонали $W_\Delta \subset X\times X$. Квази-связность можно рассматривать только на этой окрестности. Например, атлас карт $\{U_i\}$ задает окрестность диагонали по формуле

$$
W = \bigcup_i (U_i\times U_i)\,. \tag{25}
$$

В этом случае квази-связность можно задавать как семейство квази-связностей на картах

$$
\tau_i : \mathbf{pr}_l^*(\xi)_{(U_i\times U_i)}\longrightarrow\mathbf{pr}_r^*(\xi)_{(U_i\times U_i)}, \tag{26}
$$

которые совпадают на пересечениях

$$
(U_i\times U_i)\cap(U_j\times U_j) = (U_i\cap U_j)\times(U_i\cap U_j). \tag{27}
$$

Рассмотрим разбиение единицы $f_i(x,y)$, подчиненное покрытию $\{(U_i\times U_i)\}$. Тогда по набору квази-связностей (26) можно рассмотреть гомоморфизм

$$
\tau(x,y) = \sum_i f_i(x,y)\tau_i(x,y). \tag{28}
$$

Ясно, что гомоморфизм τ, заданный формулой (28), тоже является квази-связностью. С другой стороны, эту новую квази-связность можно изучать на отдельной карте $\{(U_{i_0}\times U_{i_0})\}$, используя координатные изоморфизмы

$$
\psi_i : p^{-1}(U_i)\longrightarrow U_i\times V, \tag{29}
$$

где $p : \xi\longrightarrow X$ есть проекция, а V есть слой расслоения. Гомеоморфизмы ψ_i коммутируют с проекцией p, т.е. являются послойными, что означает,что гомеоморфизм ψ_i имеет следующий вид

$$
\psi_i(v) = \left(p(v), \Psi_i^{p(v)}(v)\right), \tag{30}
$$

$\Psi_i^x : p^{-1}(x) \longrightarrow V$.

Именно, положим

$$\begin{array}{c} \sigma_i(x,y) : (U_i \times U_i) \times V \longrightarrow (U_i \times U_i) \times V \\ \sigma_i(x,y) = (\Psi_i^y)\, \tau_i(x,y)\, (\Psi_i^x)^{-1}, \\ \tau_i(x,y) = (\Psi_i^y)^{-1}\, \sigma_i(x,y)\, (\Psi_i^x). \end{array} \tag{31}$$

Ограничение гомоморфизма (28) на карту $\{(U_{i_0} \times U_{i_0})\}$ изображается в виде *локальной формы квази-связности*:

$$\begin{array}{c} \tau_{(U_{i_0} \times U_{i_0})}(x,y) = \left(\Psi_{i_0}^y\right) \tau(x,y) \left(\Psi_{i_0}^x\right)^{-1} = \left(\Psi_{i_0}^y\right) \left(\sum\limits_i f_i(x,y)\tau_i(x,y)\right) \left(\Psi_{i_0}^x\right)^{-1} = \\ \left(\Psi_{i_0}^y\right) \left(\sum\limits_i f_i(x,y)\, (\Psi_i^y)^{-1}\, \sigma_i(x,y)\, (\Psi_i^x)\right) \left(\Psi_{i_0}^x\right)^{-1} = \\ (\varphi_{i,i_0}(y)) \left(\sum\limits_i f_i(x,y)\sigma_i(x,y)\right) (\varphi_{i_0,i}(x)) = \end{array} \tag{32}$$

На пример, если $\sigma_i(x,y) \equiv \mathbf{id}$, то получается каноническое определение квази-связности, исходя из функций склейки:

$$\tau_{(U_j \times U_j)}(x,y) = \left(\sum_i f_i(x,y)\varphi_{i,j}(y)\varphi_{j,i}(x)\right) \tag{33}$$

Вид квази-связности в разных картах выражается друг через друга по следующей формуле на пересечении карт $(U_j \times U_j) \cap (U_k \times U_k)$:

$$\begin{array}{l} \tau_{(U_j \times U_j)}(x,y) = \left(\Psi_j^y\right) \tau(x,y) \left(\Psi_j^x\right)^{-1} = \\ = \left(\Psi_j^y\right) (\Psi_k^y)^{-1}\, \tau_{(U_k \times U_k)}(x,y)\, (\Psi_k^x) \left(\Psi_j^x\right)^{-1} = \\ = \varphi_{k,j}(y)\tau_{(U_k \times U_k)}(x,y)\varphi_{j,k}(x) \end{array} \tag{34}$$

2.1.1 Почти плоские функции склейки

Предположим, что функции склейки являются ε-почти плоскими, т.е.

$$\|\varphi_{jk}(x)\varphi_{kj}(y) - \mathbf{id}\| \leq \varepsilon, \quad x, y \in U_j \cap U_k. \tag{35}$$

Тогда из (33) получаем

$$\begin{array}{c} \|\tau_{(U_j \times U_j)}(x,y) - \mathbf{id}\| = \left(\sum\limits_i f_i(x,y)\|\varphi_{i,j}(y)\varphi_{j,i}(x) - \mathbf{id}\|\right) \leq \\ \leq \left(\sum\limits_i f_i(x,y)\right) \varepsilon = \varepsilon. \end{array} \tag{36}$$

Обратно, если квази-связность удовлетворяет свойству (36) на некотором атласе карт с функциями склейки $\varphi_{jk}(x)$, то из (34) получаем

$$\begin{gathered}
\|\varphi_{j,k}(y)\varphi_{k,j}(x)-\mathbf{id}\|\leq \\
\|\varphi_{j,k}(y)\tau_{(U_j\times U_j)}(x,y)\varphi_{k,j}(x)-\mathbf{id}\|+\|\varphi_{j,k}(y)\left(\tau_{(U_j\times U_j)}(x,y)-\mathbf{id}\right)\varphi_{k,j}(x)\|= \\
=\|\tau_{(U_k\times U_k)}(x,y)-\mathbf{id}\|+\|\varphi_{j,k}(y)\left(\tau_{(U_j\times U_j)}(x,y)-\mathbf{id}\right)\varphi_{k,j}(x)\|\leq \\
\leq\|\tau_{(U_k\times U_k)}(x,y)-\mathbf{id}\|+\|\varphi_{j,k}(y)\|\cdot\|\tau_{(U_j\times U_j)}(x,y)-\mathbf{id}\|\cdot\|\varphi_{k,j}(x)\|= \\
=\|\tau_{(U_k\times U_k)}(x,y)-\mathbf{id}\|+\|\tau_{(U_j\times U_j)}(x,y)-\mathbf{id}\|\leq 2\varepsilon.
\end{gathered} \tag{37}$$

Здесь мы использовали предположение, что матрицы $\varphi_{k,j}(x)$ унитарны, а, значит, $\|\varphi_{k,j}(x)\|=1$. Условие (36) зависит от выбора функций склейки.

По данным функциям склейки $\varphi_{ij}(x)$ можно построить по формуле (33) квази-связность $\tau(x,y)$. Аналогично формулам (8) можно снова построить функции склейки Φ_{ij}:

$$\Phi_{ij}(x)=\tau(a_j,x)^{-1}\cdot\tau(a_i,x):\xi_{a_i}\longrightarrow\xi_{a_j}. \tag{38}$$

Эти функции склейки индуцированы координатными гомоморфизмами

$$\Psi_i^x:\xi_x\longrightarrow\xi_{a_i}\xrightarrow{f_i}V,\quad \Psi_i^x=f_i\tau(a_i,x)^{-1}. \tag{39}$$

Следующее предложение устанавливает взаимную обратность этих двух конструкций

Предложение 1 $\varphi_{ij}(x)\equiv\Phi_{ij}(x)$.

Предложение (1) показывает, что наши рассмотрения можно ограничить функциями склейки, которые построены при помощи квази-связности по формуле (**??**) или, более точно, по формуле (**??**). Тогда из формулы (**??**) мы можем получить свойство квази-связности, которое ответственно за ε-почти плоскость расслоения. Имеем

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_{ij}(x) & = & \varphi_{ij}(a_j)\tau_i^{-1}(a_j,x)\tau_i(a_i,x), \\
\varphi_{ij}(a_i) & = & \varphi_{ij}(a_j)\tau_i^{-1}(a_j,a_i), \\
\varphi_{ij}(a_j) & = & \varphi_{ij}(a_j)\tau_i(a_i,a_j),
\end{array} \tag{40}$$

т.е.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_{ji}(a_j)\varphi_{ij}(x) & = & \tau_i^{-1}(a_j,x)\tau_i(a_i,x), \\
\tau_i(a_j,a_i) & = & \varphi_{ji}(a_i)\varphi_{ij}(a_j), \\
\tau_i(a_i,a_j) & = & \mathbf{id},
\end{array} \tag{41}$$

Из (**??**) получаем

$$\begin{array}{rcl}
\tau_i(a_i,x) & = & \left(\sum_k f_k(a_i,x)\varphi_{k,i}(x)\varphi_{i,k}(a_i)\right)= \\
 & = & f_i(a_i,x)\varphi_{i,i}(x)\varphi_{i,i}(a_i)=\mathbf{id},
\end{array} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\tau_i(x,a_j) &= \left(\sum_k f_k(x,a_j)\varphi_{k,i}(a_j)\varphi_{i,k}(x)\right) = \\ &= f_j(x,a_j)\varphi_{j,i}(a_j)\varphi_{i,j}(x) = \\ &= \varphi_{j,i}(a_j)\varphi_{i,j}(x).\end{aligned} \tag{43}$$

Следовательно,

$$\tau_i^{-1}(a_j,x) = \tau_i(x,a_j). \tag{44}$$

Все это согласуется со следующим определением:

Определение 1 *Скажем, что квази-связность является ε-почти плоской, если для любой карты U_i и точки $x \in U_i$ выполнены следующие неравенства:*

$$\|\tau(a_i,a_j) - \tau(x,a_j)\tau(a_i,x)\| \leq \varepsilon, \tag{45}$$

where $x \in \mathbf{star}\ (a_i)$, $a_j \in \overline{\mathbf{star}\ (a_i)}$

В частности, для ε-почти плоской квази-связности и любого 2-мерного симплекса $\sigma = (a_i, a_j, a_k)$ имеем:

$$\|\tau(a_i,a_j) - \tau(a_k,a_j)\tau(a_i,a_k)\| \leq \varepsilon, \tag{46}$$

Это определение позволяет строить тривиализацию векторного расслоения ξ следующим простым способом. Рассмотрим некоторое дерево $\Gamma \subset M$, составленное из ребер и покрывающее все вершины симплициального пространства M. Фиксируем некоторую вершину $a_0 \in \Gamma$. Тогда произвольная вершина $a \in M$ соединяется с вершиной a_0 единственным путем $\gamma = \gamma_a = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k = a)$, лежащим на дереве Γ. Положим

$$T(a) = T_{a_k} \stackrel{def}{=} \tau(a_k,a_{k-1})\tau(a_{k-1},a_{k-2})\cdots\tau(a_2,a_1)\tau(a_1,a_0). \tag{47}$$

Предложение 2 *Пусть M — односвязное симплициальное пространство. Существует константа $S(M) > 0$, зависящая только от симплициальной структуры пространства M такая, что, если $\varepsilon \cdot S(M) \ll 1$, то ε-почти плоская квази-связность векторного расслоения ξ порождает тривиализацию векторного расслоения ξ.*

Более того, расслоение ξ продолжается до тривиального расслоения на конусе $CM = (M \times I)/(M \times \{1\}$, причем координатное косое произведение продолжается с пространства M на его конус таким образом, что функции склейки удовлетворяют условию почти плоскости для подходящего малого числа $\varepsilon' > 0$. Эквивалентным образом, квази-связность τ тоже может быть продолжена на конус CM с естественной симплициальной структурой,а которой выполнено условие (45) почти плоскости квази-связности.

3 Продолжение почти плоского расслоения на классифицирующее пространство $B\pi$

Как известно, почти плоское расслоение α на многообразии M задает гомотопически инвариантную высшую сигнатуру $\mathbf{sign}_u(M)$, $u = \mathrm{ch}\,\alpha$,

$$\mathbf{sign}_u(M) = \langle L(M)\cdot x, [M]\rangle\,. \tag{48}$$

Если высшая сигнатура $\mathbf{sign}_u(M)$ гомотопически инвариантна, то это что означает, что класс когомологий $u = \mathrm{ch}\,\alpha \in H^*(M;Q)$ находится в образе естественного отображения $f_M : M \longrightarrow B\pi_1(M)$.

Отображение $f_M : M \longrightarrow B\pi_1(M)$ можно представлять вложением при подходящем выборе представителя в гомотопическом типе классифицирующего пространства $B\pi_1(M)$ и представителя в гомотопическом классе отображений f_M. Другими словами, для каждого компактного подпространства $Y \subset B\pi_1(M)$, $f_M(M) \subset Y$, существует такое целое число n и такое расслоение $\beta \in \mathbf{K}(Y)$, что

$$n\alpha = f_M^*(\beta), \tag{49}$$

т.е.

$$n\alpha \in \mathbf{Im}\,(f_M^*). \tag{50}$$

На самом деле, можно избавиться от неопределенного множителя n, т.е. показать, что всякое почти плоское расслоение продолжается до расслоения β на компактном подпространстве $Y \subset B\pi_1(M)$.

Однако, нам не известно, можно ли продолжение β выбрать почти плоским.

Именно имеет место следующая теорема

Теорема 1 *Пусть M — связное неодносвязное компактное пространство, $\pi_1(M) = \pi$, $f_M : M \longrightarrow B\pi$ — непрерывное вложение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Пусть α — почти плоское расслоение на пространстве M. Тогда для любого компактного клеточного подпространства $Y \subset B\pi$, $f_M(M) \subset Y$ существует расслоение β на пространстве Y, такое что*

$$\alpha = f_M^*(\beta). \tag{51}$$

Доказательство основано на построении тривиализации почти плоской структуры на любом односвязном конечном клеточном пространстве при помощи построенной выше почти плоской квази-связности. Однако наивная точка зрения на способ продолжения почти плоской структуры с некоторого пространства M на большее пространство Y, которое получается из M путем приклеивания диска D^s размерности $s \geq 3$, не проходит. Дело заключается в том, что хотя предложение 2 и утверждает, что все расслоения $\xi = \{\xi_k\}$, $\eta = \{\eta_k\}$, формирующие вместе с α почти плоскую структуру, являются тривиальными, но продолжить на диск можно только сами расслоения ξ, η и α. Изоморфизмы же $f_k : \xi_k \approx \eta_k \oplus \alpha$, вообще говоря, на диск D^s не продолжаются.

4 Классифицирующее пространство для почти плоских расслоений

В связи с проблемой продолжения почти плоского расслоения на классифицирующее пространство фундаментальной группы естественно возникает вопрос о существовании классифицирующего пространства для почти плоского расслоения. С категорной точки зрения, под классифицирующим пространством почти плоских расслоений следует понимать такое пространство $\mathbf{BAF}$, на котором фиксирована структура почти плоского расслоения $\xi^B = \{\xi_k^B\}$, $\eta^B = \{\eta_k^B\}$, $f_k^B : \xi_k^B \approx \eta_k^B \oplus \alpha^B$, причем всякое почти плоское расслоение $\xi = \{\xi_k\}$, $\eta = \{\eta_k\}$, $f_k : \xi_k \approx \eta_k \oplus \alpha$ над пространством M получается единственным образом при помощи класса гомотопных отображений $\varphi : M \longrightarrow \mathbf{BAF}$. Для этого, прежде всего, рассмотрим предложенный в работе [1] способ описания почти плоского расслоения при помощи специальных структурных групп.

Для этого рассмотрим C^*–алгебру $\mathcal{A} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}^+$, где $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+(H) = \mathbf{C} \oplus \mathcal{K}(H)$ — алгебра компактных операторов с присоединенным тождественным оператором в гильбертовом пространстве H. Можно считать, что алгебра $\mathcal{A}$ является унитальной подалгеброй в алгебре ограниченных операторов $B(\mathbf{H})$, $\mathbf{H} = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} H$.

Рассмотрим последовательность расслоений $\xi = \{\xi_k\}$, $\dim \xi_k = n_k$, с фиксированными координатными косыми произведениями на их, которые задаются на фиксированном атласе карт U_i функциями склейки

$$\varphi_{ij}^k(x) \in \mathbf{GL}(n_k, \mathbf{C}), \quad x \in U_{ij}.$$

Группу $\mathbf{GL}(n_k, \mathbf{C})$ можно канонически вложить в группу обратимых операторов $G(\mathcal{K}^+)$, сопоставив каждой матрице $\Phi \in \mathbf{GL}(n_k, \mathbf{C})$ ее диагональное продолжение до оператора в гильбертовом пространстве $H = C^{n_k} \oplus (C^{n_k})^{\perp}$ в виде матрицы

$$\widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} & 0 \\ 0 & \mathbf{id} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^+(H). \tag{52}$$

Тогда каждая последовательность $\varphi_{ij}^k(x)$ задает одну функцию

$$\Phi_{ij}(x) \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{ij}^k(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{ij}^1(x) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \widetilde{\varphi}_{ij}^2(x) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\varphi}_{ij}^k(x) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in G(\mathcal{A}). \tag{53}$$

Теперь рассмотрим фактор алгебру $\mathcal{Q} \overset{def}{=} \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$, где идеал $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ состоит из таких элементов $x \in \mathcal{A}, \quad x = \{x_i \in \mathcal{K}^+\}$, для которых

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \|x_i\| = 0. \tag{54}$$

Пусть $\overline{\Phi}_{ij}(x) \in \mathcal{Q}$ является образом элемента $\Phi_{ij}(x)$. Таким образом, набор функций $\{\overline{\Phi}_{ij}(x)\}$ задает функции склейки некоторого расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ над алгеброй $\mathcal{Q}$.

Если функции склейки $\varphi_{ij}^k(x)$ для исходной последовательности расслоений ξ_k удовлетворяют условию почти плоскости, т.е.

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \sup_{x,y \in U_{ij}} \|\varphi_{ij}^k(x) - \varphi_{ij}^k(y)\| = 0, \tag{55}$$

то функции склейки $\overline{\Phi}_{ij}(x)$ не зависят от аргумента $x \in X$, т.е. соответствующее расслоение $\xi_{\mathcal{Q}}$ является плоским расслоением.

Для индивидуального расслоения α тоже можно построить расслоение $\alpha_{\mathcal{Q}}$ над алгеброй $\mathcal{Q}$, сопоставив расслоению α последовательность $\widetilde{\alpha} = \{\alpha_k\}$, $\alpha_k = \alpha$, и положив $\alpha_{\mathcal{Q}} \stackrel{def}{=} \widetilde{\alpha}_{\mathcal{Q}}$.

Рассмотрим теперь почти плоское расслоение, т.е. последовательность расслоений $\xi = \{\xi_k\}$ и $\eta = \{\eta_k\}$ с фиксированными координатными косыми произведениями на их, которые задаются на фиксированном атласе карт U_i функциями склейки

$$\varphi_{ij}^{k,s}(x), \quad x \in U_{ij}, \quad s = 1, 2,$$

для которых выполнено условие

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \sup_{x,y \in U_{ij}} \|\varphi_{ij}^{k,s}(x) - \varphi_{ij}^{k,s}(y)\| = 0, \quad s = 1, 2, \tag{56}$$

и последовательность изоморфизмов

$$f_k : \xi_k \approx \eta_k \oplus \alpha. \tag{57}$$

Пусть $\varphi_{ij}^{k,1}(x) \in \mathbf{GL}(n_k, \mathbf{C})$, $\varphi_{ij}^{k,2}(x) \in \mathbf{GL}(m_k, \mathbf{C})$, $n_k = m_k + d$. Пусть, в дополнение, расслоение α задается своими функциями склейки $\psi_{ij}(x) \in \mathbf{GL}(d, \mathbf{C})$. Тогда прямая сумма $\zeta_k = \eta_k \oplus \alpha$ задается своими функциями склейки $\chi_{ij}(x) \in \mathbf{GL}(n_k, \mathbf{C})$ в виде прямой суммы матриц

$$\chi_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{ij}^{k,2}(x) & 0 \\ 0 & \psi_{ij}(x) \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Переходя к алгебре $\mathcal{Q}$ получаем три расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$, $\eta_{\mathcal{Q}}$ и $\zeta_{\mathcal{Q}}$ и изоморфизм $\overline{F} : \xi_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \zeta_{\mathcal{Q}}$, который порождается последовательностью (57). С другой стороны, расслоение $\zeta_{\mathcal{Q}}$ канонически изоморфно прямой сумме расслоения $\eta_{\mathcal{Q}}$ и расслоения $\alpha_{\mathcal{Q}}$,

$$\xi_{\mathcal{Q}} \stackrel{\overline{F}}{\approx} \zeta_{\mathcal{Q}} \approx \eta_{\mathcal{Q}} \oplus \alpha_{\mathcal{Q}}. \tag{59}$$

Последнее расслоение задается функциями склейки $\overline{\Psi}_{ij}(x)$,

$$\Psi_{ij}(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\widetilde{\psi}_{ij}(x)=\left(\begin{array}{ccccc}\widetilde{\psi}_{ij}(x) & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \widetilde{\psi}_{ij}(x) & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\psi}_{ij}(x) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{array}\right). \tag{60}$$

4.1 Простое доказательство гомотопической инвариантности высших сигнатур почти плоских расслоений

Применяя предыдущее описание почти плоских расслоений можно получить простое и элегантное доказательство гомотопической инвариантности высшей сигнатуры (48), которое было доказано в работе Кона, Громова и Московичи ([2]).

Именно, если расслоение α является почти плоским, то в равенстве (59) расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ являются плоскими расслоениями над алгеброй $\mathcal{Q}$. Отсюда вытекает,что следующие высшие сигнатуры являются гомотопическими инвариантами

$$\begin{gathered}\mathbf{sign}\,_x(M)\in\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q},\\ \mathbf{sign}\,_y(M)\in\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q},\\ x=\mathrm{ch}_{\mathcal{Q}}(\xi_{\mathcal{Q}})\in H^*(M;\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q}),\\ y=\mathrm{ch}_{\mathcal{Q}}(\eta_{\mathcal{Q}})\in H^*(M;\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q}).\end{gathered}\tag{61}$$

Следовательно, высшая сигнатура

$$\begin{gathered}\mathbf{sign}\,_z(M)\in\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q},\\ z=\mathrm{ch}_{\mathcal{Q}}(\alpha_{\mathcal{Q}})\in H^*(M;\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})\otimes\mathbf{Q}),\end{gathered}\tag{62}$$

тоже является гомотопическим инвариантом. Рассмотрим гомоморфизм

$$\theta:\mathbf{K}^*(M)\longrightarrow\mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(M),\tag{63}$$

который сопоставляет конечномерному расслоению α расслоение $\alpha_{\mathcal{Q}}$ над алгеброй $\mathcal{Q}$. В работе ([1, Proposition 3.5]) показано, что

$$\begin{gathered}\mathbf{K}^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{pt})=\prod_{k=1}^{\infty}\mathbf{Z},\\ \mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(\mathbf{pt})=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\mathbf{Z}\right)/\mathbf{J},\end{gathered}\tag{64}$$

где $\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}$. Аналогично можно показать, что гомоморфизм (63) при $M = \mathbf{pt}$ отображает группу $\mathbf{K}^*(\mathbf{pt}) = \mathbf{Z}$ по формуле

$$\theta(a) = [\prod_{k=1}^{\infty} a] \in \left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}\right) / \mathbf{J}. \tag{65}$$

Значит, гомоморфизм

$$\theta \otimes \mathbf{Q} : \mathbf{K}^*(M) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(M) \otimes \mathbf{Q} \tag{66}$$

является мономорфизмом. Этим завершается доказательство гомотопической инвариантности высших сигнатур для почти плоских расслоений, поскольку

$$\mathbf{sign}\,_z(M) = \theta(\mathbf{sign}\,_u(M)), \tag{67}$$

где $u = ch(\alpha)$.

4.2 Геометрическое построение классифицирующего пространства для почти плоских расслоений

Если почти плоские расслоения вряд ли можно строить при помощи классифицирующего пространства, то расслоения, снабженные структурой почти плоского расслоения, могут быть построены при помощи взятия прообраза при непрерывном отображении в некоторое классифицирующее пространство. Действительно, как было показано ранее, с каждой структурой почти плоского расслоения можно связать пару плоских расслоений $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ над алгеброй $\mathcal{Q}$ и изоморфизм $\mathcal{Q}$–расслоений

$$F : \xi_{\mathcal{Q}} \longrightarrow (\eta_{\mathcal{Q}} \oplus \alpha_{\mathcal{Q}}) . \tag{68}$$

Наличие плоских расслоений $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ изоморфизма и изоморфизма F можно интерпретировать при помощи отображений в классифицирующие пространства. Именно, расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ по построению имеют структурную группу $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, состоящую из всех обратимых элементов алгебры $\mathcal{Q}$. Другими словами, расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ можно считать одномерными расслоениями над алгеброй $\mathcal{Q}$, слоем которых является сама алгебра $\mathcal{Q}$. Такие расслоения классифицируются при помощи непрерывных отображений базы M в классифицирующее пространство $B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$. Поскольку расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ являются плоскими, то это значит, что в качестве классифицирующего пространства следует взять не $B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, а $B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$, где $\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$ есть та же группа $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, но с дискретной топологией. Пусть $\iota : \widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \longrightarrow \mathbf{G}(\mathcal{Q})$ есть тождественное отображение, которое заменяет дискретную топологию на топологию алгебры $\mathcal{Q}$. Отображение ι индуцирует естественное непрерывное отображение классифицирующих пространств

$$B_\iota : B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \longrightarrow B\mathbf{G}(\mathcal{Q}). \tag{69}$$

Пусть

$$\oplus : B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \times B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \longrightarrow B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \tag{70}$$

есть отображение, соответствующее прямой сумме расслоений. Тогда расслоения $\xi_{\mathcal{Q}}$ и $\eta_{\mathcal{Q}}$ можно представить как обратные образы канонического плоского $\mathcal{Q}$-расслоения $\widehat{E_{\mathcal{Q}}}$ над пространством $\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$ посредством непрерывных отображений

$$f_\xi, f_\eta : M \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{Q}} &= f_\xi^*(\widehat{E_{\mathcal{Q}}}), \\ \eta_{\mathcal{Q}} &= f_\eta^*(\widehat{E_{\mathcal{Q}}}). \end{aligned} \tag{72}$$

Поскольку расслоение $\widehat{E_{\mathcal{Q}}}$ является прообразом канонического расслоения $E_{\mathcal{Q}}$ над классифицирующим пространством $B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$ посредством отображения B_ι,

$$\widehat{E_{\mathcal{Q}}} = B_\iota^*(E_{\mathcal{Q}}), \tag{73}$$

то наличие изоморфизма (68) означает, что отображения

$$M \xrightarrow{f_\xi} B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \xrightarrow{B_\iota} B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \tag{74}$$

и

$$M \xrightarrow{f_\eta \times f_\alpha} B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \xrightarrow{B_\iota \times \theta} B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \times B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\oplus} B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \tag{75}$$

гомотопны. Классифицирующее пространство $B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$ задается с точностью до гомотопической эквивалентности. Поэтому целесообразно вместо пространства $B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$ рассматривать ему гомотопически эквивалентное пространство, составленное из объединения двух цилиндров отображения

$$\begin{aligned} \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \stackrel{def}{=} & \left(B\mathbf{G}(\mathcal{Q}) \cup_{(B_\iota, 0)} \left([0,1] \times B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \right) \right) \\ & \cup_{(\oplus \cdot (B_\iota \times \theta), 0)} \left([0,1] \times \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \right) \right), \end{aligned} \tag{76}$$

а отображения B_ι и $\oplus \cdot (B_\iota \times \theta)$ заменить на вложения

$$\begin{aligned} i_0 = (\mathbf{id}, 1) : \quad & B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \hookrightarrow \left((0,1] \times B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \right) \subset \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \\ i_1 = (\mathbf{id}, 1) : \quad & \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \right) \hookrightarrow \\ & \left((0,1] \times \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \right) \right) \subset \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}. \end{aligned} \tag{77}$$

Рассмотрим теперь пространство непрерывных путей

$$\mathbf{BAF} \stackrel{def}{=} \Gamma \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}; \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}; \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \right) \right), \tag{78}$$

состоящее из всех непрерывных путей

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \tag{79}$$

которые начинаются в подпространстве $B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$, т.е.

$$\gamma(0) \in B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} = \mathbf{Im}\, i_0, \tag{80}$$

и кончаются в другом подпространстве $\left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)\right)$, т.е.

$$\gamma(1) \in \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)\right) = \mathbf{Im}\, i_1. \tag{81}$$

Каждому расслоению α, снабженного структурой почти плоского расслоения, можно сопоставить непрерывное отображение базы M в пространство **BAF**. В самом деле, поскольку отображения (74) и (75) гомотопны, то и следующие композиции $i_0 \cdot f_\xi$ и $i_1 \cdot (f_\eta \times f_\alpha)$ гомотопны, т.е. существует такое непрерывное отображение

$$\Phi : M \times [0,1] \longrightarrow B\widetilde{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \tag{82}$$

что

$$\Phi(x,0) = i_0 f_\xi(x), \quad \Phi(x,1) = i_1(f_\eta \times f_\alpha)(x). \tag{83}$$

Это значит, что отображение Φ и индуцирует отображение

$$\widetilde{\Phi} : M \longrightarrow \mathbf{BAF} \tag{84}$$

по формуле

$$\widetilde{\Phi}(x)(t) = \Phi(x,t), \quad x \in M; \quad t \in [0,1]. \tag{85}$$

И, обратно, та же формула (85) задает два гомотопных отображения

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x,0) : M & \longrightarrow & B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \\ \Phi(x,1) : M & \longrightarrow & \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)\right), \end{array} \tag{86}$$

которые задают локально плоскую структуру на расслоении, порожденному отображением второй компонентой отображения $\Phi(x,1)$.

Более того, на пространстве **BAF** имеется расслоение с почти плоской структурой, причем обратный образ этого расслоения при отображение (84) как раз совпадает с выше описанным почти плоским расслоением.

Мы теперь в состоянии описать гомотопические свойства классифицирующего пространства **BAF**, используя стандартные расслоения в смысле Серра. Прежде всего, обозначим через

$$\begin{array}{rcl} p_0 : \mathbf{BAF} & \longrightarrow & B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \\ p_1 = (p_1' \times p_1'') : \mathbf{BAF} & \longrightarrow & \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)\right) \end{array} \tag{87}$$

два стандартных отображения, которые каждому пути $\gamma \in \mathbf{BAF}$ сопоставляет его начальную или конечную точку в соответствии с условиями (80) и (81). Совместное отображение

$$p = (p_0 \times p_1) : \mathbf{BAF} \longrightarrow B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times \left(B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)\right) \tag{88}$$

является расслоением в смысле Серра, слоем V которого является пространство замкнутых путей $V = \Omega(\widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}) \approx \Omega(B\mathbf{G}(\mathcal{Q})) \approx \mathbf{G}(\mathcal{Q})$.

С другой стороны, можно рассмотреть другое расслоение в смысле Серра

$$\widetilde{p} = (p_0 \times p_1') : \mathbf{BAF} \xrightarrow{\Gamma_0} B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}, \tag{89}$$

слоем которого является пространство $\Gamma_0 = \Gamma(x_0; B\mathbf{G}(\mathcal{Q}); B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+))$ путей в пространстве $\widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \approx B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, которые начинаются в фиксированной точке x_0 и кончаются в подпространстве $B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)) \subset \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$. Это пространство Γ_0, в свою очередь, расслаивается в виде проекции

$$p_1' : \Gamma_0 \xrightarrow{V} B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)), \tag{90}$$

слоем которой является пространство замкнутых путей $V = \Omega(B\mathbf{G}(\mathcal{Q})) \approx \mathbf{G}(\mathcal{Q}) \overset{i_0}{\subset} \Gamma_0$. Более того, имеет место следующая

Лемма 1 *Проекция (90) гомотопна постоянному отображению в точку.*

Другими словами, тождественное отображение пространства Γ_0 гомотопно отображению $\varphi : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\varphi \circ i_0 \sim \mathbf{id}$.

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно тому, что гомоморфизм (63)

$$\theta : \mathbf{K}^*(M) \longrightarrow \mathbf{K}^*_{\mathcal{Q}}(M),$$

который сопоставляет конечномерному расслоению α расслоение $\alpha_{\mathcal{Q}}$ над алгеброй $\mathcal{Q}$, является мономорфизмом. В самом деле, пусть гомоморфизм (63) является мономорфизмом. Рассмотрим расслоение ξ над пространством Γ_0, которое порождается отображением (90). Тогда $\theta(\xi)$ есть расслоение над алгеброй $\mathcal{Q}$, которое порождается отображением

$$i_1' \cdot p_1' : \Gamma_0 \longrightarrow B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+) \subset \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}. \tag{91}$$

Это отображение гомотопно постоянному отображению, поскольку пространство $\Gamma_0 = \Gamma(x_0; B\mathbf{G}(\mathcal{Q}); B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+))$ является пространством путей в пространстве $\widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \approx B\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, которые начинаются в фиксированной точке x_0 и кончаются в подпространстве $B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)) \subset \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$. Поэтому каждому такому пути γ можно сопоставить не крайнюю точку $\gamma(1)$ как в отображении (91), промежуточную точку $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Следовательно, расслоение $\theta(\xi)$ является тривиальным расслоением. Значит тривиальным расслоением является и расслоение ξ, что означает, что отображение p_1' гомотопно постоянному отображению.

Обратно, пусть отображение p_1' гомотопно постоянному отображению. Пусть ξ — расслоение над пространством M такое, что расслоение $\theta(\xi)$ тривиально. Расслоение ξ порождается отображением $q : M \longrightarrow B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+))$, а расслоение $\theta(\xi)$ порождается отображением $i_1' \cdot q : M \longrightarrow \widetilde{B\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$. Поскольку расслоение $\theta(\xi)$ тривиально, то отображение $i_1' \cdot q$ гомотопно постоянному отображению. Это значит, что гомотопия $F(x,t)$, $x \in M$, $0 \leq t \leq 1$, задает отображение $\widetilde{F}: M \longrightarrow \Gamma_0$, а композиция $p_1' \cdot \widetilde{F}$ совпадает с q. Это и значит, что отображение q гомотопно постоянному отображению.

Таким образом, пусть ξ — такое расслоение, что расслоение $\theta(\xi)$ тривиально над алгеброй $\mathcal{Q}$. Пусть $\{U_i\}$ — некоторый атлас карт, $\{\varphi_{ij}(x) \in G(\mathcal{K}^+)\}$ функции склейки расслоение ξ. Без ограничения общности можно считать, что все функции склейки принадлежат группе унитарных элементов, т.е. $\{\varphi_{ij}(x) \in U(\mathcal{K}^+)\}$. Тривиальность расслоения $\theta(\xi)$ означает, что существуют такие функции $h_i(x) \in U(\mathcal{Q})$, что

$$[\varphi_{ij}(x)] = h_i(x) h_j^{-1}(x), \quad x \in U_{ij}. \tag{92}$$

Элемент $h_i(x) \in U(\mathcal{Q}) = \left(\prod_k U(\mathcal{K}^+)\right) / \overline{\left(\sum_k U(\mathcal{K}^+)\right)}$ можно реализовать непрерывным сечением в группе $\left(\prod_k U(\mathcal{K}^+)\right)$ в виде последовательности $h_i^k(x) \in U(\mathcal{K}^+)$. Тогда условие (92) можно записать в виде

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|\varphi_{ij}(x) h_j^k(x) - h_i^k(x)\| = 0. \tag{93}$$

Это значит, что выбирая достаточно большой номер k, можно так незначительно изменить функции $h_i(x)$ на функции $\widetilde{h}_i(x)$, что

$$\varphi_{ij}(x) = \widetilde{h}_i(x) \widetilde{h}_j^{-1}(x), \quad x \in U_{ij}. \tag{94}$$

$\blacksquare$

Следствие 1 *Из леммы 1 уже автоматически вытекает, что всякое почти плоское расслоение на односвязном клеточном пространстве тривиально.*

Доказательство. В самом деле структура почти плоского расслоения на пространстве M задается непрерывным отображением $f: M \longrightarrow \mathbf{BAF}$. При этом проекция (89) в композиции с f, т.е. отображение $p \cdot f : M \longrightarrow B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})} \times B\widehat{\mathbf{G}(\mathcal{Q})}$ для односвязного пространства M гомотопно постоянному отображению. Это значит, что отображение f гомотопно отображению в слой Γ_0, который, в свою очередь, отображается в пространство $B\mathbf{G}(\mathcal{K}^+)$ при помощи проекции p_1', которая тоже гомотопна постоянному отображению. $\blacksquare$

Список литературы

[1] B. Hanke and T. Schick. Enlargeability and index theory. *preprint*, March 17, 2004.

[2] A. Connes, M. Gromov, and H. Moscovici. Conjecture de novikov et fibrés presque plats. *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, 310:273 – 277, 1990.

[3] А.С. Мищенко и Н. Телеман. Almost flat bundles and almost flat structures. *представлено в журнал 'Topological methods in nonlinear analysis'*, 2005.

[4] Nicolae Teleman. Distance function, linear quasi–connections and chern character. *IHES*, /M/04/27:11, 2004.

.