Исследования в МГУ по функциональным методам в топологии и некоммутативной геометрии.*

В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко, Е. В. Троицкий

В последние 2-3 декады прошлого столетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это название группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулирования топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций.

Хотя эта идея очень старая, восходит к ключевой теореме Гельфанда-Наймарка о взаимно однозначном соответствии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C*-алгебр, и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном так и в некоммутативном случае, в более или менее явном виде эта идея была провозглашена в виде программы действий А. Конном в его книге "Некоммутативная геометрия"[3].

Несмотря на ее самоочевидность, идея рассматривать, наряду с коммутативными C^*-алгебрами (которые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах максимальных идеалов), также и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем "некоммутативном"пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила соединить воедино многообразие понятий и методов из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе, и взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Одна из классических задач гладкой топологии, заключающаяся в описании топологических и гомотопических свойств характеристических классов гладких и кусочно-линейных многообразий, за это время приобрела практически завершенный вид исключительно благодаря тому, что к ней были применены разнообразные методы функционального анализа. И, наоборот, попытки осмыслить и решить классические топологические задачи привели к обогащению методов функционального анализа. Как это типично происходит, решение одних частных задач привело к открытию новых горизонтов в развитии математических методов и открытию новых свойств классических математических объектов.

В Московском университете исследования по некоммутативной геометрии интенсивно проводились преимущественно в следующих направлениях:

– Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.

– Алгебраические комплексы Пуанкаре.

– Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха для многообразий;

– Теория индекса и псевдодифференциальные операторы;

– Теория C*-алгебр и гильбертовых модулей;

– Неклассические представления дискретных групп;

– Циклические и диэдральные гомологии;

– Характеристические классы в некоммутативной геометрии.

Исследования в области некоммутативной геометрии в Московской топологической школе получили международное признание. Начиная с 92-го года по указанной тематике московскими специалистами было опубликовано более 100 работ в российских и зарубежных журналах. Среди них ряд книг как учебного ([59], [56], [75], [32], [34]), так и монографического характера ([21],[45], [69], [27]). В журнале Acta Applicandae Mathematicae издан специальный том, посвященный исследованиям по некоммутативной геометрии в Московской топологической школе ([18], [14], [30], [1], [26], [25], [23], [11],[8] [24]). Члены научного

*Публикация подготовлена по заказу РФФИ, гранты 02-01-00574, 02-01-00572, 02-01-06103, 02-01-06104.

коллектива под руководством А. С. Мищенко приняли участие в многочисленных российских и международных конференциях; в 2001 году при поддержке РФФИ была проведена специальная международная конференция в Москве, посвященная 60-летию А. С. Мищенко. Получен ряд стипендий ДААД и общества Макса Планка, гранты фондов Сороса и INTAS. Руководителю коллектива А. С. Мищенко в 1996 году была присуждена Государственная Премия Российской Федерации в области науки и техники (совместно с А.Т.Фоменко) за цикл работ "Исследование инвариантов гладких многообразий и гамильтоновых динамических систем".

1 Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.

Эта группа вопросов посвящена нахождению по возможности наиболее полной системы инвариантов гладких многообразий без учета каких либо дополнительных структур, оснащающих многообразие. Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффициентов и определяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий бесспорно является наиболее существенным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий, в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а также потому, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом с точностью до конечного числа возможностей.

Однако, система характеристических классов является, в некотором смысле, переопределенной системой данных. Более строго, это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса, т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразии. Наиболее часто встречающимися в топологии отношениями эквивалентности между многообразиями являются кусочно-линейные гомеоморфизмы, непрерывные гомеоморфизмы, гомотопические эквивалентности. Для этих отношений эквивалентностей проблема формулируется следующим образом: какие характеристические классы являются: а) комбинаторно инвариантными, б) топологически инвариантными, в) гомотопически инвариантными?

Ограничиваясь характеристическими рациональными классами Понтрягина, отметим, что в 1965 г. С.П.Новиков доказал, что все рациональные классы Понтрягина являются топологическими инвариантами. В случае же гомотопической инвариантности характеристических классов Понтрягина эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время. С другой стороны, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов представляется достаточно важной проблемой в силу того, что гомотопический тип многообразия представляется более доступным для классификации, по сравнению с его топологическим типом. Более того, существующие методы классификации гладких структур на многообразии сводят эту проблему к описанию гомотопического типа многообразия и к его гомологическим инвариантам.

Таким образом, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов в различных математических школах представлялась как одна из существенных проблем в дифференциальной топологии. Проблема гомотопической инвариантности рациональных классов Понтрягина оказалась наиболее интересной (и, возможно, наиболее трудной) с точки зрения взаимосвязей. Важность этой проблемы вытекает, в частности, из того, что в задаче классификации гладких структур на многообразии с помощью метода перестроек Морса необходимо иметь описание всех гомотопически инвариантных классов Понтрягина.

В случае односвязных многообразий еще Новиковым и Браудером на основании формулы Хирцебруха было доказано, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что является следствием гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером методом перестроек Морса, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является только классическая сигнатура многообразия. Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью решена в классических работах 60-х годов.

Для неодносвязных многообразий задача об описании гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина, отвечающих за препятствия к перестройке нормальных отображений до гомотопической эквивалентности, оказалась намного труднее, поскольку существенную роль здесь играет структура фундаментальной группы многообразия. Это обстоятельство наряду с тем, что описание и распознавание фундаментальной группы в конечных терминах, как известно, невозможно, в отличие от других топологических проблем вызывает дополнительный интерес к этой проблеме. Для некоторых простых случаев, когда фундаментальная группа является свободной абелевой, задачу можно было решить чисто дифференциально-геометрическими методами, используя технику так называемых внутренних перестроек. Такое решение было найдено в Московской топологической школе Г.Г.Каспаровым.

В общем же случае оказалось, что задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина может быть сведена к проверке того, что так называемые высшие сигнатуры являются гомотопически инвариантными. Точная формулировка этой проблемы известна под названием гипотезы Новикова. Положительное ее решение позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии. Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\mathrm{sign}_x(M) = \langle L(M) f^*(x), [M] \rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$ – отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, – является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\mathrm{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\mathrm{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M.

Ситуация с неодносвязными многообразиями оказывается совершенно отличной от случая односвязных многообразий, несмотря на то, что Уолл построил неодносвязный аналог теории перестроек Морса. Однако препятствия к таким перестройкам не имеют достаточно эффективного описания. Один из способов обойти эту трудность заключается в том, чтобы выяснить, какие из рациональных характеристических классов неодносвязных многообразий являются гомотопическими инвариантами. В 1970 А. С. Мищенко установил, что высшие сигнатуры являются единственными кандидатами на роль гомотопически инвариантных характеристических классов. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры [46, 16].

Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. Это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению нормального векторного расслоения в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом кольце $Q\pi$.

Проблема описания гомотопически инвариантных характеристических классов является одой из наиболее интересных проблем в дифференциальной топологии на протяжении последних 25 лет. Попытки решения этой проблемы породили многочисленные исследования, приведшие к глубоким результатам как в самой топологии, так и в смежных математических дисциплинах, таких как теория представлений, K-теория, банаховы алгебры и модули, теория эллиптических операторов, и к созданию самостоятельного направления под названием некоммутативная геометрия.

2 Алгебраические комплексы Пуанкаре.

Первая трудность, которую необходимо было преодолеть при изучении неодносвязных перестроек многообразий, заключалась в том, что когомологии неодносвязных многообразий с универсальной локальной системой коэффициентов не обладают двойственностью Пуанкаре, точнее двойственность Пуанкаре не имеет вида невырожденной квадратичной формы. Причина этого заключается в том, что модули гомологий неодносвязного многообразия не являются вообще говоря проективными.

На основании развитой им алгебраической техники так называемых алгебраических комплексов Пуанкаре А. С. Мищенко показал ([47]), что теория перестроек гладких многообразий по существу зависит не столько от гладкости многообразия, сколько от гомотопической структуры пространства. Он доказал, что препятствие к перестройке нормального отображения до гомотопической эквивалентности гладких многообразий обобщаются до категории геометрических комплексов Пуанкаре. Таким образом А. С. Мищенко были найдены формулы для описания препятствия к перестройке в виде некоторого характеристического числа со значением в когомологиях многообразия с универсальной локальной системой коэффициентов, порожденной естественным вложением фундаментальной группы в ее групповое кольцо. Однако полученные формулы были еще далеки от эффективности, поскольку кольцо коэффициентов могло быть выражено лишь в терминах эрмитовой K-теории.

3 Фредгольмовы представления.

В 1974–1975 гг. ([48],[49]) А. С. Мищенко применил метод теории фредгольмовых представлений, позволивший ему установить гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. Применение теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном векторном пространстве. Однако запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений, слишком беден, и для многих фундаментальных групп сводится только к классической сигнатуре.

Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, которые, с одной стороны, расширили запас представлений, а, с другой, сохраняли естественные свойства конечномерных представлений. Этот бесконечномерный аналог представлений заключается в новой функционально-аналитической конструкции в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмового оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*-алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(H))$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертова пространства H, а $\mathcal{K}(H)$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(H) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов.

Существенным шагом было построение канонического векторного расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$ с помощью фредгольмового представления группы π. Для применения фредгольмовых представлений к формулам Хирцебруха А.С.Мищенко ([49]) потребовалось установить возможность переходить от семейства фредгольмовых представлений к единичному представлению с тем же самым характером Чженя. Теория фредгольмовых представлений позволила доказывать гипотезу Новикова не только для указанного класса фундаментальных групп. Ученик А.С.Мищенко Ю.П.Соловьев применил разработанную технику фредгольмовых представлений для для дискретных подгрупп алгебраических групп с помощью комплексов Брюа–Титса ([67]).

Теория фредгольмовых представлений в 1995 году была распространена А. С. Мищенко ([17]) на случай непрерывных семейств, контролируемых на бесконечности, что позволило применить аналогичную технику и для таких фундаментальных групп, классифицирующие пространства которых не обязательно компактны. Более того, им [53] была предложена общая схема метрического подхода к построению фредгольмовых представлений фундаментальной группы, которая сводит задачу к построению специального пополнения классифицирующего пространства и решению уже чисто гомотопической задачи на последнем.

Теория фредгольмовых представлений, построенная в работах А.С.Мищенко, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*-алгебр в виде некоторого варианта топологической K-теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. А.С.Мищенко совместно с Ю.П.Соловьевым ([55]) разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуанкаре. Таким образом, с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий.

3.1 Асимптотические представления и почти представления.

Очень плодотворной для некомпактных групп оказалась идея рассмотрения вместо представлений некоторых более общие отображения в алгебру операторов, которые, с одной стороны, увеличивают свободу маневра, а, с другой, сохраняют основные черты представлений, необходимых для применения их в топологических задачах. Источником такого сорта идей послужили, в частности, чисто физические соображения, которые заключаются в том, что любая наблюдаемая симметрия явления, а вместе с ней и некоторый закон сохранения, в действительности проявляется неточно. Поэтому естественно возникает вопрос распознавания по неточной симметрии истинной симметрии.

Эта задача известна еще со времен Халмоша и его задачи о паре почти коммутирующих унитарных операторов. Если операторы действуют в конкретном конечномерном пространстве, то при условии достаточной близости почти коммутирующих унитарных операторов их можно аппроксимировать точно коммутирующими операторами. Совершенно иная ситуация имеет место в случае бесконечномерных пространств или даже в случае равномерных оценок коммутаторной невязки, не зависящих от размерности пространства. Как показал Войкулеску, существует последовательность почти коммутирующих пар унитарных операторов со стремящимся к нулю коммутатором (так называемая пара Войкулеску), которые нельзя сколь угодно близко аппроксимировать последовательностью пар коммутирующих операторов.

С точки зрения теории представлений групп это наблюдение может быть истолковано как построение асимптотического представления свободной абелевой группы с двумя образующими, которое не сводится к точному представлению.

Другой вариант обобщения представлений на случай неточных соотношений дает понятие квазипредставлений, в которых предполагается равномерная оценка норм соотношений в группе. В этом случае, как показал А. И. Штерн, ситуация прямо противоположная, что позволило создать стройную теорию квазипредставлений и квазихарактеров.

В статье [43] найдена связь между асимптотическими представлениями дискретной группы и фредгольмовыми представлениями этой группы. Для этого построена новая C*-алгебра, обслуживающая асимптотические представления дискретных групп и C*-алгебр с конечным числом порождающих элементов, и найден способ ее вложения в алгебру Калкина такой, что индуцированный этим вложением гомоморфизм K_1-групп является изоморфизмом. Благодаря наличию такого вложения асимптотические представления пропускаются через представления в алгебру Калкина. Как следствие, показано, что векторные расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$, которые могут быть получены с помощью асимптотических представлений дискретной группы π, могут быть также получены с помощью представлений группы $\pi \times \mathbf{Z}$ в алгебру Калкина. Найдено также обобщение понятия фредгольмова представления и показано, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления. Найдены примеры дискретных групп, не обладающих достаточным запасом асимптотических представлений, что показывает, что класс фредгольмовых представлений строго больше класса асимптотических представлений.

На основе введенного А. С. Мищенко понятия дискретизации асимптотических гомоморфизмов правое обратное отображение к отображению Конна–Хигсона построено В. М. Мануйловым для общих сепарабельных C*-алгебр. В. М. Мануйловым и К. Томсеном сформулировано понятие асимптотически расщепимого расширения C^*-алгебр, и дана конструкция, которая определяет E-функтор Конна–Хигсона в терминах, аналогичных определению KK-функтора Каспарова. Единственным различием является то, что вместо вполне положительных отображений для расщепления используются асимптотические гомоморфизмы. При этом показано, что функтор Ext всех расширений содержит E-функтор как прямое слагаемое. Доказано, что любой асимптотический гомоморфизм в алгебру Калкина гомотопен настоящему гомоморфизму. [15, 44]

Этот факт удивителен, так как в ранее известных примерах асимптотических гомоморфизмов существенно больше, чем настоящих (с точностью до гомотопии). Это свойство алгебры Калкина дает возможность доказать, что функторы Ext и E совпадают в большинстве случаев. В [42] найден важный пример конечно представленной группы Γ, показывающий, что асимптотических представлений строго меньше, чем фредгольмовых. Именно, показано, что для найденной группы Γ естественное отображение из группы асимптотических представлений в группу $K_0(B\Gamma)$ является тривиальным с точностью до кручения, в то время как аналогичное отображение из группы фредгольмовых представлений накрывает свободную образующую $K_0(B\Gamma)$.

При исследовании обнаруженного примера удалось сформулировать новое свойство конечно порожденных групп, связанное с почти представлениями: группа называется асимптотически устойчивой, если любое достаточно точное ее почти представление может быть включено в асимптотическое представление. Доказано, что, наряду с группами, очевидно обладающими этим свойством (свободными, абелевыми), этим свойством обладают также фундаментальные группы ориентированных поверхностей. Представляется любопытным, что упомянутая выше группа Γ указанным свойством не обладает.

3.2 Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха.

Известная формула Хирцебруха утверждает, что для $4k$–мерного ориентируемого компактного замкнутого многообразия X имеет место равенство

$$\mathrm{sign} X = 2^{2k} \langle L(X), [X] \rangle , \tag{1}$$

где $\mathrm{sign} X$ есть сигнатура невырожденной квадратичной формы в группах когомологий $H^{2k}(X, C)$, определяемой $\cup$–произведением, а $L(X)$ – характеристический класс Хирцебруха. Существует несколько способов обобщения формулы Хирцебуха, главным образом, для неодносвязных многообразий. Именно, пусть

X – замкнутое ориентируемое неодносвязное многообразие, $\pi = \pi_1(X)$, и пусть $f_X : X \longrightarrow B\pi$ – каноническое отображение, определенное с точностью до гомотопии, которое индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Фиксировав конечномерное представление $\rho : \pi \longrightarrow U(N)$, можно рассмотреть группы когомологий $H^{2k}(X, \rho)$ с локальной системой коэффициентов, порождаемой представлением ρ . Тогда $\cup$–произведение индуцирует невырожденную квадратичную форму на этой группе, сигнатуру которой будем обозначать через $\mathrm{sign}_\rho X$. Нетрудно установить, что

$$\mathrm{sign}_\rho X = 2^{2k} \left\langle L(X)\mathrm{ch} f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle, \tag{2}$$

где ξ^ρ есть векторное расслоение над $B\pi$, порожденное представлением ρ. Несмотря на то, что левая и правая части формулы (2) совпадают с формулой (1), это обобщение оказывается полезным при дальнейших обобщениях. Самое естественное обобщение заключается в рассмотрении унитарного представления фундаментальной группы в C^*-алгебру. Пусть $C^*[\pi]$ есть C^*– групповая алгебра группы π. Всякое унитарное представление группы π однозначно распространяется до представления $\bar{\rho}$ алгебры $C^*[\pi]$. Положим $A = \mathrm{Im}\,\bar{\rho}$, $\bar{\rho} : C^*[\pi] \longrightarrow A$. Через ξ^ρ обозначим векторное расслоение над $B\pi$ со слоем A, функции склейки которого порождаются действием группы π на алгебре A с помощью представления ρ. Векторное расслоение ξ^ρ образует элемент K–группы

$$\xi^\rho \in K_A(B\pi).$$

Мы можем теперь выписать правую часть формулы (2):

$$? = 2^{2k} \left\langle L(X)\mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q. \tag{3}$$

Левая часть формулы может быть вычислена как симметрическая сигнатура многообразия X после замены кольца, задаваемого представлением ρ, так что получаем обобщенную формулу Хирцебруха (см. [55])

$$\mathrm{sign}_\rho(X) = 2^{2k} \left\langle L(X)\mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q.$$

Обобщенная формула Хирцебруха имеет так называемую гладкую версию, в которой вместо сигнатуры многообразия подставляется индекс оператора Хирцебруха на многообразии. Достоинство такой формулы заключается в том, что оператор Хирцебруха может действовать в сечениях произвольного векторного расслоения на многообразии. Поэтому естественно возник вопрос о перенесении гладкой версии формулы Хирцебруха на комбинаторный случай, с тем, чтобы эффективно построить инварианты типа сигнатуры с коэффициентами в произвольном (неплоском) векторном расслоении. Если расслоение ξ порождается некоторым представлением фундаментальной группы π, то комбинаторная версия формулы Хирцебруха сводится к классическим формулам. Все эти формулы требуют определенных ограничений на вид расслоения ξ: расслоение ξ должно быть плоским в случае точного представления (или почти плоским в случае так называемого асимптотического представления).

В 1998–2001 годах А.С.Мищенко предпринял программу построения локальной комбинаторной формулы Хирцебруха с коэффициентами в произвольном векторном расслоении. Идея такого построения была сформулирована в работе М.Громова [10] и восходит к конструкции алгебраических комплексов Пуанкаре и так называемой симметрической сигнатуры, рассмотренных в работах А.С.Мищенко [46] и [55]. А.С.Мищенко ([54]) построил новую алгебраическую категорию, называемую *почти алгебраическими комплексами Пуанкаре*. Эта категория обладает всеми необходимыми свойствами для построения инвариантов типа сигнатуры комбинаторного многообразия с локальной системой коэффициентов, порождаемой слоями некоторого векторного расслоения ξ на многообразии. Показано, что у каждого компактного замкнутого комбинаторного многообразия существует такое достаточно мелкое симплициальное разбиение, которое естественным образом порождает почти алгебраический комплекс Пуанкаре, сигнатура которого служит левой частью формулы Хирцебруха.

В частности, построенная формула дает новую конструкцию рациональных классов Понтрягина по локальной комбинаторной структуре на многообразии X. В случае, когда векторное расслоение ξ порождается некоторым точным представлением, то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре совпадает с алгебраическим комплексом Пуанкаре из работы [46], а его сигнатура совпадает с сигнатурой многообразия в когомологиях с соответствующей локальной системой коэффициентов. В случае, когда расслоение ξ порождается некоторым асимптотическим представлением (и, следовательно, не является плоским расслоением), то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре может быть получен из универсального алгебраического комплекса Пуанкаре над групповой алгеброй фундаментальной группы π многообразия X путем замены колец. При этом сигнатура этого почти алгебраического комплекса Пуанкаре вычисляется как образ симметрической сигнатуры многообразия X при замене колец.

Теория алгебраических комплексов Пуанкаре оказалось удобным инструментом для описания сигнатуры многообразия в случае непрерывных семейств локальных систем коэффициентов, поскольку, в отличие от групп (ко)гомологий группы (ко)цепей не меняют своей размерности при переходе от одной локальной системы коэффициентов к другой. Однако в любом случае для корректного построения сигнатуры требуется конечномерность соответствующих групп (ко)цепей. В связи с этим, а также в связи с предложенным М.Громовым ([10]) методом доказательства топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина гладких многообразий естественно построить такую схему вычисления сигнатуры гладкого компактного топологического многообразия, которая бы распространялась на непрерывные семейства локальных систем коэффициентов.

Трудность в данном случае заключается в том, что подстилающие группы (ко)цепей не обязаны являться конечномерными пространствами. Если, например, отправляться от определения когомологий по Чеху, то (ко)гомологии с локальной системой коэффициентов интерпретируются как (прямые) обратные пределы (ко)гомологий нервов открытых покрытий пространства. Эти (ко)гомологии можно рассматривать как гомологии (ко)цепного комплекса, который является (прямым) обратным пределом групп (ко)цепей этих нервов, а, значит, размерности у этих пространств априори бесконечны. А. С. Мищенко совместно с П. С. Поповым ([22], [19]) построил теорию невырожденных квадратичных форм на некоторой естественной категории абстрактных бесконечномерных линейных пространств, у которой имеется гомотопический инвариант, совпадающий с сигнатурой для конечномерных пространств. Построенная теория дает возможность при вычислении сигнатур использовать для топологических многообразий вместо индефинитных представлений фундаментальных групп непрерывные семейства характеров фундаментальной группы.

4 Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами

Один из методов установления формулы Хирцебруха в односвязном случае связан с использованием свойств индекса эллиптических операторов на многообразии. Поэтому естественно возникла задача применить теорию эллиптических операторов и в неодносвязном случае. Косвенные соображения, касающиеся описания гомологий некомпактных многообразий, таких как L_2-когомологии, указывали на естественность такой постановки задачи. Поэтому еще в 1978 А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко ([50],[58]) предприняли исследование по изучению гомотопических свойств эллиптических операторов с коэффициентами в произвольной C^*-алгебре. Такие операторы естественным образом возникают в различных задачах теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях или как операторы с операторнозначными коэффициентами.

Эти операторы не являются фредгольмовыми операторами в классическом смысле, однако как ядро, так и коядро таких операторов ассоциируются с конечнопорожденными проективными модулями над C^*-алгеброй, и порождают гомотопические инварианты эллиптического оператора. Авторы дали точную геометрическую интерпретацию индекса эллиптического оператора над C^*-алгебрами и установили формулы для индекса эллиптических операторов над произвольной C^*-алгеброй, обобщающие формулы Атьи–Зингера. В частности, было получено новое доказательство обобщенных формул Хирцебруха.

Теория C^*-модулей и эллиптических операторов на C^*-алгебрами нашли в дальнейшем многочисленные применения как для уравнений в частных производных, так и для задач геометрии и топологии, равным образом в теории банаховых алгебр и C^*-модулей. В частности, ([51]) с помощью этой теории в дальнейшем исследовались гомотопические и спектральные свойства эллиптических операторов на некомпактном пространстве R^n с быстро убывающими, почти периодическими или случайными коэффициентами. Решающим методом в этом сопоставлении является дальнейшее развитие понятия прямого образа для многолистных накрытий многообразий. В случае когда база накрытия является компактным многообразием, задача изучения эллиптических операторов на накрывающем пространстве редуцируется к задаче об эллиптических операторах на компактном многообразии, но с более сложной структурной C^*-алгеброй, порожденной накрытием.

В этом направлении работали ученики А. С. Мищенко — Р. А. Бикташев, Ф. Шарипов, О. Г. Филиппов, которые разработали редукцию задачи об описании спектральных свойств эллиптических операторов на некомпактных многообразиях к такой же задаче на компактных многообразиях (ср. [33, 60]).

В. М. Мануйловым была исследована [40] двойственность между гомологиями и когомологиями в данном контексте.

Пусть A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, $V_G(X;A)$ — банахова категория, образованная локально тривиальными расслоениями над G-пространством X с типичным слоем, равным некоторому проективному A-модулю. С помощью K-теории банаховых категорий по М.Каруби можно ввести в рассмотрение K-теорию $K_G(X;A)$, где A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, X — G-пространство, отвечающую банаховой категории локально тривиальных расслоений над X. В 1985 г. Е. В. Троицким доказано, что если X/G обладает конечным открытым покрытием конечной размерности, то тензорное произведение слоев индуцирует изоморфизм

$$K_G^*(X;\mathbf{C}) \otimes K^*(pt;A) \otimes \mathbf{Q} \to K_G^*(X;A) \otimes \mathbf{Q}.$$

С помощью этого утверждения оказывается возможным определить понятие топологического индекса ind_t Мищенко–Фоменко уже в эквивариантном случае. С помощью усреднения в гильбертовых модулях (техника которого была развита Е. В. Троицким) можно определить аналитический индекс ind_a и доказать эквивариантную версию теоремы Мищенко–Фоменко об индексе: $ind_t = ind_a \in K_0^G(A) \otimes \mathbf{Q}$ [72, 73].

Чтобы учесть при этом кручение в K-теории, Е. В. Троицкий [74] развил более тонкую теорию аналитического индекса (теория топологических гильбертовых модулей, соболевских цепей и т.д.) Наиболее трудным моментом оказалось доказательство C^*-алгебраического аналога свойства (S6) алгебры Сили. Чтобы определить топологический индекс со значениями в $K_0^G(A)$ (а не в $K_0^G(A) \otimes \mathbf{Q}$), надо доказать (с использованием геометрической резольвенты Шохета) теорему об изоморфизме Тома в $K_G(.;A)$-теории. Этот результат может рассматриваться как доказательство гипотезы Каруби в важном частном случае. После этого, используя аксиоматический подход к понятию индекса, оказывается возможным доказать следующую теорему об индексе: $ind_t = ind_a \in K_0^G(A)$. Можно рассматривать эту теорему как наиболее сильную теорему об индексе "классического направления".

Первая группа приложений этой теоремы связана с $\hat{A}$-родами и теорией Громова–Лоусона–Розенберга. В частности, было получено следующее усиление результата Розенберга. Пусть M — компактное многообразие со спинорным универсальным накрытием $\widetilde{M}$, допускающим строго положительную скалярную кривизну, $\pi_1(M) = \pi$, а E — плоское A-расслоение. Имеется расщепляющаяся точная последовательность C*-алгебр $0 \to C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \to C^*(\widehat{\pi}) \to C^*(\pi) \to 0$, где $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}}$ — универсальная алгебра для тех унитарных представлений $\widehat{\pi}$, которые нетривиальны на ядре накрытия $\widehat{\pi} \to \pi$. Тогда определены $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A$-векторные расслоения $(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \times_\pi S^{\pm}) \otimes A$ на M. Действие $\widehat{\pi}$ коммутирует с D^+. Следовательно, оператор $\widetilde{D}_E^+$ определен на M. Тогда $ind_t \widetilde{D}_E^+ = 0 \in K_0(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A)$.

Одним из важнейших элементов классической теории индекса эллиптических операторов, еще не включенным в теорию C^*-индекса, оставалась теория индекса эквивариантных семейств. Е.В.Троицким эта проблема была решена в важнейшем случае: доказана теорема об индексе для эллиптических операторов, действующих в сечениях расслоений со слоем проективный модуль над C^*-алгеброй, в ситуации, когда компактная группа Ли действует не только в тотальном пространстве, но и на самой алгебре скаляров, коммутируя с символом ("дважды эквивариантная"C^*-теорема об индексе). Как приложение, получена эквивариантная теорема об индексе для семейств в случае прямого произведения базы на пространство параметров.

Другая группа приложений теоремы об индексе связана с C*-числами Лефшеца и неподвижными точками. Для автоморфизма C*-эллиптического комплекса, являющегося элементом компактной группы автоморфизмов, определяются числа Лефшеца со значениями в $K_0(A) \otimes \mathbf{C}$. Они связаны с неподвижными точками при помощи формулы типа Атьи–Лефшеца–Сигала. Для произвольного автоморфизма Е.В.Троицкий [28, 29] определил числа Лефшеца со значениями в циклических гомологиях. Числа Лефшеца двух типов связаны характером Чженя Конна–Каруби. В случае W^*-алгебр результаты могут быть усилены.

Идея рассмотрения комплексных действий группы привело к изучению так называемых чисел Рейдемайстера (или Нильсена), как числа классов сопряженности элементов группы, скрученных некоторым автоморфизмом $\varphi : \pi \to \pi$. по аналогии с классической теоремой Бернсайда Троицкий Е.В. совместно с А.Фелштыном установил, что это число равно числу неподвижных точек отображения $\varphi^* : \hat{\pi} \to \hat{\pi}$ пространства классов эквивалентных неприводимых представлений группы π в случае групп типа I.

А. В. Ершовым [35] была развита теория расслоений со слоем, равным матричной алгебре, их гомотопическая классификация, конструкция представляющих пространств, с применением к мультипликативной теории одномерных расслоений. Дальнейшее развитие этой теории привело [4, 5] к развитию обобщенной теории формальных групп и новым формулам для классов Коннера-Флойда.

5 Теория гильбертовых C^*-модулей.

Теория индекса эллиптических операторов над C^*-алгебрами потребовала ([58],[57],[52]) развить абстрактную теоретико-функциональную теорию гильбертовых C^*-модулей и фредгольмовых операторов в этих модулях. Наиболее существенными в этом направлении являются результаты, описывающие свойства компактных и фредгольмовых операторов C^*-модулей, которые существенно отличаются от классических операторов даже в случае простейших коммутативных алгебр непрерывных функций. Наиболее существенное отличие заключается в том, что операторы и даже линейные функционалы гильбертовых C^*-модулей как правило не имеют ограниченных сопряженных, что сильно усложнило анализ их свойств.

Изучение абстрактной теории гильбертовых C^*-модулей и соответствующей топологической K-теории, порожденной векторными расслоениями над C^*-алгеброй вскрыло новые обстоятельства. Одним из трудных моментов, не позволяющим автоматически перенести на случай произвольной C^*-алгебры теорию гильбертовых пространств, состоит в том, что бесконечномерные гильбертовы C^*-модули не являются автодуальными и даже рефлексивными. Однако в некоторых случаях ([52]) А.С.Мищенко установил рефлексивность C^*-модулей.

В настоящее время теория гильбертовых C^*-модулей и алгебр превратилась в самостоятельную дисциплину с многочисленными приложениями в различных математических дисциплинах. В топологии эта теория нашла применение для изучения l_2-когомологий некомпактных многообразий, аналитического кручения, инварианта Новикова–Шубина, циклических когомологий и др.

Так, например, в работе [20] было построено относительное аналитическое кручение на уровне не l_2-когомологий, т.е. групповых алгебр фон Неймана, а на уровне групповых C^*-алгебр. В частности, показано, что в случае алгебр фон Неймана относительное аналитическое кручение равно разности между аналитическим кручением многообразия и комбинаторным кручением.

Главным алгебро-топологическим инструментом, связывающим геометрию и топологию неодносвязных многообразий с теорией банаховых алгебр, является K-теория "с коэффициентами в C^*-алгебре"$K^*(X;A)$, прежде всего, при A равной алгебре функций на топологическом пространстве (многообразии или классифицирующем пространстве фундаментальной группы) или равной групповой $C*$-алгебре (приведенной или нет) фундаментальной группы. При использовании K-теории с коэффициентами в C^*-алгебре очень важно иметь удобное описание ее в терминах аналитически определенных представляющих пространств.

Таким образом, первый круг задач, стоявших перед участниками гранта, был связан с этим вопросом. В случае алгебры с единицей это было сделано нами ранее с использованием стягиваемости общей линейной группы гильбертова модуля $l_2(A)$. Состоят эти представляющие пространства из соответствующим образом определенных фредгольмовых операторов в $l_2(A)$. В связи с тем, что не всякий ограниченный оператор в этом модуле допускает сопряженный, возникают, соответственно, две общих линейных группы (GL и GL^*) и два варианта представляющих пространств. Важно понять, стягиваемы ли эти группы и совпадают ли соответствующие K-теории. Положительный ответ на этот вопрос даст большую техническую свободу, а отрицательный может привести к определению новых инвариантов.

Следует отметить, что большинство вопросов в этой сложной теме оставалось нерешенными с 1982 г. Е. В. Троицкому удалось получить ряд важных продвижений в их решении. Получено новое простое доказательство теоремы Кунца и Хигсона о стягиваемости группы обратимых операторов, допускающих сопряженный, для C^*-алгебр со строго положительным элементом. Доказана стягиваемость полной группы обратимых операторов в некоторых частных случаях, например, для подалгебр алгебры компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве и для алгебр функций на конечномерных многообразиях. Доказана стягиваемость полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля и для общей коммутативной сигма-унитальной алгебры.

В классической работе Диксмье и Дуади в свое время была доказана стягиваемость группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве в сильной топологии. В случае C^*-алгебр Е. В. Троицким [76] доказаны различные варианты обобщения этой теоремы на случай общей и полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля. Роль сильной топологии здесь играет строгая топология.

В. М. Мануйловым, Е. В. Троицким и М. Франком [9] были изучены условные ожидания на C^*-алгебрах, возникающие из действия дискретных групп. Рассмотрен ряд новых примеров действий групп, показывающих, в каких случаях условные ожидания корректно определены. Доказан ряд утверждений о конечности индекса таких условных ожиданий. Показано, что в случае конечности индекса условное ожидание определяет гильбертов модуль с внутренним произведением, принимающим значения в алгебре инвариантных функций. Найдены достаточные условия, при которых этот гильбертов модуль рефлексивен. В частности это так, если все орбиты конечны и ограничены в совокупности некоторым числом n, и точки, орбита которых меньше n, изолированы. Условие изолированности таких точек оказалось излишним и было снято В. В. Серегиным [66]. Обратные утверждения при разумных ограничениях получены Е. В. Троицким в [31].

При изучении инвариантов, связанных с действием групп на многообразиях, в том числе, таких как числа Лефшеца C^*-комплексов, естественно рассматривать топологизированные (следом и другими способами) K-группы и распространить доказанные Е. В. Троицким ранее теоремы на этот случай.

В этом русле А.А.Павлову [64, 63] удалось определить новые инварианты и исследовать их свойства. Именно, реализация идеи пополнения топологизированных K-групп привела в W^*-случае к определению нового объекта — N-группы. Построен функтор N_0 на категории алгебр фон Неймана как некоторый (более естественный в W^*-случае) аналог K-теории. Изучена его связь с операторной K-теорией. А именно, показано, что каждый элемент из $N_0(A)$, где A — алгебра фон Неймана, может быть представлен как аддитивная $K_0(A)$-значная мера с компактным носителем, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств комплексной плоскости. Кроме того, исследованы свойства N-групп W^*-алгебр.

Также отметим, что группы $N_0(A)$ как расширения $\mathbf{C} \otimes K_0(A)$-групп естественно возникают при рассмотрении произвольных унитарных эндоморфизмов W^*-эллиптических комплексов. При этом оказывается возможным определить (обобщенные) числа Лефшеца для таких эндоморфизмов со значениями в группе $N_0(A)$. Кроме того, удалось построить обобщенный характер Чженя как отображение из $N_0(A)$ в банаховы циклические гомологии (четной градуировки) W^*-алгебры A, который является продолжением классического характера Чженя с $K_0(A)$ в некотором естественном смысле.

Для гильбертовых модулей над C^*-алгебрами Е. В. Троицким и П. С. Поповым была исследована проблема почти ортодополняемости функционалов свободным подмодулем, которая тесно связана со стягиваемостью полной линейной группы. Свойство почти ортодополняемости функционалов было рассмотрено для стандартного модуля $l_2(A)$ над алгебрами с единицей, в этом случае оно является обобщением определения бесконечной размерности на некоммутативный случай.

Доказана эквивалентность двух определений (K, E) этого свойства в общем некоммутативном случае. Получены критерии выполнения этого свойства для алгебр фон Неймана, выраженные в терминах существования частичных изометрий, у которых коядро строго включает образ. Дано доказательство стабильности класса K, E-алгебр относительно тензорного произведения на матричные алгебры. Приведены примеры K, E-алгебр и контрпримеры, показывающие отличие рассмотренного свойства от других определений размерности, или ранга, для C^*-алгебр [65].

В теории гильбертовых модулей над C^*-алгебрами ряд интересных результатов получен М. Франком — найдена связь между свойствами различных классов операторов в гильбертовых модулях и различными классами мультипликаторов C^*-алгебр и изучено свойство ортодополняемости [6, 7, 8]; В. А. Трофимовым и О. Г. Филипповым — исследовано свойство рефлексивности для важных классов C^*-алгебр [77, 78, 79].

В. М. Мануйловым предпринята программа исследования феномена диагонализации компактных операторов в гильбертовых модулях над определенным классом C^*-алгебр. Этот класс алгебр включает в себя конечные W^*-алгебры, их обобщение к таким алгебрам, которые допускают приложения к задаче описания спектра оператора Шредингера с иррациональным магнитным потоком.

Гильбертовы модули над W^*-алгебрами занимают промежуточное место между гильбертовыми пространствами и гильбертовыми C^*-модулями. Пусть A — W^*-алгебра. Назовем самосопряженный оператор K в A-модуле H_A *диагонализируемым*, если существует набор $\{x_i\}$ элементов дуального модуля H'_A и набор элементов $\lambda_i \in A$ такие, что множество $\{x_i\}$ является ортонормированным, то есть $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$; модуль H'_A совпадает с A-модулем N', дуальным к модулю N, порожденному множеством $\{x_i\}$; $Kx_i = x_i\lambda_i$; для любых унитарных элементов u_i, $u_{i+1} \in A$ имеет место операторное неравенство $u_i^*\lambda_i u_i \geq u_{i+1}^*\lambda_{i+1}u_{i+1}$.

Элементы x_i назовем "*собственными векторами*", а операторы λ_i "*собственными значениями*" оператора K. Следует отметить, что "собственные векторы" и "собственные значения" определены неоднозначно. Имеются примеры, показывающие необходимость использования дуальных модулей для диагонализации операторов. Даже в случае коммутативных C^*–алгебр имеется ряд препятствий к диагонализации операторов.

В. М. Мануйловым доказана теорема о диагонализации компактных положительных операторов в дуальном стандартном гильбертовом модуле над конечными W^*–алгебрами, обобщающей теорему Гильберта–Шмидта о приведении компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве к диагональному виду: если A — W^*-алгебра, допускающая разложение в прямой интеграл конечных факторов, то компактный строго положительный оператор K в модуле H_A может быть диагонализирован в H'_A и его "собственные значения" определены единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности [13].

Доказательство основано на возможности отщепить от модуля H'_A инвариантный относительно K проективный подмодуль, который выделяется проектором со следом, равным 1. Отличие от классического (коммутативного) случая состоит в неоднозначной определенности "собственных значений".

Отметим, что для приложений интересен именно случай конечных W^*-алгебр, так как в бесконечном случае операторы диагонализируются по тривиальным причинам, но нет единственности "собственных значений" ни в каком смысле.

Далее, В. М. Мануйловым показано, что "собственные значения" непрерывно зависят от диагонализируемых операторов. Им также сформулировано аналогичное свойство для произвольных C^*-алгебр, слабо замкнутых в конечных W^*-алгебрах. Именно, скажем, что такая C^*-алгебра допускает *слабую диагонализацию*, если компактные положительные операторы допускают диагонализацию над большей W^*-алгеброй, но при этом диагональные элементы могут быть выбраны из исходной C^*-алгебры.

Сформулировано условие $(*)$ на множество проекторов в C^*-алгебре A, заключающееся в том, что с точностью до эквивалентности проекторы в алгебре A образуют подрешетку в решетке проекторов объемлющей W^*-алгебры. Плотность обратимых самосопряженных элементов в множестве всех самосопряженных элементов C^*-алгебры A (свойство $RR(A) = 0$) вместе с условием $(*)$ обеспечивают слабую диагонализацию.

В частности, это утверждение верно в случае, когда $A = A_\theta$ есть некоммутативный тор (алгебра вращения) при всех значениях θ.

В. М. Мануйловым доказано, что свойством слабой диагонализации обладают при дополнительных предположениях непрерывные поля C^*-алгебр над отрезком. Основным техническим инструментом здесь является разработанная им техника гомотопий почти коммутирующих операторов. Приведен пример, показывающий, что операторы над непрерывным полем алгебр вращения не могут быть приведены к диагональному виду. Пусть A обозначает непрерывное поле алгебр A_θ, $\theta \in [a, b]$, $a < 1 < b$. В матричной алгебре над $A_1 = C(T^2)$ существует проектор, являющийся образующей Ботта в группе $K_0(A_1)$, и его можно непрерывно продолжить до непрерывного поля проекторов $p(\theta)$ в некоторой окрестности точки 1 так, что для стандартного следа τ_θ на A имеет место равенство $\tau_\theta(p(\theta)) = 1 + \theta$. Непосредственно проверяется, что такой проектор не может быть непрерывно диагонализирован.

В [41] В. М. Мануйловым показано, что оператор Шредингера $D = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + 2\pi\theta y\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + W(x, y)$ с двоякопериодическим возмущением $W(x, y) = W(x+1, y) = W(x, y+1)$ и с магнитным потоком θ, коммутирующий с операторами U и V, удовлетворяющими соотношению $UV = e^{2\pi i\theta}VU$, можно рассматривать как (неограниченный) оператор в гильбертовом модуле над C^*–алгеброй вращения A_θ, порожденной операторами U и V. При всех значениях θ (как рациональных, так и иррациональных) оператор D может быть приведен к диагональному виду с элементами алгебры A_θ на диагонали, что дает общее для всех значений магнитного потока описание разбиения спектра оператора D, аналогичное случаю целого θ, когда диагональные. элементы являются функциями на торе, образованными упорядоченными собственными значениями семейства эллиптических операторов на торе, индексированных этим тором.

6 Циклические и диэдральные гомологии

Циклические гомологии и когомологии были изобретены почти одновременно несколькими авторами. А. Конн [2] ввел циклические когомологии в контексте некоммутативной дифференциальной геометрии как некоммутативный аналог когомологий де Рама. В работах Б. Цыгана [80], а также Д. Квиллена и Ж.-Л. Лодэ [12] циклические гомологии появились как примитивная часть гомологий матричных алгебр Ли.

Развитие теории циклических гомологий и когомологий позволило обнаружить многие ранее неизвестные связи между алгеброй, геометрией, топологией и анализом, в новом свете представило теорию индекса эллиптических операторов. Вскоре после появления циклических гомологий в работах Ю. П. Соловьёва и его учеников [38, 36, 37, 39, 68, 27] была создана теория диэдральных гомологий, оказавшаяся важным инструментом для исследования гомотопического строения групп гомеоморфизмов многообразий. Используя диэдральные гомологии и теорию рационального гомотопического типа, Ю. П. Соловьёв и Р. Л. Красаускас разработали эффективную схему для вычисления рангов гомотопических групп для группы гомеоморфизмов односвязных многообразий и получили точные значения этих рангов для квадрик в комплексных проективных пространствах, комплексных многообразий Грассмана, комплексных многообразий флагов. Кроме того, в указанных работах исследованы возможные типы внутренних симметрий в (ко)гомологиях Хохшильда и найдены связи между соответствующими гомологиями; показано, что рациональные эрмитовы K-группы односвязных топологических пространств совпадают с группами диэдральных гомологий их алгебр коцепей. Сравнительно недавно Н.В. Солодов [71] разработал конструкцию бивариантных диэдральных когомологий и нашел серию точных последовательностей, связывающих эти когомологии с бивариантными циклическими когомологиями. В работе [70] Н.В. Солодов вычислил циклические гомологии для некоторых колец алгебраических чисел; в частности, для колец $Z[\sqrt{d}]$ и $Z[i, \sqrt{d}]$.

7 Характеристические классы в некоммутативной геометрии

Один из подходов к построению характеристических классов с вещественными или комплексными коэффициентами в классической дифференциальной геометрии основан на так называемой конструкции Чженя-Вейля, которая описывает эти классы в терминах форм кривизны. В контексте некоммутативной дифференциальной геометрии конструкция Чженя-Вейля впервые появилась в одной из работ А. Конна (1982), который применил ее для вычисления характера Чженя для проективных модулей над *-алгеброй A_θ. Общая теория характеристических классов в некоммутативной дифференциальной геометрии была разработана Ю.И. Жураевым, А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьевым [61] и независимо Каруби

[62]. В первом подходе в качестве основного объекта использовалась алгебра Ли Der$A$ дифференцирований данной ассоциативной алгебры A, являющаяся аналогом алгебры Ли векторных полей на многообразии, второй подход базировался на сравнительно произвольной дифференциальной градуированной алгебре $\Omega^*(A)$, имитирующей дифференциальные формы на многообразии. Такая алгебра $\Omega^*(A)$ получила название дифференциального исчисления на A. Среди всех дифференциальных исчислений выделяется так называемое универсальное исчисление $\Omega^*_{univ}(A)$, определяемое следующим образом:

$$\Omega^n_{univ}(A) = A \otimes \tilde{A}^{\otimes n}, \quad \tilde{A} = A/K1,$$

где K — поле скаляров для алгебры A. Эта дифференциальная градуированная алгебра является инициальным объектом в категории дифференциальных исчислений на алгебре A. Отсюда вытекает, что характеристические классы, вычисленные при помощи произвольного дифференциального исчисления являются образами универсальных характеристических классов, определяемых по дифференциальному исчислению $\Omega^*_{univ}(A)$. Это позволяет исследовать вопрос о нетривиальности характеристических классов, имея дело с одним лишь универсальным дифференциальным исчислением.

Пример нетривиального характеристического класса групповой алгебры конечной группы был построен И.М. Никоновым в работе [61]. Позднее, обобщая этот результат, И.М. Никонов нашел критерий обращения в нуль универсальных характеристических классов конечномерной полупростой ассоциативной алгебры [62]. В частности, он показал, что все характеристические классы несвободного модуля над групповой алгеброй конечной группы отличны от нуля.

Список литературы

[1] V. V. Belokurov, E. T. Shavgulidze,, Yu. P. Solovyov. Perturbation theory for quantum field theory: Convergent series instead of asymptotic expansions. *Acta. Appl. Math.* **68**, 71–104, 2001.

[2] A. Connes. Cohomologie cyclique et foncteur Ext^n. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie 1* **296**, 953–958, 1983.

[3] A. Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press, San Diego, 1994.

[4] A. V. Ershov. Formal group laws over Hopf algebras and their application to complex cobordism theory. Preprint 39, Max-Planck-Institut für Mathematik, 2002.

[5] A. V. Ershov. Symmetries in complex cobordism theory, related to stable equivalence classes of SU-bundles. Preprint 70, Max-Planck-Institut für Mathematik, 2002.

[6] M. Frank. A set of maps from K to $End_A(l_2(A))$ isomorphic to $End_{A(K)}(l_2(A(K)))$. Applications. *Annals of Global Anal. and Geom.* **3**, N 2, 155–171, 1985.

[7] M. Frank. Self-duality and C^*-reflexivity of Hilbert C^*-modules. *Zeitschr. Anal. Anwendungen* **9**, 165–176, 1990.

[8] M. Frank. Hilbertian versus Hilbert W^*-modules and applications to L^2- and other invariants. *Acta. Appl. Math.* **68**, 227–242, 2001.

[9] M. Frank, V. M. Manuilov,, E. V. Troitsky. On conditional expectations arising from group actions. *Zeitschr. Anal. Anwendungen* **16**, 831–850, 1997.

[10] M. Gromov. Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures. В: *Functional Anal. on the Eve of the 21st Century, v. II*, number 132 in Progress in Math. Birkhauser, Basel–Boston, 1995.

[11] A. A. Irmatov. Arrangements of hyperplanes and the number of threshold functions. *Acta. Appl. Math.* **68**, 211–226, 2001.

[12] J.-L. Loday, D. Quillen. Cohomologie cyclique et foncteur Ext^n. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie 1* **296**, 295–297, 1983.

[13] V. M. Manuilov. Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^*-algebras. *Annals of Global Anal. and Geom.* **13**, N 3, 207–226, 1995.

[14] V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko. Almost, asymptotic and Fredholm representations of discrete groups. *Acta. Appl. Math.* **68**, 159–210, 2001.

[15] V. M. Manuilov, K. Thomsen. Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms. *Adv. Math.* **154**, 258–279, 2000.

[16] A. S. Mishchenko. Extraordinary homology theories: bordisms and K-theory. В: *Congrés international des mathématiciens, Actes*, стр. 113–119, Nice, 1971.

[17] A. S. Mishchenko. Controlled Fredholm representations. В: S. C. Ferry, A. Ranicki,, J. Rosenberg, editors, *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, vol. 1 (London Math. Soc. Lect. Notes Series vol. 226)*, стр. 174–200. Cambridge Univ. Press, 1995.

[18] A. S. Mishchenko. Theory of almost algebraic Poincaré complexes and local combinatorial Hirzebruch formula. *Acta. Appl. Math.* **68**, 5–37, 2001.

[19] A. S. Mishchenko. Poincaré duality of topological manifolds. В: *Short Communications and Poster Sessions of International Congress of Mathematicians (2002, Beijing). Abstracts*, стр. 85. Higher Education Press, Beijing, 2002.

[20] A. S. Mishchenko, A. Carey,, V. Mathai. On analytical torsion over C^*–algebras. В: *Proceedings of the Workshop "Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory / Reidemeister Torsion '96"*, number 46 in Banach Center Publ., стр. 20. 1999.

[21] A. S. Mishchenko, G. Luke. *Vector Bundles and Their Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrrecht, Boston, London, 1998.

[22] A. S. Mishchenko, P. S. Popov. On construction of signature of quadratic forms on infinite dimensional abstaract spaces. *Georgian Math. J.* **9**, N 4, 773–783, 2002.

[23] A. A. Pavlov. The generalized Chern character and Lefschetz numbers in W^*-modules. *Acta. Appl. Math.* **68**, 137–157, 2001.

[24] Th. Popelensky. Steenrod operation in certain cobordism theories. *Acta. Appl. Math.* **68**, 243–261, 2001.

[25] P. Popov, A. Buchina. Quasi-orthogonalization of functionals on $l_2(A)$. *Acta. Appl. Math.* **68**, 123–135, 2001.

[26] A. I. Shtern. A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locallyt compact group to be finite-dimensioanal. *Acta. Appl. Math.* **68**, 105–121, 2001.

[27] Yu. P. Solovyov. *Lectures on homologies with internal symmetries.* ICTP, Trieste, 1993.

[28] E. V. Troitsky. Lefschetz numbers of C*-complexes. В: S. Jackowski, B. Oliver,, K. Pawałowski, editors, *Algebraic Topology, Poznań 1989, Lect. Notes in Math., vol. 1474*, стр. 193–206. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1991.

[29] E. V. Troitsky. Orthogonal complements and endomorphisms of Hilbert modules and C*-elliptic complexes. В: S. C. Ferry, A. Ranicki,, J. Rosenberg, editors, *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, vol. 2 (London Math. Soc. Lect. Notes Series vol. 227)*, стр. 309–331. Cambridge Univ. Press, 1995.

[30] E. V. Troitsky. "Twice" equivariant C^*-index theorem and the index theorem for families. *Acta. Appl. Math.* **68**, 39–70, 2001.

[31] E. V. Troitsky. Discrete group actions and corresponding modules. *Proc. Amer. Math. Soc.* **00**, 000–000, 2003. принято к печати. (Preprint 112, Max-Planck-Institut für Mathematik, nov. 2000.).

[32] Л.А. Алания, С.М. Гусейн-Заде, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов, Д.В. Миллионщиков, А.С. Мищенко, Е.А. Морозова, Т.Е. Панов, М.М. Постников, Е.Г. Скляренко, Ю.М. Смирнов (ред.),, Е.В. Троицкий. *Задачник по аналитической геометрии и линейной алгебре.* Наука-Физматлит, Москва, 2001.

[33] Р. А. Бикташев, А. С. Мищенко. О спектрах эллиптических неограниченных операторов над C^*-алгебрами. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 3, 56–58, 1980.

[34] А.П. Веселов, Е.В. Троицкий. *Лекции по аналитической геометрии.* Мех.-мат. ф-т. МГУ, Москва, 2002.

[35] А. В. Ершов. О гомотопических свойствах расслоений со структурной группой автоморфизмов матричных алгебр. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 6, 56–60, 1999.

[36] Р. Л. Красаускас, С. В. Лапин,, Ю. П. Соловьёв. Диэдральные гомологии и когомологии. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 4, 28–32, 1987.

[37] Р. Л. Красаускас, С. В. Лапин,, Ю. П. Соловьёв. Диэдральные гомологии и когомологии. основные понятия и конструкции. *Матем. сб. (Н.С.)* **133 (175)**, N 1(5), 25–48, 1987.

[38] Р. Л. Красаускас, Ю. П. Соловьёв. Диэдральные гомологии и эрмитова K-теория топологических пространств. *Успехи матем. наук* **41**, N 2, 195–197, 1986.

[39] Р. Л. Красаускас, Ю. П. Соловьёв. Рациональная эрмитова K-теория и диэдральные гомологии. *Известия АН СССР, Сер.матем.* **52**, N 5, 935–969, 1988.

[40] В. М. Мануйлов. K-гомологии C^*-алгебр. *Матем. сб. (Н.С.)* **131**, N 4, 536–543, 1986.

[41] В. М. Мануйлов. О собственных значениях возмущенного оператора Шредингера в магнитном поле с иррациональным магнитным потоком. *Функцион. анализ и его прил.* **28**, N 2, 57–60, 1994.

[42] В. М. Мануйлов. Почти представления и асимптотические представления дискретных групп. *Изв. РАН, сер. матем.* **63**, N 5, 159–178, 1999.

[43] В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко. Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп. *Матем. сб. (Н.С.)* **189**, N 10, 1998.

[44] В. М. Мануйлов, К. Томсен. Асимптотически расщепимые расширения и E-теория. *Алгебра и анализ* **12**, N 5, 142–157, 2000.

[45] В.М. Мануйлов, Е.В. Троицкий. *C^*-гильбертовы модули.* Факториал пресс, Москва, 2001.

[46] А. С. Мищенко. Гомотопические инварианиты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты. *Известия АН СССР, Сер.матем.* **34**, N 3, 501–514, 1970.

[47] А. С. Мищенко. Перестройки комплексов Пуанкаре. *Матем. сб. (Н.С.)* **85**, N 3, 366–372, 1971.

[48] А. С. Мищенко. Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры. *Известия АН СССР, Сер.матем.* **38**, N 3, 81–106, 1974.

[49] А. С. Мищенко. О фредгольмовых представлениях дискретных групп. *Функц. анализ и его приложения* **9**, N 2, 36–41, 1975.

[50] А. С. Мищенко. Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Доклады АН СССР* **239**, N 6, 1289–1291, 1978.

[51] А. С. Мищенко. Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K–теории. *Успехи матем. наук* **34**, N 6, 67–79, 1979.

[52] А. С. Мищенко. Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C^*–алгебрами. *Труды МИАН СССР* **166**, 161–176, 1984.

[53] А. С. Мищенко. Метрический подход к построению фредгольмовых представлений. В: *Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения П.С.Александрова. Тезисы*, стр. 2, Москва, 1996.

[54] А. С. Мищенко. Локальная комбинаторная формула Хирцебруха. *Труды МИРАН* **224**, 249–263, 1999.

[55] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев. Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха. *Матем. сб. (Н.С.)* **111**, N 2, 209–226, 1980.

[56] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев,, А. Т. Фоменко. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.* Интеграция, Москва, 2001.

[57] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. C^*–алгебры и K^*–теория. В: *Школа по теории операторов в функциональных пространствах*, стр. 16, Новосибирск, 1979.

[58] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Известия АН СССР, Сер.матем.* **43**, N 4, 831–859, 1979.

[59] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* Факториал, Москва, 2000.

[60] А. С. Мищенко, Ф. Шарипов. Независимость спектра эллиптического оператора со случайными коэффициентами. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 6, 51–56, 1983.

[61] И. М. Никонов. Пример нетривиального характеристического класса групповой алгебры $C[Z_3]$. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 4, 2002.

[62] И. М. Никонов. Характеристические классы конечномерных полупростых алгебр. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , 2003. (в печати).

[63] А. А. Павлов. Нормированные группы и их применения в некоммутативной дифференциальной геометрии. *Записки научн. семинаров ПОМИ* **266**, 234–244, 2000.

[64] А. А. Павлов. Функтор N_0 над категорией алгебр фон Неймана и его связь с операторной K-теорией. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 4, 55–58, 2000.

[65] П. С. Попов. Топологический критерий почти ортодополняемости произвольного функционала на $l_2(C(X))$. *Матем. заметки* **65**, N 4, 636–640, 1999.

[66] В. В. Серегин. Рефлексивность C^*-гильбертовых модулей, полученных с помощью действий группы. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , 2003.

[67] Ю. П. Соловьев. Дискретные подгруппы, комплексы Брюа-Титса и высшие сигнатуры. *Успехи матем. наук* **31**, N 1, 261–262, 1976.

[68] Ю. П. Соловьёв. Рациональная эрмитова K-теория и диэдральные гомологии. *Итоги науки и техники ВИНИТИ. Серия "Алгебра, топология, геометрия"* **24**, 121–194, 1986.

[69] Ю.П. Соловьев, Е.В. Троицкий. *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.* Факториал Пресс, Москва, 1996.

[70] Н. В. Солодов. О циклических гомологиях некоторых колец алгебраических чисел. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 6, 56–59, 2000.

[71] Н. В. Солодов. Бивариантные диэдральные когомологии. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 2, 54–58, 2003.

[72] Е.В. Троицкий. Теорема об индексе для эквивариантных C*-эллиптических операторов. *Докл. АН СССР* **282**, N 5, 1059–1061, 1985.

[73] Е.В. Троицкий. Эквивариантный индекс C*-эллиптических операторов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **50**, N 4, 849–865, 1986.

[74] Е.В. Троицкий. Точная формула для индекса эквивариантного C*-эллиптического оператора. *Труды МИРАН им. В.А.Стеклова* **193**, 178–182, 1992.

[75] Е.В. Троицкий. *Степень отображения и ее применения.* МГУ, 1996.

[76] Е.В. Троицкий. Функционалы на $l_2(A)$ и теоремы типа Кюйпера и Диксмье-Дуади для C^*-гильбертовых модулей. *Труды МИРАН им. В.А.Стеклова* **225**, 362–380, 1999.

[77] В. А. Трофимов. Рефлексивность гильбертовых модулей над алгеброй компактных операторов с присоединенной единицей. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 5, 60–64, 1986.

[78] В. А. Трофимов. Рефлексивные и автодуальные гильбертовы модули над некоторыми C^*-алгебрами. *Успехи матем. наук* **42**, N 2, 1987.

[79] О. Г. Филиппов. О C^*-алгебрах, над которыми гильбертов модуль $l_2(A)$ автодуален. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. матем., мех.* , N 4, 74–76, 1987.

[80] Б. Л. Цыган. Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда. *Успехи матем. наук* **38**, N 2, 217–218, 1983.