Развитие некоммутативной геометрии в Московском университете

А.С.Мищенко *

27 ноября 2003 г.

1 Введение

Во второй половине прошлого столетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это название группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулировании топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций. Хотя эта идея очень старая и восходит к ключевой теореме Гельфанда–Наймарка о взаимно однозначном соответствиии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^*-алгебр, и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном (например, в Московской топологической школе А.М.Виноградовым и его учениками) так и в некоммутативном случае, в более или менее явном виде эта идея была провозглашена в виде программы действия А.Коном в его книге "Некоммутативная геометрия"([16]). Несмотря на ее самоочевидность, идея рассматривать, наряду с коммутативными C^*-алгебрами (которые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах ее максимальных идеалов), также и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем "некоммуттативном"пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила соединить воедино многообразие разноообразных представлений и методов из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе м взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Источником задач, приведших к некоммутативной геометрии, в 60-е годы послужила дифференциальная топологиия, в которой решалась по существу одна задача - описание топологических и гомотопических инвариантов гладких и кучочно-линейных многообразий. Типичными инвариантами гладких и кусочно-линейных многообразий служили так называемый характеристические классы, которых к тому времени было известно три типа - классы Штиффеля-Уитни, классы Чженя и классы Понтрягина, каждый из которых обслуживал наряду с многообарзиями и свой тип векторных расслоений.

Поэтому задача формулировалась следующим естественным образом: в какой степени те или иные характеристические классы зависят от гладкой структуры многообразия, с помощью которой они определяются? Методы, применявшиеся в 50-е годы и ранее, были чисто алгебраическими, и с их помощью было установлено, что характеристические классы Штиффеля-Уитни являются гомотопическими инвариантами. Теми же методами, но более продвинутыми, было также доказано, что рациональные классы Понтрягина явялются топологическими инвариантами. (см. обзор на эту тему в [6]).

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант No. 02-01-00574 и фондом "Российские университеты", грант No. УР.04.03.009

В настоящей работе излагается краткий обзор результатов, методов и идей, которые разрабатывались в Московской топологической школе и послужили одним из источников возникновения и развития некоммутативной геометрии. В заключение излагаются новые результаты, основанные на применении функциональных методов при отыскании гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий.

2 От двойственности Пуанкаре до формулы Хирцебруха

Характеристические классы Понтрягина не являются гомотопическими инвариантами, но тесно связаны с задачей описания гладких структур данного гомотопического типа. Поэтому задача отыскания всех гомотопически инвариантных характеристических классов Понтрягина рассматривалась как актуальная задача. В действительности, более естественной оказалась другая задача. Характеристические классы Понтрягина, разумеется являются инвариантами гладкой структуры на многообразии. С точки зрения классификации гладких структур и методов такой классификации наиболее подходящим отношением эквивалентности между многообразиями оказывается не гладкая структура, а так называемые внутренние гомологии многообразий или в современных терминах бордизмы многообразий. Еще Л.С.Понтрягин предположил ([10]), что внутренние гомологии описываются некоторыми алгебраическими выражениями от характристических классов Понтрягина - чисел Понтрягина, и, по крайней мере установил, что характеристические числа Понтрягина являются инвариантами внутренних гомологий ([11], теорема 3) С помощью теории перестроек гладких многообразий (В.Браудер, С.П.Новиков) было установлено, что единственным гомотопическим инвариантом является характеристическое число Понтрягина, численно совпадающее с сигнатурой ориентированного компактного многообразия, построенной по двойственности Пуанкаре. Формула, которая осуществляет совпадение сигнатуры многообразия с определенным характеристическим числом Понтрягина известна сейчас как формула Хирцебруха ([18]), хотя некоторый ее частный случай был получен еще В.А.Рохлиным ([14]) годом ранее. Изучение двойственности Пуанкаре и формулы Хирцебруха, отражающей ее свойства, имеет длинную историю, часть которой связана со становлением некоммутативной геометрии и работами Московской топологической школы второй половины 20-го столетия.

Начало этой истории было положено еще в знаметитом работе А.Пуанкаре 1895 года ([12]). В этой работе Пуанкаре, в частности, впервые сформулировал теорему, известную теперь как двойственность Пуанкаре для замкнутых ориентированных многообразий. И хотя завершенная формулировка и полное доказательство двойственности Пуанкаре были представлены намного позднее, вне всякого сомнения можно считать, что Пуанкаре был родоначальником разветвленной теории, в котором двойственность Пуанкаре играет ключевую роль. Конечно, под двойственностью, которую сформулировал Пуанкаре, он понимал более упрощенное утверждение. Пуанкре вел речь о совпадении чисел Бетти, "равноотстоящих от концов"([12], стр. 490). Однако под числами Бетти P_k он понимал (см. там же, §6, стр. 470-471) число линейно независимых подмногообразий размерности k. Если понимать слова Пуанкаре буквально, то независимость подмногообарзий $v_1, v_2, \dots, v_p$ предполагает, что эти подмногообразия попарно не пересекаются. Более того, повидимому, они должны иметь нормальное расслоение с нулевым эйлеровым классом, по крайней мере в том случае, когда целочисленный коэффициент в линейной комбинации $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p$ отличается от ± 1, поскольку Пуанкаре требует, чтобы каждое подмногообразие v_j должно мало отличаться от k_j компонет полной границы другого подмногообразия на единицу большей размерности. В любом случае понятие чисел Бетти требовало еще дополнительного уточнения, которое и сделал сам Пуанкаре в своих последующих дополнениях ([13]). В том же томе имеется прекрасная статья П.С.Александрова, излагающая его речь, произнесенную на посвященном столетию со дня рождения Пуанкаре торжественном выездном заседании Международного математического конгресса (Амстердам, 1954). В этой статье П.С.Александров исключительно точно охарактеризовал роль Пуанкаре в создании теории гомологий, так что не остается ничего другого, как просто процитировать слова П.С.Александрова: "Вернемся к введенному Пуанкаре понятию гомологии. Как уже было упомянуто, это понятие было введено в первом топологическом мемуаре Пуанкаре - в знаменитом "Analysis situs"интуитивным образом. Однако в данном случае этот недостаточно строгий подход имел, так сказать, и фактические последствия, послужившие поводом к обоснованной критике норвежского математика Хегора (Heegard). Дело в том, что в своем первом мемуаре Пуанкаре не обратил должного внимания на феномен кручения, ограничившись в основном числами Бетти. Но он блестяще восполнил допущенный пробел в своих последующих публикациях по топологии (в "Дополнениях к Analysis situs"). При этом Пуанкаре стал на комбинаторную точку зрения, введя понятие симплициального разбиения (триангуляции) многообразия, т. е. понятие симплициального комплекса, и создал таким образом основной метод комбинаторной топологии". ([1], стр. 813). Конечно, в дальнейшем потребовалось открыть группы гомологий (Э.Нетер, 1925), группы когомологий (Дж.Александер, А.Н.Колмогоров, 1934), двойственности между ними (Л.С.Понтрягин). Но, пожалуй, самым значительным событием в изучении топологических инвариантов многообразий явилось открытие характеристических классов (Штиффель, Уитни (1935), Понтрягин (1947), Черн (1948)). Все было подготовлено, таким образом, к тому, чтобы связать воедино инварианты, выражающие двойственность Пуанкаре, и интегральные инварианты характеристических классов. Эта связь известна сейчас как формула Хирцебруха. Формула Хирцебруха дает прекрасный пример применения категорного метода, одного из основных инструментов в алгебраической и дифференциальной топологии. В самом деле, Пуанкаре кажется уже сказал все, доказав совпадение чисел Бетти многообразия, равноотстоящих от концов. После введения понятия групп гомологий, двойственность Пуанкаре стала звучать как совпадение рангов соответствующих групп гомологий. Причем для чисел Бетти не было существенным, какие группы гомологий рассматривались, — целочисленные или рациональные, поскольку ранг целочисленных групп гомологий совпадает с размерности групп гомологий над полем рациональных чисел. Однако понятие групп гомологий позволило обогатить двойственность Пуанкаре рассмотрением также и группп гомологий с коэффициентами в конечных полях. По существу это уже знал и сам Пуанкаре, который рассмотрел кручения в гомологиях многообразия. Таким образом, совпадение чисел Бетти можно интерпертировать как изоморфность групп гомологий с рациональными коэффициентами. Учет же кручений тоже должен был дать изоморфность некоторых групп. Но это не группы гомологий, поскольку кручения совпадают, но не в тех размерностях, в которых совпадают числа Бетти. Это кажущееся несоответствие было понято только после того, как были открыты группы когомологий и их дуальность к группам гомологий. Таким образом, окончательно двойственость Пуанкаре стала звучать как изоморфность между группами гомологий и группами когомологий дополнительной размерности,

$$H_k(M;Z) = H^{n-k}(M;Z). \tag{1}$$

Ключевым соображением в этом изоморфизме является то, что это не просто абстрактный изоморфизм групп, а изоморфизм, порождаемый естественными операциями в категории многообразий, точнее, в категории топологических пространств. Например, в одном частном случае, когда рассматриваются гомологии в средней размерности четномерного многобразия, $\dim M = n = 2m$, с рациональными коэффициентами, условие (1) становится тривиальным, поскольку

$$H^m(M;Q) = \mathrm{Hom}(H_m(M;Q),Q) \equiv H_m(M;Q). \tag{2}$$

Однако в равенстве (2) изоморфизм между группами гомологий и группами когомологий выбирается не однозначно. Двойственность же Пуанкаре гласит, что существует вполне определенный гомоморфизм, так называемый гомоморфизм персечения с циклом $[M]$

$$\cap_{[M]} : H^{n-k}(M;Q) \longrightarrow H_k(M;Q),$$

который и задает изоморфизм двойственности Пуанкаре. Это значит, что с многообразием M можно связать невырожденную квадратичную форму, которая обладает дополнительным инвариантом, сигнатурой квадратичной формы, которая играет во многих проблемах дифференциальной топологии ключевую роль.

Именно с исследованием сигнатуры многообразий и формулы Хирцебруха, описывающей ее в терминах характеристических классов Понтрагина, связано большое научное направление, которое развивалось в Московской топологической школе во второй половине прошлого столетия и которое послужило одним из источником развития некоммутативной геометрии. Главным направлением данного исследования является описание гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий на основе изучения формулы Хирцебруха и ее естественных обобщений.

3 Высшие сигнатуры и фредгольмовы представления

Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффициентов и определелеяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий бесспорно является наиболее существенным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий, в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а также потому, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом по модулю конечного числа возможностей. Однако, система характеристических классов является, в некотором смысле, переопределенной системой данных. Более строго, это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому, одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса, т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразии. В случае гомотопической инвариантности характеристических классов Понтрягина эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время и служит хорошим примером задачи, на которой проверяется сила каждого нового метода в топологии. В случае односвязных многообразий еще Новиковым и Браудером на основании формулы Хирцебруха было доказано, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что является следствием гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером методом перестроек Морса, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является только классическая сигратура многообразия. Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью решена в классических работах 60-х годов. Для неодносвязных многообразий задача об описании гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина, отвечающих за препятствия к перестройке нормальных отображений до гомотопической эквивалентности, оказаль намного труднее, поскольку существенную роль здесь играет структура фундаментальной группы многообразия. Это обстоятельство наряду с тем, что описание и распознавание фундаментальной группы в конечных терминах, как известно, невозможо, в отличие от других топологических проблем вызывает дополнительный интерес к этой проблеме. Для некоторых простых случаев, когда фундаментальная группа является свободной абелевой задачу можно было решить чисто дифференциально-геометрическими методоми, используя технику так называемых внутренних перестроек. Такое решение тоже было представлено в Московской топологической школе Г.Г.Каспаровым ([2]). В общем же случае оказалось, что задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина может быть сведена к проверке того, что так называемые высшие сигнатуры являются гомотопически инвариантными. Точная формулировка этой проблемы известна под названием гипотезы Новикова. Положительное ее решение позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии. Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\mathrm{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$– отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, – является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\mathrm{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\mathrm{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M. Ситуация с неодносвязыми многообразиями оказывается совершенно отличная от случая односвязных многообразий, несмотря на то, что Уолл ([19]) построил неодносвязный аналог теории перестроек Морса. Однако препятствия к таким перстройкам не имеют достаточно эффективного описания. Один из способов обойти эту трудность заключается в том, чтобы выяснить, какие из рациональных харакстристических классов неодносвязных многообразий являются гомотопическими инвариантами. В 1970 автор установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден ([3]) универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры. Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. Для построения симметрической сигнатуры автором была развита теория так называемых алгебраических комплексов Пуанкаре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. Это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению норамальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом колце $Q\pi$. Проблема описания гомотопически инвариантных характеристических классов является одой из наиболее интересных проблем в дифференциальой топологии на протяжении последних 30 лет. Попытки решения этой проблемы породили многочисленные исследования, приведшие к открытию глубоких результатов как в самой топологии, так и в смежных математических дисциплинах, таких как теория представлений, K-теория, банаховы алгебры и модули, теория эллиптических операторов, и к созданию самостоятельного направления под названием некоммутативная геометрия.

Чтобы эффективно описывать симметрические сигнатуры применяется естественный способ теории представлений, когда элементы групповой алгебры фундаментальной группы заменяются на числовые матрицы, а симметрическая сигнатуры заменяется на обычную сигнатуру числовой эрмитовой матрицы. Однако в наиболее интересных примерах фундаментальных групп обычных конечномерных представлений не хватает для существенного описания симметрических сигнатур. Применение теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном венкторном пространстве. Но запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений слишком беден, и для многих фундаментальных групп сводится только к классической сигнатуре. Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, которые, с одной стороны, расширили запас представлений, а, с другой, сохраняли естественные свойства конечномерных представлений. Такие представления по существу сводятся к представлениям в C^*-алгебрах произвольного типа или к так называемым относительным представлениям. Первым примером такого относительного бесконечномерного представления был случай фредгольмовых представлений в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмового оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*-алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертового пространства H, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов. Существенным шагом было построение канонического векторного расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$ с помомощью фредгольмового представления группы π. Для прмименения фредгольмовых представлений к формулам Хирцебруха автору ([5]) потребовалось установить возможность переходить от семейства фредгольмовых представлений к единичному представлению с тем же самым характером Чженя. Теория фредгольмовых представлений позволила доказывать гипотезу Новикова не только для указанного класса фундаментальных групп. Ученик автора, Ю.П.Соловьев применил разработанную технику фредгольмовых представлений для для дискретных подгрупп алгебраических групп с помощью комплексов Брюа–Титса ([15]). Теория фредгольмовых представлений в 1995 году была распространена автором ([8]) на случай непрерывных семейств, контролируемых на бесконечности, что позволило применить аналогичную технику и для таких фундаментальных групп, классифицирующие пространства которых не обязательно компактны. Более того им ([9]) была предложена общая схема метрического подхода к построению фредгольмовых представлений фундаментальной группы, которая сводит задачу к построению специального пополнения классифицируещего пространства и решению уже чисто гомотопической задачи на последнем. Теория фредгольмовых представлений, построенная в работах автором, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*-алгебр в виде некоторого варианта топологической K-теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. Автор совместно с Ю.П.Соловьевым ([7]) разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуканкаре. Таким образом, с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не действует.

4 Метрический подход к построению фредгольмовых представлений

Чтобы максимально расширить класс фредгольмовых представлений автор рассмотрел так называемый метрических подход к построенимю фредгольмовых представлений, который излагается ниже.

Пусть T – конечная сумма экземпляров регулярного представления группы π, а Φ – блочно диагональный оператор, задаваемый в виде матрично значной функции $F(g),\ g \in \pi$:

$$F(g) : V \longrightarrow V.$$

Пусть

$$H = \bigoplus_{g\in\pi} V_g,\ V_g \equiv V,$$

$$T_h : H \longrightarrow H,\ V_g \longrightarrow V_{hg}.$$

Условие фредгольмовости оператора Φ означает, что

$$\|F(g)\| \leq C,\ \|F^{-1}(g)\| \leq C \tag{3}$$

для всех $g \in \pi$ за исключением конечного числа. Условие коммутирования оператора Φ с действием группы с точностью до компактных операторов означает , что

$$\lim_{|g|\longrightarrow\infty} \|F(g) - F(hg)\| = 0. \tag{4}$$

Таким образом, если пара

$$\rho = (T, \Phi) \tag{5}$$

удовлетворяет условиям (3), (4), то ρ есть фредгольмово представление группы π. Рассмотрим универсальной накрытие $\widetilde{B\pi}$ классифицирующего пространства $B\pi$ с левым действием группы π. Согласно конструкции [4] расслоение на пространстве $B\pi$ представляется в виде эквивариантного непрерывного семейства фредгольмовых операторов на пространстве $E\pi = \widetilde{B\pi}$. Эквивариантность имеется ввиду по отношению к диагональному действию на декартовом произведении

$$T_h : E\pi \times H,\ (x, \xi) \longrightarrow (hx, T_h(\xi)). \tag{6}$$

Именно, пусть пространство $B\pi$ снабжено структурой симлицильного пространства и пространство $E\pi = \widetilde{B\pi}$ снабжено структурой симплициаьного пространства, порожденного накрытием

$$E\pi = \widetilde{B\pi} \longrightarrow B\pi$$

Пусть $\{x_i\}$ семейство вершин пространства $E\pi = \widetilde{B\pi}$, представляющих каждую орбиту действия группы π. Тогда каждый симплекс σ пространства $E\pi = \widetilde{B\pi}$ полностью определяется своими вершинами

$$\sigma = (h_0 x_{i_0}, \ldots, h_n x_{i_n}),\ h_0, \ldots, h_n \in \pi,$$

а любая точка $x \in \sigma$ однозначно задется в виде выпуклой линейной комбинации вершин

$$x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k h_k x_{i_k}$$

Тогда эквивариантное непрерывное семейство фредгольмовых операторов, соответствующее фредгольмовому представлению (5) задается по следующей формуле

$$\Phi_x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Phi_{h_k x_{i_k}} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_{h_k} \Phi_{x_{i_k}} T_{h_k}^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_{h_k} \Phi T_{h_k}^{-1}. \tag{7}$$

Следовательно

$$(\Phi_x)_g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k F_{h_k^{-1} g}. \tag{8}$$

Очевидно, что семейство (7) эквивариантно. В самом деле,

$$hx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k h h_k x_{i_k}.$$

Значит,

$$\Phi_{hx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_{hh_k} \Phi T_{hh_k}^{-1} = T_h \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_{h_k} \Phi T_{h_k}^{-1} \right) T_h^{-1} = T_h \Phi_x T_h^{-1}.$$

Очевидно, также, что операторы (7) фредгольмовы в силу условий (3) , (4) и (8) С другой стороны, операторы (4) порождают непрерывное семейство

$$F_x : V \longrightarrow V, \; x \in E\pi \tag{9}$$

по формуле

$$F_x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k F(h_k^{-1}),$$

которое можно рассматривать как линейное отображения тривиального расслоения

$$F_x : E\pi \times V \longrightarrow E\pi \times V. \tag{10}$$

Рассмотрим универсальное накрытие

$$p : E\pi \longrightarrow B\pi.$$

Обозначим через

$$\mathcal{K}^i(E\pi) = \lim_{\leftarrow} K_c^i(p^{-1}(X)),$$

где обратный предел берется по направленному множеству всех компакиных подмножеств $X \subset B\pi$.

Теорема 1 *Отображение (10) определяет элемент*

$$F(\rho) \in \mathcal{K}^0(E\pi).$$

Рассмотрим прямой образ расслоения (10) над базой $B\pi$:

$$A \longrightarrow B\pi, \tag{11}$$

в котором слоем является прямая сумма слоев расслоения (10) над каждой орбитой действия группы π в пространстве $E\pi$. Тотальное пространство A определяется как

$$A = \{(u, \xi) : u \in B\pi, \xi \in \bigoplus_{x \in u} (x \times V)\}.$$

Пусть

$$\tilde{A} \longrightarrow E\pi \tag{12}$$

есть обратный образ расслоения (4). Тотальное пространство $\tilde{A}$ определяется как

$$\tilde{A} = \{(x, \xi) : x \in E\pi, \xi \in \bigoplus_{y \in [x]} (y \times V)\} = \{(x, \xi), x \in E\pi, \xi \in \bigoplus_{g \in \pi} (gx \times V)\}.$$

На тотальном пространстве $\tilde{A}$ зададим действие группы π по формуле

$$
\begin{aligned}
f_h(x,\xi) &= (hx,\eta),\\
\xi &= \oplus\xi_g \in \bigoplus_{g\in\pi}(gx\times V),\\
\eta &= \oplus\eta_g \in \bigoplus_{g\in\pi}(ghx\times V),\\
\eta_g &= \xi_{gh}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что

$$A = \tilde{A}/\pi.$$

С другой стороны имеется изоморфизм между расслоением (1) и расслоением (6):

$$\varphi : E\pi \times \bigoplus_{g\in\pi} V_g \longrightarrow \tilde{A}, \tag{13}$$

$$\varphi(x, \oplus\xi_g) = (x, \oplus\xi_{g^{-1}},$$

который является эквивариантным. Далее, отображение (10) переходит в отображение прямого образа в виде отображения

$$\tilde{F} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}, \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(x,\oplus\xi_g) &= (x, \oplus F_{gx}(\xi_g)) =\\
&= \left(x, \oplus \sum_{k=0}^{n} \lambda_k F_{h_k^{-1}g^{-1}}(\xi_g)\right).
\end{aligned}
$$

$$\tilde{F}(x,\oplus\xi_g) = (x, \oplus F_{gx}(\xi_g)$$

Ясно, что отображение (14) при изоморфизме (13) переходит в отображение (7). Таким образом доказана следующая теорема

Теорема 2 *Рассмотрим фредгольмово представление группы π вида (5) и пусть*

$$\xi_\rho \in \mathbf{K}(B\pi)$$

элемент, задаваемый отображением (7) . Тогда

$$p_!(F(\rho)) = \xi_\rho \in \mathbf{K}^0(B\pi),$$

где

$$p_! : \mathcal{K}^0(E\pi) \longrightarrow \mathbf{K}^0(B\pi)$$

есть прямой образ в K–теории.

Зададим на декартовом произведении $E\pi \times V$ действие группы π как левое действие по первой координате и тождественной по второй. Рассмотрим такую максимальную компактификацию $\overline{B\pi}$ пространства $\widetilde{B\pi}$, что для любой непрерывной на $\overline{B\pi}$ функции f выполняется условие

$$|f(xg) - f(yg)| \longrightarrow 0, \ |g| \longrightarrow \infty.$$

Тогда всякое непрерывное отображение пары

$$f : (\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi}) \longrightarrow (B(V),\ U(V)) \tag{15}$$

определяет фредгольмово представление ρ, а также отображение (15) определяет элемент

$$[f] \in K^0(\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi}). \tag{16}$$

Прямой образ элемента $[f]$, совпадает с каноническим элементом $\hat{\rho}(\xi_A) \in K^0(B\pi)$, порожденным представлением ρ. Таким образом, задача о построении достаточного запаса фредгольмовых предствлениий сводится к изучению гомотопического типа пары $(\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi})$. Например, в случае, когда пространство $B\pi$ является компактным многообразием, а пространство $\widetilde{B\pi}$ компактифицируется до диска с продолжением действия группы π, получаем новое доказательство гипотезы Новикова в случае, рассмотренном в [17]. Результат обобщается на случай некомпактного многообразия $B\pi$, если пространство $B\pi$ допускает меньшую, чем $\overline{B\pi}$, компактификацию до диска с продолжением действия группы π.

Список литературы

[1] Александров П.С., *Пуанкаре и топология, 1954.* — В книге: А. Пуанкаре, Избранные труды в трех томах, , (1972 , p.807–816

[2] Каспаров Г.Г., *О гомотопической инвариантности рациональных чисел Понтрягина.* — Докл. АН СССР, (1970) Том **190,** No. 5, p.1022-1025

[3] Мищенко А.С., *Гомотопические инварианиты неодносвязных многообразий. 1.Рациональные инварианты .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1970) Том **34 ,** No. 3 , p.501–514

[4] Мищенко А.С. , *Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры.* — Изв. АН СССР, сер. матем. , (1974) Том **38 ,** No. 1 , p.26 Перевод на англ. яз. . — Math. USSR Izvestia , (1974) Vol. **8 ,** No. 1 , p.85–111

[5] Мищенко А.С., *О фредгольмовых представлениях дискретных групп .* — Функц.анализ и его приложения , (1975) Том **9 ,** No. 2 , p.36–41

[6] Мищенко А.С., *Проблема инвариантности характеристических классов гладких многообразий .* — Вестник МГУ, сер. 1, Математика, механика , (1979 , No. 6 , p.18–23

[7] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., *Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха .* — Математический сборник, Новая серия , (1980) Том **111 ,** No. 2 , p.209–226 .

[8] Mishchenko A.S., *Controlled Fredholm representations .* — in:NovikovConjectures, Index Theorems and Ridgidity (London Math. Soc, Lect. Notes Series, v. 226) , (1995) Vol. **1 ,** p.174–200 .

[9] Мищенко А.С., *Метрический подход к построению фредгольмовых представлений .* — Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения П.С.Александрова, Москва, Тезисы , (1996 , p.2

[10] Понтрягин Л.С., *Классификация некоторых косых произведений .* — Докл. АН СССР , (1945) Том **47 ,** No. 5 pages 327–330.

[11] Понтрягин Л.С., *Характеристические циклы дифференцируемых многообразий .* — Матем. сб. , (1947) Том **21 ,** No. 2 pages 233–284.

[12] Пуанкаре А. , *Analysis situs .* — Journal de l'Ecole Polytechniques) Vol. **1 , (1895 ,** No. , p.1–121 Перевод в книге: . — Избранные труды в трех томах,) Vol. **2 , (1972 ,** p.457–548

[13] Пуанкаре А. , *Дополнение к "Analysis situs".* — rendoconti del Circolo matrmatico di Palermo , (1899 , No. 13 , p.285–343 Перевод в книге: . — Избранные труды в трех томах,) Vol. **2 , (1972 ,** p.549–593

[14] Рохлин В.А., *Новые результаты в теории 4–х мерных многообразий,* Доклады АН СССР,Том **84,**(1952), с. 221–224.

[15] .Соловьев Ю.П, *Дискретные подгруппы, комплексы Брюа-Титса и высшие сигнатуры .* — Успехи матем. наук , (1976) Том **31 ,** No. 1 , p.261–262 .

[16] Connes A., *Noncommutative Geometry .* — Academic Press , (1994

[17] Farrell F.T. Hsiang W.C. , *On Novikov's conjecture for non–positively curved msnifolds, I .* — Annals of Mathematics) Vol. **113 , (1981 ,** p.199–209

[18] Hirzebruch F., *On Steenrod's reduced powers, the index of interia, and the Todd genus,* Proc.Nat,Acad.Sci. U.S.A.,Vol. **39,**(1953), p. 951–956.

[19] Wall C.T.C., *Surgery on Compsct Manifolds.* — London Math. Soc. Monographs, vol 1, Academic Press, London and New York, (1970)