

УДК 513.8

Я. Кубарски, А. С. Мищенко

Алгеброиды Ли: спектральные последовательности и сигнатура

Доказывается, что для произвольного транзитивного алгеброида Ли L на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропные алгебры унимодулярны, а монодромия тривиальна, его алгебра когомологий является алгеброй Пуанкаре с тривиальной сигнатурой. Примерами таких алгеброидов являются алгеброиды на односвязном многообразии, а также алгеброиды, у которых группа внешних автоморфизмов изотропной алгебры Ли совпадает с внутренними автоморфизмами или присоединенное расслоение алгебр Ли \mathfrak{g} индуцирует тривиальное расслоение гомологий $H^*(\mathfrak{g})$ в категории плоских расслоений.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Введение

1.1. Категория алгеброидов Ли.

1.1.1. Алгеброиды Ли возникают как инфинитезимальные объекты для группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений (см. [1], а также [2]–[4]), трансверсально полных слоений (кратко, ТС-слоений), незамкнутых подгрупп Ли (см. [5], а также [6], [7]), многообразий Пуассона (см. [8]) и др. Их алгебраические аналоги известны как псевдоалгебры Ли [9], называемые также алгебрами Ли–Райнхарта [10].

1.1.2. Алгеброид Ли на многообразии M состоит из тройки $L = (L, [\cdot, \cdot], \gamma_L)$, где L есть векторное расслоение на многообразии M , на пространстве сечений $(\text{Sec } L, [\cdot, \cdot])$ которого задана структура \mathbb{R} -алгебры Ли, отображение $\gamma_L: L \rightarrow TM$, называемое *анкером*, является линейным гомоморфизмом векторных расслоений, для которого выполняется следующее условие Лейбница:

$$[\xi, f \cdot \eta] = f \cdot [\xi, \eta] + \gamma_L(\xi)(f) \cdot \eta, \quad f \in C^\infty(M), \quad \xi, \eta \in \text{Sec } L.$$

Анкер сохраняет операцию коммутирования сечений: $\gamma_L \circ [\xi, \eta] = [\gamma_L \circ \xi, \gamma_L \circ \eta]$ [9], [11].

Работа была частично представлена на Международном Конгрессе математиков в Пекине, август 2002 г.

Работа первого автора поддержана грантом, присужденным факультетом технической физики, вычислительной техники и прикладной математики Технического университета г. Лодзи.

Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-00574) и программой “Университеты России” (грант № УР.04.03.009).

Алгеброид Ли называется *транзитивным алгеброидом*, если анкер γ_L является послойным эпиморфизмом. Для транзитивных алгеброидов Ли имеет место точная последовательность Атья

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \longrightarrow 0,$$

в которой ядро анкера $\mathfrak{g} := \ker \gamma_L$ образует векторное расслоение, являющееся расслоением алгебр Ли (для краткости ЛАВ-расслоение). Это расслоение называется *присоединенным к расслоению L* . Слоем \mathfrak{g}_x расслоения \mathfrak{g} в каждой точке $x \in M$ служит алгебра Ли, операция коммутирования в которой задается по формуле

$$[v, w] = \llbracket \xi, \eta \rrbracket(x), \quad \xi, \eta \in \text{Sec } L, \quad \xi(x) = v, \quad \eta(x) = w, \quad v, w \in \mathfrak{g}_x.$$

Алгебра Ли \mathfrak{g}_x называется *изотропной алгеброй Ли алгеброида L в точке $x \in M$* . Ясно, что размерность расслоения L равна сумме размерностей многообразия M и расслоения \mathfrak{g} ,

$$\text{rank } L = \dim M + \dim \mathfrak{g}_x.$$

Любой транзитивный алгеброид Ли L на стягиваемом многообразии M изоморфен тривиальному алгеброиду Ли [12], [13], который задается в виде декартова произведения $TM \times \mathfrak{g}$, анкером которого служит естественная проекция pr_1 , а коммутатор сечений задается по формуле

$$\llbracket (X, \sigma), (Y, \eta) \rrbracket = ([X, Y], X(\eta) - Y(\sigma) + [\sigma, \eta]),$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma, \eta \in C^\infty(M; \mathfrak{g})$.

Если $\gamma_L = 0$, то алгеброид L называется *вполне нетранзитивным*. Например, если расслоение \mathfrak{g} является ЛАВ-расслоением, присоединенным к транзитивному алгеброиду, \mathfrak{g} является вполне нетранзитивным алгеброидом.

Расщепление $\lambda: TM \rightarrow L$ точной последовательности Атья $0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \rightarrow 0$ называется *связностью в алгеброиде Ли L* . В случае алгеброида Ли главного расслоения P имеется взаимно однозначное соответствие между связностями в алгеброиде и обычными связностями в расслоении P . Каждая связность $\lambda: TM \rightarrow L$ задает ковариантный градиент ∇ в присоединенном расслоении \mathfrak{g} по формуле $\nabla_X \sigma = \llbracket \lambda X, \sigma \rrbracket$, причем форма кривизны $\Omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g})$ задается по формуле $\Omega(X, Y) = \lambda[X, Y] - \llbracket \lambda X, \lambda Y \rrbracket$. Если изотропные алгебры Ли являются абелевыми алгебрами, то ковариантный градиент ∇ в расслоении \mathfrak{g} является плоским, не зависит от выбора связности λ и называется *характеристическим градиентом для абелевого алгеброида Ли L* .

1.1.3. Алгеброиды Ли формируют категорию алгеброидов Ли со строгими и нестрогими гомоморфизмами. (Напомним, что под строгим гомоморфизмом векторных расслоений понимается гомоморфизм, тождественный по базе расслоения.)

Пусть L и L' – два алгеброида Ли на многообразии M . Строгий гомоморфизм $H: L' \rightarrow L$ векторных расслоений (т.е. тождественный по базе, $\text{id}_M: M \rightarrow M$)

называется (*строгим*) *гомоморфизмом алгеброидов Ли*, если $\gamma \circ H = \gamma'$, а $\text{Sec } H: \text{Sec } L' \rightarrow \text{Sec } L$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Пусть $(L, [\cdot, \cdot], \gamma)$ и $(L', [\cdot, \cdot]', \gamma')$ суть два алгеброида Ли соответственно на многообразиях M и M' . Под (*нестрогим*, вообще говоря) *гомоморфизмом между этими алгеброидами*

$$H: (L', [\cdot, \cdot]', \gamma') \rightarrow (L, [\cdot, \cdot], \gamma)$$

будем понимать такой гомоморфизм векторных расслоений $H: L' \rightarrow L$, скажем, над отображением $f: M' \rightarrow M$, что выполнены следующие условия.

а) Справедливо равенство $\gamma \circ H = f_* \circ \gamma'$.

б) Пусть $\xi, \xi' \in \text{Sec } L'$ – два произвольных сечения расслоения L' , а η_1, \dots, η_n – некоторые сечения расслоения L , образующие базис пространства $\text{Sec } L$ над некоторым открытым подмножеством $U \subset M$. Тогда сечения $H \circ \xi$ и $H \circ \xi'$ (над множеством $f^{-1}[U]$) можно записать в виде линейных комбинаций

$$H \circ \xi_{f^{-1}[U]} = \sum_i f^i \cdot (\eta_i \circ f)_{f^{-1}[U]},$$

$$H \circ \xi'_{f^{-1}[U]} = \sum_j f'^j \cdot (\eta_j \circ f)_{f^{-1}[U]}$$

для подходящих функций $f^i, f'^j \in C^\infty(M')$. Потребуем, чтобы

$$H \circ [\xi, \xi']_{f^{-1}[U]} = \left(\sum_{i,j} f^i \cdot f'^j [\eta_i, \eta_j] \circ f + \sum_j [(\gamma' \circ \xi)(f'^j) - (\gamma' \circ \xi')(f^j)] \cdot \eta_j \circ f \right)_{f^{-1}[U]}.$$

Тангенциальное отображение $f_*: TM' \rightarrow TM$ к C^∞ -гладкому отображению многообразий $f: M' \rightarrow M$ служит примером (нестромого) гомоморфизма регулярных алгеброидов Ли.

Вышеприведенное определение, достаточно запутанное и не интуитивное, становится вполне наглядным с точки зрения группоидов Ли: понятие нестромого гомоморфизма вполне очевидно, оно должно быть совместимо с источниками и образами, а также с частичными композициями. Переходя к инфинитезимальным объектам (алгеброидам Ли), получаем вышеопределенный нестрогий гомоморфизм алгеброидов Ли.

В случае алгеброидов Ли L и L' на одном многообразии M понятие гомоморфизма $H: L' \rightarrow L$ над тождественным отображением $\text{id}_M: M \rightarrow M$ (т.е. так называемого строгого гомоморфизма) совпадает с описанным выше.

1.1.4. Пусть $L' = (L', [\cdot, \cdot]', \gamma')$ и $L = (L, [\cdot, \cdot], \gamma)$ – два алгеброида Ли на многообразиях M' и M соответственно. *Декартовым произведением алгеброидов L' и L* называется алгеброид Ли $(L' \times L, [\cdot, \cdot]^\times, \gamma' \times \gamma)$ над многообразием $M' \times M$, где $L' \times L$ есть декартово произведение векторных расслоений, а для сечений $\bar{\xi} = (\xi^1, \xi^2), \bar{\eta} = (\eta^1, \eta^2) \in \text{Sec}(L' \times L)$ скобка

$$[\bar{\xi}, \bar{\eta}]^\times = ([\bar{\xi}, \bar{\eta}]^1, [\bar{\xi}, \bar{\eta}]^2)$$

задается формулами

$$\begin{aligned} \llbracket \bar{\xi}, \bar{\eta} \rrbracket_{(x,y)}^1 &= \llbracket \xi^1(\cdot, y), \eta^1(\cdot, y) \rrbracket'_x + (\gamma \circ \xi^2)_{(x,y)}(\eta^1(x, \cdot)) - (\gamma \circ \eta^2)_{(x,y)}(\xi^1(x, \cdot)), \\ \llbracket \bar{\xi}, \bar{\eta} \rrbracket_{(x,y)}^2 &= \llbracket \xi^2(x, \cdot), \eta^2(x, \cdot) \rrbracket_y + (\gamma' \circ \xi^1)_{(x,y)}(\eta^2(\cdot, y)) - (\gamma' \circ \eta^1)_{(x,y)}(\xi^2(\cdot, y)). \end{aligned}$$

Ясно, что изоиморфизм расслоений $TM \times TN = T(M \times N)$ является изоморфизмом алгеброидов Ли.

1.1.5. Пусть L и L' – два регулярных алгеброида Ли на многообразиях M и M' соответственно, и пусть $\phi, \phi': L' \rightarrow L$ – два гомоморфизма алгеброидов Ли. Под *гомотопией, соединяющей гомоморфизмы ϕ и ϕ'* , мы понимаем гомоморфизм алгеброидов Ли

$$H: T\mathbb{R} \times L' \rightarrow L,$$

для которого $H(\theta_0, \cdot) = \phi$ и $H(\theta_1, \cdot) = \phi'$, где θ_0 и θ_1 суть касательные нулевые векторы к \mathbb{R} в точках 0 и 1 соответственно [14]. Это определение можно применять и к алгебрам Ли. Гомотопия H индуцирует оператор цепной гомотопии и как следствие равенство гомоморфизмов $\phi^\# = \phi'^\#$ на уровне когомологий [14].

1.1.6. С каждым алгеброидом Ли L мы можем связать алгебру когомологий $H_L(M)$ [15], задаваемую с помощью дифференциальной градуированной алгебры L -дифференциальных форм (с вещественными коэффициентами) $(\Omega_L(M), d_L)$, у которой

$$\begin{aligned} \Omega_L(M) &= \text{Sec } \wedge L^*, \quad d_L: \Omega_L^*(M) \rightarrow \Omega_L^{*+1}(M), \\ (d_L \Theta)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\gamma_L \circ \xi_j)(\Theta(\xi_0, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Theta(\llbracket \xi_i, \xi_j \rrbracket, \xi_0, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_k), \\ \Theta &\in \Omega_L^k(M), \quad \xi_i \in \text{Sec } L. \end{aligned}$$

Здесь L^* обозначает пространство, дуальное к пространству L , в то время как знак “*” в Ω_L^* обозначает градуировку дифференциальных форм.

Внешний дифференциал d_L порождает алгебру когомологий

$$H_L(M) = H(\Omega_L(M), d_L).$$

Для тривиального алгеброида Ли TM – касательного расслоения многообразия M – дифференциал d_{TM} есть обычный дифференциал де Рама d_M дифференциальных форм на многообразии M . В случае, когда $L = \mathfrak{g}$, где \mathfrak{g} есть алгебра Ли, дифференциал $d_{\mathfrak{g}}$ совпадает с обычным дифференциалом Шевалле–Эйленберга, т.е. $d_{\mathfrak{g}} = \delta_{\mathfrak{g}}$. Произвольный (вообще говоря, нестрогий) гомоморфизм $H: L' \rightarrow L$ над отображением многообразий $f: M' \rightarrow M$ определяет обратный образ дифференциальных форм $H^*: \Omega_L(M) \rightarrow \Omega_{L'}(M')$ по формуле

$$H^*(\Theta)_{x'}(v_1, \dots, v_k) = \Theta_{f(x')}(H(v_1), \dots, H(v_k)).$$

Обратный образ дифференциальных форм коммутирует с внешним дифференциалом и задает гомоморфизм в когомологиях $H^\#: H_L(M) \rightarrow H_{L'}(M')$.

1.2. Функторы Ли. Так называемые функторы Ли действуют из различных категорий дифференциальных объектов, упоминавшихся вначале, таких как категория группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений, трансверсально полных слоений, незамкнутых подгрупп Ли и др., в категорию алгеброидов Ли. Они обобщают функтор Ли для групп Ли.

ПРИМЕР 1. АЛГЕБРОИД ЛИ $A(P)$ G -ГЛАВНОГО РАССЛОЕНИЯ $P = P(M, G)$. Имеется три различных эквивалентных определения алгеброида $A(P)$ [2]. Одно определение алгеброида $A(P)$ базируется на векторном расслоении TP/G , введенном в работе М. Атья [16], и состоит в следующем: пространство $A(P) = TP/G$ есть пространство орбит правого действия группы G на касательном расслоении TP , порожденном дифференциалами правых трансляций (см. [3], [12], [2]). Анкер задается формулой $\gamma([v]) = \pi_*(v)$. Коммутатор сечений конструируется на основе следующего наблюдения: для каждого сечения $\eta \in \text{Sec } A(P)$ существует в точности одно C^∞ -гладкое правоинвариантное векторное поле $\eta' \in \mathfrak{X}^R(P)$ такое, что $[\eta'(z)] = \eta(\pi z)$, $z \in P$, а отображение $\text{Sec } A(P) \rightarrow \mathfrak{X}^R(P)$, $\eta \mapsto \eta'$, является изоморфизмом C^∞ -модулей. Коммутатор $[[\xi, \eta]]$ для $\xi, \eta \in \text{Sec } A(P)$ определяется таким образом, чтобы $[[\xi, \eta]]' = [\xi', \eta']$. Говорят, что транзитивный алгеброид Ли порожден главным расслоением.

Структура алгеброида Ли $A(P)$ проще, чем структура главного расслоения P . А именно, неизоморфные главные расслоения могут иметь изоморфные алгеброиды Ли. Например, существует нетривиальное главное расслоение, для которого соответствующий алгеброид Ли тривиален (нетривиальная $\text{Spin}(3)$ -структура тривиального главного расслоения $\mathbb{R}(5) \times SO(3)$ обладает таким свойством [2]).

ПРИМЕР 2. ОСНОВНАЯ ФОРМА ТРАНЗИТИВНОГО АЛГЕБРОИДА ЛИ. Любой транзитивный алгеброид Ли с точностью до изоморфизма представляется в следующем виде, который был описан в работе Маккензи [12] и независимо в работе Кубарски [2].

Пусть дана система (g, ∇, Ω_b) , состоящая из LAV-расслоения g на многообразии M , ковариантного градиента ∇ в расслоении g и 2-формы $\Omega_b \in \Omega^2(M, g)$ на многообразии M со значениями в расслоении g , которые удовлетворяют условиям:

- 1) $\nabla^2 \sigma = -[\Omega_b, \sigma]$, $\sigma \in \text{Sec } g$;
- 2) $\nabla_X [\sigma, \eta] = [\nabla_X \sigma, \eta] + [\sigma, \nabla_X \eta]$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma, \eta \in \text{Sec } g$;
- 3) $\nabla \Omega_b = 0$.

Тогда сумма расслоений $TM \oplus g$ образует транзитивный алгеброид Ли, коммутаторная скобка в котором задается по формуле

$$[[X, \sigma), (Y, \eta)] = ([X, Y], -\Omega_b(X, Y) + \nabla_X \eta - \nabla_X \sigma + [\sigma, \eta]),$$

а анкер определяется как проекция на первое слагаемое.

Как заметил К. Маккензи [12], эта теорема приводит к начальному шагу (имеющему название *алгебраического*) решения давно стоящей проблемы А. Вейля: выяснить, когда заданная 2-форма $\Omega_b \in \Omega^2(M; g)$ является тензором кривизны некоторой связности некоторого главного расслоения $P(M, G)$ над многообразием M ,

у которого расслоение \mathfrak{g} служит в качестве расслоения Ad-ассоциированных алгебр Ли.

Второй (конечный) шаг заключается в теореме [12], [17], устанавливающей препятствие к интегрируемости построенного алгеброида Ли $TM \oplus \mathfrak{g}$.

ПРИМЕР 3. АЛГЕБРОИД ЛИ $A(f)$ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ \mathfrak{f} [12], [18]. Слоем $A(f)_x$ расслоения $A(f)$ служит пространство таких линейных гомоморфизмов $l: \text{Sec } \mathfrak{f} \rightarrow f_x$, для которых существует такой вектор $u \in T_x M$, называемый анкером гомоморфизма l , что

$$\begin{aligned} l(f \cdot \nu) &= f(x) \cdot l(\nu) + u(f) \cdot \nu_x, \\ f &\in C^\infty(M), \quad \nu \in \text{Sec } \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Тогда сечение $\xi \in \text{Sec } A(f)$ естественным образом задает ковариантный дифференциальный оператор в расслоении \mathfrak{f} . Коммутаторная скобка сечений расслоения $A(f)$ задается стандартным образом для дифференциальных операторов. Алгеброид Ли $A(f)$ естественным образом изоморфен алгеброиду Ли $GL(V)$ -главного расслоения (где V есть типичный слой расслоения \mathfrak{f}) всех реперов расслоения \mathfrak{f} . Локально, т.е. над некоторой окрестностью U некоторой точки многообразия M , алгеброид Ли $A(f)_U$ изоморфен тривиальному алгеброиду $TU \times \text{End}(V)$ [18; 5.4.4]. К. Маккензи [12] дает другое эквивалентное определение CDO(f) для алгеброида Ли векторного расслоения \mathfrak{f} .

Понятие алгеброида Ли $A(f)$ позволяет задать представление алгеброида Ли в векторном расслоении. А именно, под *представлением алгеброида Ли L в векторном пространстве \mathfrak{f}* (над одним и тем же многообразием) [12] (см. также [18]) будем понимать (строгий) гомоморфизм алгеброидов Ли

$$T: L \rightarrow A(f).$$

Эквивалентным образом его можно задать с помощью плоского L -ковариантного градиента $\nabla_\xi \sigma$, $\xi \in \text{Sec } L$, $\sigma \in \text{Sec } \mathfrak{f}$, в расслоении \mathfrak{f} , т.е. с помощью оператора, удовлетворяющего аксиоме Кошуля, с естественным отличием в том, что $\nabla_\xi f\sigma = f\nabla_\xi \sigma + \gamma(\xi)(f)\sigma$, $\gamma(\xi) \in \mathfrak{X}(M)$, есть анкер сечения ξ , а тензор кривизны R^∇ этого градиента $\nabla_\xi \sigma$ равен нулю, $R^\nabla(\xi_1, \xi_2) = \nabla_{[\xi_1, \xi_2]} - \llbracket \nabla_{\xi_1}, \nabla_{\xi_2} \rrbracket = 0$.

Любое представление $T: L \rightarrow A(f)$ индуцирует *внешнюю степень* $\bigwedge^k T: L \rightarrow A(\bigwedge^k \mathfrak{f})$, определяемую таким образом, что

$$\bigwedge^k T(\xi)(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k) = \sum_{i=1}^k \sigma_1 \wedge \cdots \wedge T(\xi)(\sigma_i) \wedge \cdots \wedge \sigma_k,$$

$\xi \in \text{Sec } L$, $\sigma_i \in \text{Sec } \mathfrak{f}$.

Рассмотрим представление $T: L \rightarrow A(f)$ алгеброида Ли L в векторном пространстве \mathfrak{f} . Сечение $\sigma \in \text{Sec } \mathfrak{f}$ называется *T -инвариантным*, если $T(\xi)(\sigma) = 0$ для всех $\xi \in \text{Sec } A$.

Пусть L – произвольный транзитивный алгеброид Ли. Существенную роль для него играет *присоединенное представление* $\text{ad}_L: L \rightarrow A(\mathfrak{g})$ алгеброида L в его присоединенном расслоении алгебр Ли $\mathfrak{g} = \ker \gamma$, задаваемое по формуле

$\text{ad}_L(\xi)(\nu) = \llbracket \xi, \nu \rrbracket$, $\xi \in \text{Sec } L$, $\nu \in \text{Sec } \mathfrak{g}$. В частности, получаются внешние n -степени $\bigwedge^n \text{ad}_L$ присоединенного представления, называемые *присоединенными представлениями алгеброида Ли L в расслоении $\bigwedge^n \mathfrak{g}$* .

Отсюда получается, что сечение ε расслоения $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ является $\bigwedge^n \text{ad}_L$ -инвариантным тогда и только тогда, когда в любом открытом подмножестве $U \subset M$, на котором ε имеет вид $\varepsilon_U = (h_1 \wedge \cdots \wedge h_n)_U$, $h_i \in \text{Sec } \mathfrak{g}$, для всех сечений $\xi \in \text{Sec } A$ имеет место равенство

$$\bigwedge^n \text{ad}_A(\xi)(\varepsilon)_U = \sum_{i=1}^n (h_1 \wedge \cdots \wedge \llbracket \xi, h_i \rrbracket \wedge \cdots \wedge h_n)_U = 0. \tag{1}$$

ПРИМЕР 4. АЛГЕБРОИД ЛИ $A(M, \mathcal{F})$ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ПОЛНОГО СЛОЕНИЯ (M, \mathcal{F}) СВЯЗНОГО ХАУСДОРФОВА ПАРАКОМПАКТНОГО МНОГООБРАЗИЯ M [5]. Напомним, что слоение (M, \mathcal{F}) называется *трансверсально полным* (ТС- для краткости), если в каждой точке $x \in M$ семейство $L_c(M, \mathcal{F})$ полных векторных полей, глобально совместимых со слоением \mathcal{F} (т.е. таких, динамическая система которых оставляет слоение инвариантным), порождает все касательное пространство $T_x M$. Дополнительно отметим, что

а) трансверсально полные слоения играют существенную роль в теории римановых слоений [6],

б) среди трансверсально полных слоений имеются такие, у которых алгеброиды Ли не интегрируемы. Этот факт, отмеченный в работе Р. Альмеида и П. Молино в 1985 году [17], оказался наиболее важным во всей теории алгеброидов Ли.

Первая структурная теорема Молино [6; теорема 4.2] утверждает, что замыкания слоев ТС-слоения \mathcal{F} образуют простое слоение \mathcal{F}_b , называемое *базисным*, и являются слоями некоторого локально тривиального базисного расслоения $\pi_b: M \rightarrow W$ на хаусдорфовом паркомпактном базисном многообразии W .

Рассмотрим трансверсальное расслоение $Q = TM/E$ ($E = T\mathcal{F}$) к слоению \mathcal{F} . Сечение ξ расслоения Q , представляемое векторным полем, совместимым со слоением, называется *трансверсальным полем*. Его значение в точке $x \in M$ единственным образом определяет значение в любой точке y слоя $(L_b)_x$ базисного слоения \mathcal{F}_b , проходящего через точку x . Трансверсальные поля играют роль, аналогичную правоинвариантным векторным полям на главных расслоениях. Факторизация $A(M, \mathcal{F}) = Q/\equiv$ расслоения Q с помощью отождествления значений трансверсальных полей в точке слоя \mathcal{F}_b (соответствующего правым трансляциям векторов, касательных к главному расслоению) имеет естественную структуру векторного расслоения над пространством W . Глобальные сечения пространства $A(M, \mathcal{F})$ соответствуют трансверсальным полям. Последние образуют алгебру Ли, так что и $\text{Sec } A(M, \mathcal{F})$ является алгеброй Ли. Вместе с гомоморфизмом $\gamma: A(M, \mathcal{F}) \rightarrow W$, определяемым с помощью расслоения $\pi_b: M \rightarrow W$, мы получаем некоторый транзитивный алгеброид Ли. Слоение (M, \mathcal{F}) на компактном многообразии называется *трансверсально параллелизуемым* (ТР- для краткости), если трансверсальное расслоение Q тривиально и обладает базисом трансверсальных полей. Очевидно, что ТР-слоения являются трансверсально полными.

ПРИМЕР 5. Алгеброид Ли $A(G; H)$ незамкнутой подгруппы Ли H группы G – это алгеброид Ли ТС-слоения $\mathcal{F}_{G, H} = \{aH; a \in G\}$ левых классов смежности группы Ли G по связной подгруппе Ли $H \subset G$ (если подгруппа H замкнута, то $A(G; H)$ тривиален, так что имеет смысл рассматривать только случай, когда подгруппа H незамкнута). Алгеброид $A(G; H)$ можно построить, не используя общей теории ТС-слоений [7], поскольку его тотальное пространство равно пространству орбит правого свободного действия $\bar{R}: Q \times \bar{H} \rightarrow Q$ замыкания \bar{H} подгруппы H на трансверсальном расслоении Q , которое для $t \in \bar{H}$, $\bar{R}_t: Q \rightarrow Q$ определяется как автоморфизм, задаваемый в виде дифференциала правой трансляции $R_t: TG \rightarrow TG$ с использованием инвариантности касательного к слоению пространства E при действии R_t . Сечение ξ расслоения Q является трансверсальным полем тогда и только тогда, когда сечение ξ инвариантно по отношению к действию \bar{R} . Поэтому отношение “ \equiv ” на расслоении Q , с помощью которого задается алгеброид $A(G; H)$, определяется по формуле $\bar{v} \equiv \bar{w} \Leftrightarrow \exists t \in \bar{H}, \bar{R}_t(\bar{v}) = \bar{w}$.

Напомним, что $A(G; H)$ является транзитивным алгеброидом Ли над однородным пространством G/\bar{H} с тривиальным присоединенным расслоением абелевых изотропных алгебр Ли $\mathfrak{g} \cong G/\bar{H} \times \bar{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ [18], [7]. При указанном отождествлении последовательность Атья имеет вид

$$0 \rightarrow G/\bar{H} \times \bar{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h} \rightarrow A(G, H) \rightarrow T(G/\bar{H}) \rightarrow 0,$$

а характеристический плоский ковариантный градиент совпадает со стандартным градиентом векторнозначных функций $\nabla_X = \partial_X$.

Следующие два примера дают интерпретацию алгебр когомологий алгеброидов Ли главных расслоений и ТС-слоений.

ПРИМЕРЫ. 1) Если $L = A(P) = TP/G$ для некоторого главного G -расслоения $P \rightarrow M$, то

$$\Omega_L(M) \cong \Omega^r(P) \hookrightarrow \Omega(P),$$

где $\Omega^r(P)$ есть пространство G -право инвариантных дифференциальных форм на P , а

$$H_L(M) \cong H(\Omega^r(P)) \overset{i}{=} H_{dR}(P).$$

Гомоморфизм i является изоморфизмом в случае, когда группа G связна и компактна.

2) Если $L = A(M; \mathcal{F}) \rightarrow W$ есть алгеброид Ли некоторого ТС-слоения \mathcal{F} на многообразии M с базовым многообразием W , то

$$\Omega_L(W) \cong \Omega(M; \mathcal{F}),$$

где $\Omega(M; \mathcal{F})$ есть алгебра \mathcal{F} -базовых дифференциальных форм, поэтому $H_L(W) \cong H(M; \mathcal{F})$ есть алгебра базовых когомологий [19].

1.3. Инвариантно ориентированные алгеброиды Ли и сигнатура. В дальнейшем нас будут интересовать транзитивные алгеброиды Ли, алгебра когомологий $H_L(M)$ которых снабжена двойственностью Пуанкаре [19]. TUIO-алгеброиды Ли [20] (т.е. транзитивные унимодулярные инвариантно ориентированные) являются примерами таких алгеброидов. Чтобы определить TUIO-алгеброид Ли, рассмотрим точную последовательность A тья $0 \rightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \rightarrow 0$ и предположим, что

A1) $m = \dim M, n = \text{rank } \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_x$, расслоение $\wedge^n \mathfrak{g}$ тривиально.

Пусть $\varepsilon \in \text{Sec } \wedge^n \mathfrak{g}$ есть некоторая ориентирующая форма расслоения \mathfrak{g} . Фундаментальную роль играет послойный интеграл [20]

$$\int_L : \Omega_L^*(M) \rightarrow \Omega_{dR}^{*-n}(M),$$

который определяется следующим образом: если $\deg \Phi < n$, то

$$\int_L \Phi = 0,$$

а если $k = \deg \Phi \geq n$, то

$$\left(\int_L \Phi \right)_x (w_1 \wedge \dots \wedge w_{k-n}) = (-1)^{n(k-n)} \Phi_x(\varepsilon_x \wedge \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_{k-n}),$$

где векторы $\tilde{w}_i \in L_x$ накрывают векторы $w_i, \gamma_L(\tilde{w}_i) = w_i$. Другими словами,

$$\gamma_L^* \left(\int_L \Phi \right) = (-1)^{n(k-n)} \iota_\varepsilon \Phi,$$

где ι_ε обозначает оператор подстановки $\iota_\varepsilon : \Omega_L^n(M) \rightarrow \Omega_L^{n-k}(M)$, определяемый по формуле

$$(\iota_\varepsilon \Phi)_x (v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-k}) = \Phi_x(\varepsilon_x \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-k}), \quad v_i \in A_x.$$

Оператор \int_L коммутирует с внешними дифференциалами d_L и d_M тогда и только тогда, когда (см. [20])

- а) изотропные алгебры Ли \mathfrak{g}_x являются унимодулярными, т.е. $H^n(\mathfrak{g}_x) = \mathbb{R}^1$,
- б) сечение ε инвариантно по отношению к присоединенному представлению алгеброида L на расслоении $\wedge^n \mathfrak{g}$, т.е. имеет место соотношение (1).

Алгеброид Ли L , удовлетворяющий условиям а) и б), называется TUIO-алгеброидом Ли. Послойный интегральный оператор $\int_L : \Omega_L^*(M) \rightarrow \Omega_{dR}^{*-n}(M)$ приводит к гомоморфизму в когомологиях

$$\int_L^\# : H_L^*(M) \rightarrow H_{dR}^{*-n}(M).$$

ПРИМЕРЫ. 1) Алгеброид Ли $A(P)$ главного G -расслоения $P \rightarrow M$ является TUIO-алгеброидом Ли в случае, когда G обладает свойством $\det(\text{Ad}_G a) = +1$, $a \in G$ [20], [19].

2) Алгеброид Ли $A(M; \mathcal{F})$ трансверсально параллелизуемого слоения на компактном односвязном связном многообразии является TUIO-алгеброидом Ли.

3) Алгеброид Ли $A(G; H)$ некоторой незамкнутой подгруппы Ли H в группе Ли G (т.е. алгеброид Ли соответствующего трансверсально полного слоения левых классов смежности подгруппы H в группе G) является TUIO-алгеброидом Ли. При этом присоединенное расслоение алгебр Ли этого алгеброида Ли $A(G; H)$ является тривиальным расслоением абелевых алгебр Ли [7].

Предположим, что многообразие M связно и ориентированно. Для дифференциальной формы ω размерности $m+n$ с компактным носителем из алгеброида L , $\omega \in \Omega_{L,c}^*(M)$, положим по определению

$$\int_L \omega := \int_M \left(\int_L \omega \right).$$

Таким образом определенный оператор \int_L задает эпиморфизм на кольце когомологий [7]

$$\int_L^\# : H_{L,c}(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Скалярное произведение Пуанкаре

$$H_L^*(M) \times H_{L,c}^{m+n-*}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \int_L^\# \alpha \wedge \beta,$$

является невырожденным, т.е.

$$H_L(M) \cong (H_{L,c}(M))^*.$$

Как следствие получаем, в частности, что

$$H_{L,c}^{m+n}(M) \cong \mathbb{R}.$$

Предположим теперь, что

A2) многообразие M является компактным связным ориентированным многообразием.

В этом случае когомологии с компактными носителями совпадают с обычными когомологиями, $H_{L,c}(M) = H_L(M)$, а скалярное произведение Пуанкаре является невырожденной формой на когомологиях:

$$\mathcal{D}_L^* : H_L^*(M) \times H_L^{m+n-*}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \int_L^\# \alpha \wedge \beta.$$

Если $m+n = 4k$, то квадратичная форма \mathcal{D}_L^{2k} симметрична и ее сигнатура (иногда называемая индексом) обозначается через $\text{Sign}_\varepsilon(L)$ (или кратко $\text{Sign}(L)$) и называется *сигнатурой алгеброида L* (знак $+$ или $-$ сигнатуры зависит от выбора инвариантной ориентации ε). В остальных случаях (т.е. когда $m+n \neq 0 \pmod{4}$) по определению полагаем $\text{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

ПРОБЛЕМА 1 (сформулированная в [19]). *Вычислить сигнатуру $\text{Sign}_\varepsilon(L)$ и найти условия, при которых эта сигнатура тривиальна, т.е.*

$$\text{Sign}_\varepsilon(L) = 0.$$

Заметим, что это равенство справедливо в следующих классических случаях:

- 1) $L = \mathfrak{g}$ является унимодулярной алгеброй Ли;
- 2) $L = A(P)$ является алгеброидом Ли главного расслоения с компактной структурной группой Ли над компактным ориентируемым многообразием.

Для изучения сигнатуры алгеброида L мы используем технику спектральных последовательностей комплекса Чеха–де Рама $K^{*,*}$ дифференциальных форм алгеброида L , аналогичного комплексу Чеха–де Рама для многообразия, и воспользуемся известными методами и утверждениями из работы [21].

Для этого напомним из этой работы главную теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $E \rightarrow B$ есть расслоенное пространство со слоем F , для которого выполнены следующие условия:*

- 1) *пространства E, B, F являются компактными связными ориентированными многообразиями;*
- 2) *фундаментальная группа базы $\pi_1(B)$ тривиально действует на кольце когомологий $H^*(F)$ слоя F .*

Тогда если многообразия E, B, F ориентированы согласованно, так что ориентация многообразия E индуцируется ориентациями на базе F и слое B , то индекс многообразия E равен произведению индексов многообразий F и B , т.е.

$$\text{Sign}(E) = \text{Sign}(F) \cdot \text{Sign}(B).$$

Авторы статьи рассматривают когомологическую спектральную последовательность $E_s^{p,q}$ расслоения $E \rightarrow B$ с коэффициентами в поле вещественных чисел. Согласно предположению 2) теоремы второй член E_2 спектральной последовательности образует биградуированную алгебру

$$E_2^{j,i} \cong H^j(B; H^i(F)) \cong H^j(B) \otimes H^i(F),$$

откуда

$$E_2^{j,i} = 0 \text{ при } j > m \text{ или } i > n.$$

Согласно предположению 1) теоремы второй член E_2 спектральной последовательности является алгеброй Пуанкаре. Поэтому, используя естественные свойства спектральных последовательностей, авторы замечают, что все члены спектральной последовательности

$$(E_s, d_s, \cdot), \quad s \geq 2,$$

тоже образуют алгебры Пуанкаре, дифференциалы которых удовлетворяют естественным свойствам для алгебр Пуанкаре. Следовательно, и бесконечный член

спектральной последовательности (E_∞, \cdot) является алгеброй Пуанкаре с той же сигнатурой

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } E_3 = \dots = \text{Sign } E_\infty.$$

В заключение доказывается, что $\text{Sign } E_\infty = \text{Sign } H(E)$. Отметим, что это – не тривиальное следствие, поскольку алгебры E_∞ и $H(E)$, вообще говоря, не изоморфны (хотя $E_\infty \cong H(E)$ как линейные пространства).

Мы воспользуемся изложением версии спектральной последовательности для расслоенных многообразий на языке комплексов Чеха–де Рама для так называемых хороших покрытий из [22] или [23] и обобщим ее на случай транзитивных алгеброидов Ли.

Построенный ниже двойной комплекс $K^{*,*}$ для произвольных транзитивных алгеброидов Ли в случае алгеброида Ли $A = A(M, \mathcal{F})$ над базовым многообразием W некоторого ТР-слоения (M, \mathcal{F}) совпадает с двойным комплексом из [24] (благодаря естественному изоморфизму дифференциальных градуированных алгебр $\Omega_L(W) \cong \Omega(M/\mathcal{F})$).

§ 2. Комплекс Чеха–де Рама транзитивного алгеброида Ли

Рассмотрим произвольный транзитивный алгеброид Ли L на многообразии M с изотропными алгебрами Ли \mathfrak{g}_x , которые изоморфны данной алгебре Ли \mathfrak{g} . Если открытое подмножество $U \subset M$ диффеоморфно евклидовому пространству \mathbb{R}^m , то ограничение L_U алгеброида L на подмножество U является тривиальным алгеброидом Ли, точнее, изоморфно тривиальному алгеброиду $TU \times \mathfrak{g}$. Эти изоморфизмы не являются естественными, поскольку зависят от выбора плоской связности на ограничении L_U . Обозначим для краткости алгебру когомологий $H_{L_U}(U)$ через $H_L(U)$. Согласно формуле Кюннета имеем (см. [19])

$$H_L(U) \cong H(U) \otimes H(\mathfrak{g}) \cong H(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим так называемое хорошее покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ многообразия M для счетного линейно упорядоченного множества индексов J . Это значит, что все множества покрытия U_α и все их непустые конечные пересечения $\bigcap_i U_{\alpha_i}$ диффеоморфны евклидовому пространству \mathbb{R}^m .

Образует двойной комплекс типа Чеха–де Рама

$$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) := \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega_L^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}),$$

$p, q \geq 0$, мультипликативная структура

$$\cup: K^{p,q} \times K^{r,s} \rightarrow K^{p+r, q+s}$$

которого задается по формуле

$$(\omega \cup \eta)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}} = (-1)^{qr} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}} \wedge \eta_{\alpha_{p+1} \dots \alpha_{p+r}} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}}.$$

Этот комплекс имеет два естественных граничных гомоморфизма: горизонтальный δ и вертикальный d .

Вертикальный гомоморфизм

$$d: C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^q) \rightarrow C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^{q+1})$$

действует как внешнее дифференцирование дифференциальных форм на алгеброиде L :

$$d = (-1)^p d_L.$$

Горизонтальный гомоморфизм

$$\delta: C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^q) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{M}, \Omega_L^q)$$

действует как кограничный оператор в коцепях покрытия

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} |U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}.$$

Как вертикальный гомоморфизм d , так и горизонтальный гомоморфизм δ являются антидифференцированиями степени $+1$ по отношению к суммарной градуировке,

$$d, \delta: K^{(r)} \rightarrow K^{(r+1)}, \quad K^{(r)} = \bigoplus_{p+q=r} K^{p,q},$$

$$d(\omega \cup \eta) = d\omega \cup \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \cup d\eta,$$

аналогичное свойство имеет место и для гомоморфизма δ . Поэтому набор

$$(K, K^{p,q}, \cup, d, \delta)$$

образует двойной комплекс первого квадранта с мультипликативной структурой.

Этот комплекс удобно представлять в виде диаграммы

$$C^*(\mathfrak{M}, \Omega_L^*) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\ C^0(\mathfrak{M}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{M}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\ C^0(\mathfrak{M}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{M}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\ C^0(\mathfrak{M}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{M}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{M}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & \dots \end{array} \right.$$

Суммарный оператор $D = d + \delta$ тоже является антидифференцированием. Комплекс дифференциальных форм алгеброида вкладывается в двойной комплекс K по формуле

$$r: \Omega_L^* \rightarrow K^{0,*} \subset K^{(*)}, \quad r(\omega)_\alpha = \omega|_{U_\alpha},$$

причем этот гомоморфизм является гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр.

В самом деле, оператор d коммутирует с гомоморфизмом r и выполняется условие $\delta \circ r = 0$. Значит, $r \circ D = D \circ r$. Следовательно, он порождает гомоморфизм когомологий

$$r^\#: H_L^*(M) \rightarrow H^{(*)}(K, D).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Последовательность Майера–Виеториса для транзитивного алгеброида Ли, т.е. аугментированная строка в двойном комплексе*

$$0 \longrightarrow \Omega_L^q(M) \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} \dots,$$

является точной.

Доказательство стандартно получается использованием разбиения единицы $\{\rho_\alpha\}$, подчиненного покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, и оператора цепной гомотопии

$$H: K^{p,q} \rightarrow K^{p-1,q}, \quad (H\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}},$$

для которого выполнено тождество

$$H\delta + \delta H = \text{Id}: K^{p,q} \rightarrow K^{p,q}, \quad p \geq 1.$$

Следующее утверждение является стандартным (см., например, [22]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если все строки аугментированного комплекса точны, то D -когомологии комплекса изоморфны когомологиям начального столбца.*

Из него мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. *Гомоморфизм $r^\#: H_L^*(M) \rightarrow H^{(*)}(K, D)$ является изоморфизмом градуированных алгебр когомологий.*

Рассмотрим “горизонтальную” фильтрацию

$$K_j = \bigoplus_{\substack{p \geq j \\ q \geq 0}} K^{p,q}.$$

Согласно общей конструкции спектральной последовательности (см., например, [25; 1.4.2], а также [26], [22]) для указанной фильтрации в соответствии с мультипликативной структурой DG-алгебры $(K, K^{(r)}, \cup, D, K_j)$ можно построить спектральную последовательность градуированных дифференциальных групп $(E_s^{p,q}, d_s)$,

$$d_s: E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s, q-s+1},$$

для которых

$$E_{s+1}^{p,q} = H(E_s^{p,q}, d_s),$$

причем группа $E_\infty^{p,q}$ присоединена к кольцу когомологий $H(K, D)$ по отношению к фильтрации, индуцированной фильтрацией $\{K_j\}$.

Фильтрация K_j является регулярной, $K_0 = K$, поэтому спектральная последовательность $(E_s^{p,q}, d_s)$ сходится к $H(K, D)$ (см. [26]). Более того, справедливо следующее:

- 1) все члены E_s , $0 \leq s \leq \infty$, являются градуированными алгебрами;
- 2) дифференциалы d_s являются антидифференцированиями по отношению к общей градуировке $(s, 1 - s)$;
- 3) естественные отождествления

$$\sigma_s: E_{s+1} \rightarrow H(E_s, d_s), \quad \sigma_\infty: E_\infty \rightarrow E_0(H(K, D))$$

являются изоморфизмами биградуированных алгебр; вообще говоря, алгебры $H(K, D)$ и E_∞ не изоморфны, хотя пространства $H(K, D) \cong E_\infty$ неканонически изоморфны.

Нулевой член спектральной последовательности $E_0^{p,q}$ задается по формуле

$$E_0^p = K_p/K_{p+1}, \quad E_0^{p,q} = K^{p,q}.$$

Тогда дифференциал

$$d_0: E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p,q+1}, \\ d_0: K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \longrightarrow K^{p,q+1} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^{q+1})$$

совпадает с d .

Первый член спектральной последовательности (E_s, d_s) выглядит следующим образом:

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(K, d) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q), \quad d_1 = \delta^\# : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q},$$

где

$$\mathcal{H}_L^* = (U \longmapsto H_L^*(U))$$

есть предпучок когомологий типа Лере, являющийся локально постоянным пучком на хорошем покрытии со значением в группе (точнее, в алгебре) $H^*(\mathfrak{g})$.

ТЕОРЕМА 6. *Второй член спектральной последовательности $E_s^{p,q}$ вычисляется по формуле*

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(H(K, D), \delta^\#) = H_{\delta^\#}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q).$$

Таким образом, из теоремы 6 и следствия 5 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7 (теорема Лере для транзитивных алгеброидов Ли). *Существует спектральная последовательность $E_s^{j,i}$, сходящаяся к когомологиям $H_L(M)$ алгеброида Ли L ,*

$$E_s^{j,i} \implies H_L(M)$$

такая, что $E_2^{j,i} = H_{\delta\#}^j(\mathfrak{A}, \mathcal{H}_L^i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сделаем несколько замечаний о пучке $\widetilde{\mathcal{H}}_L^*$, ассоциированном с предпучком \mathcal{H}_L^* ,

$$(\widetilde{\mathcal{H}}_L^*)(x) = \lim_{U \ni x} \text{ind } H_L^*(U).$$

Заметим, что расслоение $H(\mathfrak{g})$ когомологий изотропных алгебр Ли с типичным слоем $H(\mathfrak{g})$ обладает естественной локальной тривиализацией с локально постоянными функциями склейки. В самом деле, для любой окрестности $M \supset U \cong \mathbb{R}^m$ и любого изоморфизма алгеброидов Ли

$$\varphi_U : L_U \rightarrow TU \times \mathfrak{g}$$

получается локальная тривиализация

$$\widetilde{\varphi}_U : H(\mathfrak{g})_U \rightarrow U \times H(\mathfrak{g}),$$

определяемая по формуле

$$(\widetilde{\varphi}_U)_x = ((\varphi_{U_x}^+)^{-1})^\# : H(\mathfrak{g}_x) \rightarrow H(\mathfrak{g}),$$

где $\varphi_{U_x}^+ : \mathfrak{g}_x \rightarrow \mathfrak{g}$ – изоморфизм алгебр Ли, являющийся ограничением изоморфизма φ_U на ядро $\mathfrak{g}_x = \ker(\gamma_L)_x$ анкера γ_L .

Через \mathcal{A}_L обозначим множество так определенных локальных тривиализаций $\{\widetilde{\varphi}_U\}$ расслоения $H(\mathfrak{g})$.

Две локальных тривиализации φ_U и φ_V на окрестностях U и V соответственно дают гладкое семейство изоморфизмов алгебр Ли

$$\lambda_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \lambda_x = \varphi_{U_x}^+ \circ (\varphi_{V_x}^+)^{-1}, \quad x \in U \cap V.$$

Ясно, что функция склейки

$$x \longmapsto (\lambda_x)^\# : H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(\mathfrak{g})$$

является локально постоянной.

Действительно, для произвольных точек x и y , принадлежащих одной компоненте связности множества $U \cap V$, и для произвольного гладкого пути $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow U \cap V$, соединяющего эти точки, можно рассмотреть композицию гомоморфизмов алгеброидов Ли

$$T\mathbb{R} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha_* \times \text{id}} T(U \cap V) \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi_U \circ (\varphi_V)^{-1}} T(U \cap V) \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathfrak{g}.$$

Полученный таким путем нестрогий гомоморфизм алгеброидов Ли над отображением $\mathbb{R} \times \{*\} \rightarrow \{*\}$ является гомотопией между λ_x и λ_y . Следовательно, $\lambda_x^\# = \lambda_y^\#$ (см. ш. 1.1.5).

Все вышесказанное позволяет заменить топологию расслоения $H(\mathfrak{g})$ на топологию $H_d(\mathfrak{g})$ таким образом, чтобы слои стали дискретными и для любого вектора $v \in H(\mathfrak{g})$ и локальной тривиализации φ_U на карте $U \cong \mathbb{R}^m$ сечение $x \mapsto (\varphi_{U_x}^+)^{\#}(v)$ осуществляет гомеоморфизм карты на открытое подмножество в тотальном пространстве $H_d(\mathfrak{g})$.

Ясно, что расслоение $H_d(\mathfrak{g})$ порождает пучок. Другими словами, функции склейки являются функциями склейки со значениями в группе $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, в которой топология отличается от классической и определяется следующим образом. Рассмотрим любой автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебры \mathfrak{g} , и пусть $\varphi^\# : H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(\mathfrak{g})$ обозначает индуцированный автоморфизм в группе когомологий. Через $\text{Aut}_h(\mathfrak{g})$ обозначим стационарную подгруппу по отношению к действию в когомологиях, т.е. подгруппу всех таких автоморфизмов $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, что $\varphi^\# = \text{Id}$. Изменим топологию в группе $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ с помощью прибавления еще одного открытого множества, а именно подгруппы $\text{Aut}_h(\mathfrak{g})$. Через $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$ обозначим группу $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ с новой топологией. Ясно, что факторгруппа $\text{Aut}^s(\mathfrak{g}) / \text{Aut}_h(\mathfrak{g})$ дискретна и служит структурной группой расслоения $H_d(\mathfrak{g})$, соответствующей атласу алгеброида \mathcal{A}_L .

Покажем, что имеет место изоморфизм пучков

$$\rho: \widetilde{\mathcal{H}}_L \cong H_d(\mathfrak{g}),$$

который задается следующим образом: рассмотрим вложение расслоений $i: \mathfrak{g} \hookrightarrow L$, которое будем рассматривать как гомоморфизм алгеброидов Ли, где \mathfrak{g} есть вполне нетранзитивный алгеброид Ли с нулевым анкером.

Тогда для любого открытого множества U получаем гомоморфизм когомологий

$$i^\#: H_L(U) \longrightarrow H_{\mathfrak{g}}(U).$$

Пространство $H_L^*(U)$ вычисляется следующим образом. Если открытое множество из хорошего покрытия, т.е. $U \cong \mathbb{R}^m$, то алгеброид L_U изоморфен тривиальному алгеброиду $TM \oplus \mathfrak{g}$.

Значит [19], алгебра внешних L_U -дифференциальных форм изоморфна антикоммутативному тензорному произведению

$$\Omega_L(L_U) = \Omega(TM_U) \otimes \wedge(\mathfrak{g}^*),$$

дифференциал в котором равен $d_U \otimes \text{id} + \omega \otimes \delta_{\mathfrak{g}}$, где $\omega(\varphi) = (-1)^{\text{deg } \varphi} \varphi$, а $\delta_{\mathfrak{g}}$ есть дифференциал Эйленберга–Шевалле.

Следовательно, имеет место изоморфизм колец когомологий

$$H_L(U) = H(U) \otimes H(\mathfrak{g}) \cong H(\mathfrak{g}),$$

поскольку

$$H(U) \cong H^0(U) = \mathbb{R}.$$

Более того, элементы из $H^0(U)$ представляются постоянными на U функциями. Следовательно, каждый элемент $s \in H_L^*(U)$ представляется постоянным сечением в расслоении $U \oplus H^*(\mathfrak{g})$. Поэтому образ гомоморфизма $\iota^\#$ состоит из постоянных сечений расслоения $H_{\mathfrak{g}}(U)$ т.е. из непрерывных сечений пучка $H_d(\mathfrak{g})$.

Другими словами, гомоморфизм ρ , задаваемый по формуле

$$\widetilde{\mathcal{H}}_L(x) = \lim_{U \ni x} \text{ind } H_L(U) \xrightarrow{\rho_x^\#} H(\mathfrak{g}_x), \quad [s] \longmapsto [\rho_x^\# s],$$

является изоморфизмом, где $\rho_x: \mathfrak{g}_x \hookrightarrow L$ есть гомоморфизм алгеброидов Ли над вложением точки x в многообразие M , $\iota: \{x\} \hookrightarrow M$.

Приведем пример, в котором расслоение алгебр Ли \mathfrak{g} тривиально по отношению к структурной группе $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$. Предположим, что изотропные алгебры Ли \mathfrak{g}_x абелевы, а расслоение алгебр Ли \mathfrak{g} тривиально в обычном смысле, т.е. $\mathfrak{g} \cong M \times \mathfrak{g}$. Тогда расслоение \mathfrak{g} тривиально и по отношению к группе $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$ или, эквивалентно, пучок $\widetilde{\mathcal{H}}_L \cong H_d(\mathfrak{g})$ является глобально постоянным, т.е. в частности, пучок $\widetilde{\mathcal{H}}_L$ имеет тривиальную монодромию, если характеристический ковариантный градиент в расслоении $M \times \mathfrak{g}$ является стандартным градиентом векторнозначных функций $\nabla_X = \partial_X$. Примером алгеброидов Ли такого типа является алгеброид $A(G; H)$ незамкнутой подгруппы H в группе G [8].

Действительно, последовательность Атья для алгеброида A имеет вид $0 \rightarrow M \times \mathfrak{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \rightarrow 0$. Тогда, выбирая локально плоские связности $\lambda: TU \rightarrow A_U$, можно определить локальные тривиализации $\varphi_U: L_U \rightarrow TU \times \mathfrak{g}$ по формуле $(\varphi_U)^{-1}(X, \sigma) = \lambda(X) + \sigma$. Тогда $(\varphi_U)^+ = \text{id}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, откуда следует, что определенный выше податлас A_L задает локальную тривиализацию в расслоении $H_d(\mathfrak{g})$ с тривиальной структурной группой $\{\text{id}\}$. Поэтому $\mathcal{H}_L \cong M \times H(\mathfrak{g})_d$, где $H(\mathfrak{g})_d$ есть векторное пространство с дискретной топологией.

§3. Сигнатура транзитивного алгеброида с тривиальной монодромией

Мы будем предполагать, что

A3) предпучок \mathcal{H}_L^* является постоянным на некотором хорошем покрытии \mathfrak{U} , т.е. для каждого открытого подмножества $U \in \text{Open}_{\mathfrak{U}}(M)$ (подкатегории конечных пересечений $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ открытых множеств из \mathfrak{U}) существует такой изоморфизм алгебр

$$\varphi_U: H_L(U) \cong H(\mathfrak{g}),$$

что все композиции вида $\varphi_V \rho_V^U \varphi_U^{-1}$ равны тождественному отображению алгебры $H(\mathfrak{g})$, где $\rho_V^U: H_L(U) \rightarrow H_L(V)$ ($V \subset U$, $V, U \in \text{Open}_{\mathfrak{U}}(M)$) есть оператор ограничения в предпучке. Другими словами, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H_L(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & H(\mathfrak{g}) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \text{Id} \\ H_L(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & H(\mathfrak{g}) \end{array} .$$

Условие А3) эквивалентно

А3') представление монодромии предпучка \mathcal{H}_L^* фундаментальной группы

$$\rho: \pi_1(M) = \pi_1(N(\mathfrak{U})) \rightarrow \text{Aut}(H(\mathfrak{g}))$$

является тривиальным.

Совершенно ясно, что как условие А3), так и условие А3') можно эквивалентно переформулировать как тривиальность представления монодромии фундаментальной группы многообразия M для присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли, т.е. ядра анкера $\mathfrak{g} := \ker \gamma_L$.

ПРИМЕРЫ. Условие тривиальности монодромии выполняется в следующих случаях:

- 1) многообразии M односвязно ($\pi_1(N(\mathfrak{U})) = \pi_1(M) = 0$, поэтому $\rho = 0$);
- 2) присоединенное расслоение изотропных алгебр Ли \mathfrak{g} тривиально по отношению к каноническому атласу локальных тривиализаций \mathcal{A}_L и структурной группе $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$ (см. замечание 1);
- 3) $\text{Aut}(G) = \text{Int}(G)$, где G есть односвязная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g}_x .

Таким образом, из теоремы Лере следует, что

$$E_2^{j,i} = H_{\delta\#}^j(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^i) \cong H^j(\mathfrak{U}, H^i(\mathfrak{g})) \cong H^j(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \otimes H^i(\mathfrak{g}) \cong H_{dR}^j(M) \otimes H^i(\mathfrak{g}).$$

Все изоморфизмы являются каноническими изоморфизмами биградуированных алгебр. В частности, это значит, что член E_2 находится в прямоугольнике $j \leq m$, $i \leq n$ и

$$E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n} = H_{dR}^m(M) \otimes H^n(\mathfrak{g}).$$

В соответствии с условиями А1) и А2), а также условием

А4) изотропная алгебра Ли \mathfrak{g} унимодулярна, т.е. $\dim H^n(\mathfrak{g}) = 1$,

получаем, что справедливо следующее:

- 1) $\dim E_2^{(m+n)} = \dim H^m(M) \cdot \dim H^n(\mathfrak{g}) = 1$;
- 2) член $E_2 = H_{dR}(M) \otimes H(\mathfrak{g})$ является алгеброй Пуанкаре по отношению к суммарной градуировке, причем максимальная группа равна $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Напомним (см. [21]), что градуированная конечномерная алгебра

$$\left(A = \bigoplus_{0 \leq r < \infty} A^r, \cup \right)$$

называется *алгеброй Пуанкаре*, если

- 1) существует такой номер n_0 , что $A^r = 0$ при $r > n_0$ и $\dim A^{n_0} = 1$;
- 2) $x \cup y = (-1)^{ij} y \cup x$, если $x \in A^i$, $y \in A^j$, т.е. алгебра (A, \cup) является антикоммутативной;
- 3) пусть $0 \neq \xi \in A^{n_0}$ есть базисный элемент в A^{n_0} , тогда билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: A^r \times A^{n_0-r} \rightarrow \mathbb{R}$$

относительно ξ (т.е. задаваемая по формуле $\langle x, y \rangle \xi = x \cup y$) невырождена.

Тогда имеют место изоморфизмы $A^r \cong (A^{n_0-r})^*$ и равенства $\dim A^r = \dim A^{n_0-r}$. Ключевым для дальнейшего анализа служит понятие так называемого *дифференцирования Пуанкаре*, т.е. такого линейного гомоморфизма $d: A \rightarrow A$, который удовлетворяет условиям:

- 1) $d^2 = 0$;
- 2) $d[A^r] \subset A^{r+1}$;
- 3) d является антидифференцированием;
- 4) $d[A^{n_0-1}] = 0$.

По аналогии с сигнатурой ориентированного многообразия назовем *сигнатурой алгебры Пуанкаре* $(A = \bigoplus A^r, \cup)$ относительно $0 \neq \xi \in A^{n_0}$. Мы полагаем, что сигнатура равна нулю в случае $n_0 \neq 0 \pmod{4}$. В случае же $n_0 = 4k$ сигнатура $\text{Sign } A$ определяется как сигнатура билинейной невырожденной симметрической формы $\langle \cdot, \cdot \rangle: A^{2k} \times A^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$, определенной относительно элемента ξ .

Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 8 [21]. *Если дифференциальная градуированная алгебра (A^*, \cup, d) является алгеброй Пуанкаре, дифференциал которой является дифференциалом Пуанкаре, то ее градуированная алгебра когомологий $(H^*(A), \cup)$ является алгеброй Пуанкаре относительно того же элемента $0 \neq \xi \in A^{n_0} = H^{n_0}(A, d)$ и выполнено равенство*

$$\text{Sign } A = \text{Sign } H(A).$$

ПРИМЕРЫ. 1) Пусть E есть произвольное конечномерное векторное пространство. Тогда внешняя алгебра $(\wedge E, \wedge)$ является алгеброй Пуанкаре с нулевой сигнатурой.

2) Пусть \mathfrak{g} есть произвольная вещественная алгебра Ли. Тогда внешняя алгебра

$$(\wedge \mathfrak{g}^*, \wedge, \delta_{\mathfrak{g}})$$

с дифференциалом Шевалле–Эйленберга $\delta_{\mathfrak{g}}$ является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре тогда и только тогда, когда исходная алгебра Ли \mathfrak{g} унимодулярна. Из приведенной выше леммы следует, что если алгебра Ли \mathfrak{g} унимодулярна, то ее алгебра когомологий $H(\mathfrak{g})$ тоже является алгеброй Пуанкаре, причем

$$\text{Sign } H(\mathfrak{g}) = \text{Sign } \wedge \mathfrak{g}^* = 0.$$

Если L есть транзитивный алгеброид Ли над компактным ориентированным многообразием M , у которого изотропная алгебра Ли унимодулярна, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли тривиальна, то для хорошего покрытия второй член E_2 спектральной последовательности является алгеброй Пуанкаре, которая находится в квадранте $j \leq m, i \leq n$ с максимальной группой $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Мы хотим сравнить сигнатуру члена E_2 с сигнатурой алгеброида Ли L при условии, что алгеброид Ли L является ТУЮ-алгеброидом. Аргументация Чжэня–Хирцебруха–Серра [21] является чисто алгебраической и приводит к следующим общим теоремам.

ТЕОРЕМА 9. Пусть (A, A^r, \cup, D, A_j) есть произвольная дифференциальная градуированная алгебра с убывающей фильтрацией A_j , и пусть $(E_s^{j,i}, d_s)$ есть ее спектральная последовательность. Предположим, что существуют такие натуральные числа m и n , что

- 1) $E_2^{j,i} = 0$ при $j > m$ и $i > n$;
- 2) E_2 есть алгебра Пуанкаре относительно суммарной градуировки с максимальной группой $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Тогда каждый член $(E_s^{(*)}, \cup, d_s)$, $2 \leq s < \infty$, является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре. Бесконечный член $(E_\infty^{(*)}, \cup)$ тоже является алгеброй Пуанкаре, причем

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } E_3 = \dots = \text{Sign } E_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что все члены $E_3, E_4, \dots, E_\infty$ находятся в том же самом квадранте $j \leq m, i \leq n$. Воспользуемся следующим свойством спектральных последовательностей [26]: если $E_s^{j,i} = 0$ для некоторых значений s, j, i , то $0 = E_s^{j,i} = E_{s+1}^{j,i} = \dots = E_\infty^{j,i}$. По соображениям биградуировки ($d_2: E_2^{j,i} \rightarrow E_2^{j+2, i-1}$) получаем, что

$$d_2[E_2^{(m+n-1)}] = 0$$

(см. рис. 1). Поэтому $E_2^{(m+n)} = E_3^{(m+n)} = \dots = E_\infty^{(m+n)}$, т.е. $E_2^{m,n} = E_3^{m,n} = \dots = E_\infty^{m,n}$.

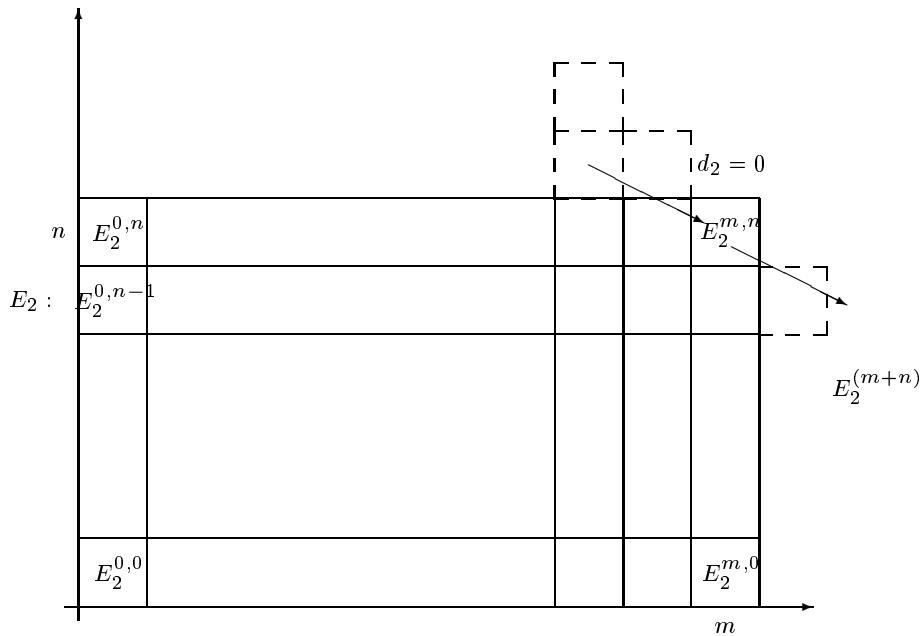


Рис. 1

Таким образом, начинаем с предположения, что член (E_2, \cup, d_2) является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре. По лемме 8 получаем, что $E_3 = H(E_2, d_2)$ является алгеброй Пуанкаре, и относительно того же самого элемента $0 \neq \xi \in E_3^{m,n} = E_2^{m,n}$ получаем равенство

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } E_3.$$

Те же аргументы приводят к выводу, что оператор d_3 тоже является дифференцированием Пуанкаре и $\text{Sign } E_3 = \text{Sign } E_4$. И т. д., в результате получаем равенства

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } E_3 = \text{Sign } E_4 = \dots$$

Поскольку член E_2 лежит в конечном квадранте, спектральная последовательность E_s вырождается в некотором члене E_{s_0} благодаря биградуированным свойствам дифференциала d_s . Значит, для $s > \max\{s_0, n\}$ получаем $E_s^{(r)} \cong E_\infty^{(r)}$, откуда следует, что бесконечный член (E_∞, \cup) является алгеброй Пуанкаре и $\text{Sign } E_{s_0} = \text{Sign } E_\infty$. В итоге

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } E_3 = \dots = \text{Sign } E_\infty.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 10. *Если L есть транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном многообразии M , у которого изотропные алгебры Ли $\mathfrak{g}_x \cong \mathfrak{g}$ унимодулярны, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения \mathfrak{g} изотропных алгебр Ли тривиальна, то члены спектральной последовательности E_2, \dots, E_∞ являются алгебрами Пуанкаре и*

$$0 = \text{Sign } M \cdot \text{Sign } \mathfrak{g} = \text{Sign } E_2 = \dots = \text{Sign } E_\infty.$$

Осталось доказать равенство $\text{Sign } E_\infty = \text{Sign } H_L(M)$. Используя аргументацию упомянутой ранее оригинальной работы Чженя–Хирцебруха–Серра, получаем следующую общую теорему.

Пусть (A, A^r, \cup, D, A_j) – произвольная дифференциальная градуированная алгебра с убывающей фильтрацией с условием регулярности $A_0 = A$,

$$A = A_0 \supset \dots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \dots,$$

согласованной со структурой DG-алгебры, т. е.

$$A_i A_j \subset A_{i+j}, \quad D(A_j) \subset A_j, \quad A_j = \bigoplus_r (A^r \cap A_j).$$

Пусть $(E_s^{j,i}, d_s)$ – спектральная последовательность, соответствующая этой фильтрации. Допустим также, что

- 1) бесконечный член $E_\infty^{p,q}$ целиком содержится в прямоугольнике $0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$;
- 2) $\dim E_\infty^{m,n} = 1$;
- 3) E_∞ является алгеброй Пуанкаре по отношению к тотальной градуировке.

В частности, размерность $\dim E_\infty$ конечна.

ТЕОРЕМА 11. При выполнении сформулированных условий на алгебру A гомологии алгебры удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{m,n}$ т.е. $\dim H^{m+n}(A) = 1$;
- 2) алгебра $H(A) = \bigoplus_{r=0}^{m+n} H^r(A)$ является алгеброй Пуанкаре;
- 3) сигнатура гомологий алгебры совпадает с сигнатурой бесконечного члена спектральной последовательности

$$\text{Sign } E_\infty = \text{Sign } H(A)$$

при подходящем выборе образующих в верхней группе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это очевидно, поскольку $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{(m+n)} \cong E_\infty^{m,n}$ и по предположению $\dim E_\infty^{m,n} = 1$.

2) Положим $A^{j,i} = A^{j+i} \cap A_j$. Алгебра $H(A)$ имеет градуированную фильтрацию $H^{j,i}(A) = \pi[Z \cap A^{j,i}]$, $H^{0,i}(A) = H^i(A)$, где Z есть ядро дифференциала D , а π есть гомоморфизм факторизации по модулю образа дифференциала D . Ассоциированное с этой фильтрацией пространство $E_0(H(A))$ имеет биградуировку

$$E_0^{j,i}(H(A)) \cong H^{j,i}(A) / H^{j+1,i-1}(A).$$

Рассмотрим убывающую фильтрацию

$$H^r(A) = H^{0,r}(A) \supset H^{1,r-1}(A) \supset \dots \supset H^{r,0} \supset 0, \tag{2}$$

ее часть для $0 \leq j \leq r$

$$H^{j,r-j} \supset H^{j+1,r-j-1} \supset \dots \supset H^{r-1,1} \supset H^{r,0} \supset 0$$

и ассоциированные (неканонические) изоморфизмы пространств

$$H^{j,r-j} \cong E_0^{j,r-j} \oplus E_0^{j+1,r-j-1} \oplus \dots \oplus E_0^{r,0}, \quad E_0^{r,0} = H^{r,0}, \tag{3}$$

совместимые друг с другом для каждого j .

Биградуированные пространства $H(A, D)$, $E_0(H(A))$ и E_∞ имеют естественную структуру биградуированных алгебр, причем существует изоморфизм

$$\sigma_\infty: E_\infty \rightarrow E_0(H(A))$$

биградуированных алгебр, единственным образом задаваемый условием, что коммутует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Z \cap A^{j,i} & \twoheadrightarrow & H^{j,i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty^{j,i} & \xrightarrow{\sigma_\infty^{j,i}} & E_0^{j,i}(H(A)) = H^{j,i}(A) / H^{j+1,i-1}(A). \end{array} \tag{4}$$

Поэтому если $x \in H^{j,i}(A)$, $y \in H^{j',i'}(A)$ и $\sigma_\infty^{j,i}(\bar{x}) = [x]$, $\sigma_\infty^{j',i'}(\bar{y}) = [y]$, то

$$\sigma_\infty(\bar{x} \cup \bar{y}) = [x] \cup [y] = [x \cup y]. \tag{5}$$

Поскольку гомоморфизм σ_∞ является градуированным изоморфизмом, пространства $E_0^{j,i}(H(A))$ находятся в том же самом прямоугольнике $j \leq m, i \leq n$, т.е.

$$E_0^{j,i}(H(A)) = 0 \quad \text{при } j > m \text{ или } i > n, \quad (6)$$

причем

$$\dim E_0^{m,n}(H(A)) = 1.$$

Согласно разложению (3) имеют место равенства

$$H^{j,i}(A) = 0, \quad j > m. \quad (7)$$

В частности, из (7) следует, что

$$E_0^{m,n}(H(A)) = H^{m,n}(A)/H^{m+1,n-1} = H^{m,n}(A) = H^{m+n}(A).$$

Последнее равенство вытекает из разложения (3), равенств $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{m+n} = E_\infty^{m,n} \cong E_0^{m,n}$ и размерностных соображений

$$1 = \dim H^{m+n}(A) = \dim E_0^{m,n}(H(A)) = \dim H^{m,n}(A).$$

Поэтому

$$H^{m+n}(A) = H^{0,m+n}(A) = H^{1,m+n-1}(A) = \dots = H^{m,n}(A)$$

и

$$H^{m+n-i,i}(A) = 0, \quad i < n. \quad (8)$$

В случае, когда $j = m$ и $i = n$, в диаграмме (4) правый вертикальный изоморфизм является тождеством

$$\begin{array}{ccc} Z \cap A^{m,n} & \longrightarrow & H^{m,n}(A) \\ \downarrow & & \parallel \\ E_\infty^{m,n} & \xrightarrow[\cong]{\sigma_\infty^{m,n}} & H^{m,n}(A). \end{array}$$

Следовательно, по свойству (5) получаем: если $x \in H^{j,i}(A)$, $y \in H^{j',i'}(A)$, $j + j' = m$, $i + i' = n$ и $\sigma_\infty^{j,i}(\bar{x}) = [x]$, $\sigma_\infty^{j',i'}(\bar{y}) = [y]$, то

$$\sigma_\infty(\bar{x} \cup \bar{y}) = x \cup y. \quad (9)$$

Используя изоморфизм $\sigma_\infty^{m,n}: E_\infty^{m,n} \rightarrow H^{m,n}(A)$, определим ненулевые образующие ξ и ξ' таким образом, чтобы

$$0 \neq \xi \in E_\infty^{m,n}, \quad 0 \neq \xi' = \sigma_\infty^{m,n}(\xi) \in H^{m,n}(A) = H^{m+n}(A).$$

По отношению к образующим ξ и ξ' рассмотрим симметрические билинейные формы

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\infty &: E_\infty^{(j)} \times E_\infty^{(m+n-j)} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_A &: H^j(A) \times H^{m+n-j}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

т.е. такие формы, что $\langle x, y \rangle_\infty \xi = x \cup y$ для первой формы и аналогично для второй. Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ невырождена по предположению. Докажем, что невырождена и форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Размерность $\dim H^r(A)$ конечна, поскольку

$$H^r(A) \cong E_0^{(r)}(H(A)) \cong E_\infty^{(r)},$$

а пространство E_∞ конечномерно. Поэтому нам нужно проверить, что если $x \in H^j(A)$, $x \neq 0$, то существует такой элемент $y \in H^{m+n-j}(A)$, что $\langle x, y \rangle_A \neq 0$. Элемент x принадлежит к минимальному члену фильтрации (2):

$$x \in H^{p,j-p}(A), \quad x \notin H^{p+1,j-p-1}(A),$$

значит, $[x] \in E_0^{p,j-p}$, $[x] \neq 0$. Выберем такой элемент $\bar{x} \in E_\infty^{p,j-p}$, что $\sigma_\infty^{p,j-p}(\bar{x}) = [x]$. В силу невырожденности формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ можно найти такой элемент $y \in H^{m-p,n-j-p}$, что $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_\infty \neq 0$, где $\bar{y} \in E_\infty^{m-p,n-j-p}$ и $\sigma_\infty^{m-p,n-j-p}(\bar{y}) = [y]$. В силу (9) имеем $x \cup y = \sigma_\infty(\bar{x} \cup \bar{y})$, следовательно, $\langle x, y \rangle_A = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_\infty \neq 0$, что доказывает невырожденность формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Таким образом, алгебра $H(A)$ является алгеброй Пуанкаре.

3) Будем теперь предполагать, что $m + n = 4k$ (в обратном случае сигнатуры по определению равны нулю). По отношению к образующим ξ и ξ' рассмотрим симметрические билинейные формы

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\infty &: E_\infty^{(2k)} \times E_\infty^{(2k)} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_A &: H^{2k}(A) \times H^{2k}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

т.е. такие формы, для которых выполнено условие $\langle x, y \rangle_\infty \xi = x \cup y$ в случае первой формы и алогичное условие в случае второй. Пространство $H^{2k}(A)$ имеет убывающую фильтрацию (2), и согласно (3) и (6) получаем

$$H^{2k-n,n}(A) = H^{2k-s,s}(A), \quad s \geq n.$$

Мы должны рассмотреть два случая: $m \geq n$ и $m \leq n$. В случае $m \geq n$ получаем $2k - n = (n + m)/2 - n = (m - n)/2 \geq 0$.

Поэтому

$$H^{2k}(A) = H^{2k-n,n}(A) \supset H^{2k-n+1,n-1} \supset \dots \supset H^{2k,0} \supset 0,$$

причем

$$H^{2k-q,q}(A)/H^{2k-q+1,q-1}(A) \stackrel{\sigma_\infty}{\cong} E_\infty^{2k-q,q}, \quad q = 0, \dots, n.$$

Выберем подпространства V_0, \dots, V_n , $H_q \subset H^{2k-q,q}$ таким образом, чтобы выполнялись разложения:

$$H^{2k-q,q}(A) = V_q \oplus H^{2k-q+1,q-1}(A).$$

Ясно, что

$$V_0 = H^{2k,0}, \quad H^{2k} = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_n, \quad E_\infty^{2k-q,q} \cong V_q. \quad (10)$$

Если $x \in V_i$ и $y \in V_j$, $i+j < n$, то $x \cup y \in H^{4k-i-j, i+j}(A) = 0$ согласно условию (8). Если $i+j = n$, а элементы $\bar{x} \in E_\infty^{2k-i, i}$, $\bar{y} \in E_\infty^{2k-j, j}$ представляют элементы x и y в силу изоморфизма σ_∞ , то согласно (9) получаем равенства

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_\infty = \langle x, y \rangle_A.$$

Поскольку алгебра E_∞ является алгеброй Пуанкаре, то

$$\dim E_\infty^{2k-i, i} = \dim E_\infty^{2k-n+i, n-i}$$

и в случае $\dim E_\infty^{2k-i, i} > 0$ билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty : E_\infty^{2k-i, i} \times E_\infty^{2k-n+i, n-i} \rightarrow \mathbb{R}$$

невырождена.

Это значит, что матрица билинейной симметрической формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : H^{2k}(A) \times H^{2k}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ может быть представлена в виде блочной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_0 \\ 0 & \dots & L_1 & * \\ \vdots & / & \vdots & \vdots \\ L_n & \dots & * & * \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где L_i обозначают невырожденные квадратные матрицы, причем матрица L_i — транспонированная к матрице L_{n-i} . Более того, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_0 \\ 0 & \dots & L_1 & 0 \\ \vdots & / & \vdots & \vdots \\ L_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

составленная на антидиагонали из тех же блоков, что и предыдущая матрица, и нулей на оставшихся местах, служит матрицей формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ на пространстве $E_\infty^{(2k)}$.

Если некоторые из пространств V_q нульмерны, мы должны изменить матрицы (11) и (12) с помощью вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нульмерным пространствам, и повторить все аргументы.

В случае $m \leq n$ дословно повторяются аргументы рассмотренного случая с условием вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нульмерным пространствам в разложении (10). Аналогичные аргументы показывают, что билинейная форма в когомологиях невырождена во всех размерностях. Очевидно (см. [21; лемма 1]), что выполняется равенство $\text{Sign } E_\infty = \text{Sign } H(A)$.

Дополнительно можно утверждать благодаря той же лемме 1 в [21], что сигнатура $\text{Sign } H(A)$ равна 0, если n нечетно, и равна $\text{Sign } L_{n/2}$ для четного n .

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть (A, A^r, \cup, D, A_j) – произвольная дифференциальная градуированная алгебра (DG-алгебра) с убывающей фильтрацией A_j с условием регулярности $A_0 = A$, и пусть $(E_s^{j,i}, d_s)$ – ее спектральная последовательность. Пусть существуют такие натуральные числа m и n , что выполнены условия

- 1) $E_2^{j,i} = 0$ для $j > m$ и $i > n$;
- 2) алгебра E_2 является алгеброй Пуанкаре по отношению к глобальной градуировке и верхней группе $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Тогда $H(A) = \bigoplus_{r=0}^{m+n} H^r(A)$ есть алгебра Пуанкаре, $\dim H^{m+n}(A) = 1$ и

$$\text{Sign } E_2 = \text{Sign } H(A).$$

Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 13 (теорема Черна–Хирцебруха–Серра для транзитивных алгеброидов Ли). Пусть L – произвольный транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропные алгебры Ли $\mathfrak{g}_x \cong \mathfrak{g}$ унимодулярны, а монодромия тривиальна, т.е. предпучок \mathcal{H}_L^* когомологий алгебры Ли \mathfrak{g} постоянен на некотором хорошем покрытии. Тогда алгебра когомологий $H_L(M)$ является алгеброй Пуанкаре и

$$\text{Sign } L = \text{Sign } E_2 = \text{Sign } M \cdot \text{Sign } \mathfrak{g} = 0.$$

Имеется много транзитивных инвариантно ориентированных алгеброидов Ли, у которых изотропные алгебры Ли унимодулярны, а монодромия тривиальна. В частности, теорема 13 выполняется в следующих случаях:

- 1) многообразии M является односвязным, например, если $A = A(M; \mathcal{F})$ является алгеброидом Ли некоторого ТР-слоения на компактном односвязном многообразии;
- 2) $\text{Aut } G = \text{Int } G$, где G есть односвязная группа Ли, ассоциированная с алгеброй Ли \mathfrak{g} , например, если \mathfrak{g} есть простая алгебра одного из типов $B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2$ (см. [27; добавление Д.8]);
- 3) присоединенное расслоение алгебр Ли \mathfrak{g} тривиально по отношению к структурной группе $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$, например, когда алгеброид Ли $A(G; H)$ есть алгеброид Ли трансверсально полного слоения левых классов смежности незамкнутой подгруппы Ли H в произвольной группе Ли G (см. пример в конце §2).

Список литературы

1. Pradines J. Théorie de Lie pour les groupoides différentiables // Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28–30, IX, 1967). Bologna: Monograf, 1969. P. 1–4.
2. Kubarski J. Lie algebroid of a principal fibre bundle. Lyon: Univ. Claude-Bernard, 1989.
3. Libermann P. Sur les prolongements des fibres principaux et les groupoides différentiables // Seminaire de Mathématiques supérieures - été, Montreal, 1969 (Analyse Globale). Montreal: Univ. Montreal, 1971. P. 1–70.
4. Kubarski J. Bott's vanishing theorem for regular Lie algebroids // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №6. P. 2151–2167.

5. *Molino P.* Etude des feuilletages transversalement complets et applications // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1977. V. 10. №3. P. 289–307.
6. *Molino P.* Riemannian foliations. Boston, MA: Birkhäuser, 1988. (Progr. Math. V. 73.)
7. *Kubarski J.* A criterion for the minimal closedness of the Lie subalgebra corresponding to a connected nonclosed Lie subgroup // Rev. Mat. Complut. 1991. V. 4. №2/3. P. 159–176.
8. *Coste A., Dazord P., Weinstein A.* Groupoides symplectiques. Lyon: Univ. Claude-Bernard, 1987.
9. *Herz J. C.* Pseudo-algèbres de Lie. I, II // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1953. V. 263. P. 1935–1937; 2289–2291.
10. *Huebschmann J.* Poisson cohomology and quantization // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 408. P. 57–113.
11. *Balcerzak B., Kubarski J., Walas W.* Primary characteristic homomorphism of pairs of Lie algebroids and Mackenzie algebroid // Lie algebroids and related topics in differential geometry. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2001. P. 71–97. (Banach Center Publ. V. 54.)
12. *Mackenzie K.* Lie groupoides and Lie algebroids in differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 124.)
13. *Kubarski J.* Weil algebra and secondary characteristic homomorphism of regular Lie algebroids // Lie algebroids and related topics in differential geometry. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2001. P. 135–173. (Banach Center Publ. V. 54.)
14. *Kubarski J.* Invariant cohomology of regular Lie algebroids // Proceedings of the VII International Colloquium on Differential Geometry (Spain 26–30 July, 1994). Singapore: World Scientific, 1995. P. 137–151.
15. *Maxim-Raileanu L.* Cohomology of Lie algebroids // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.). 1976. V. 22. №2. P. 197–199.
16. *Atiyah M.* Complex analytic connections in fibre bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 85. №1. P. 181–207.
17. *Almeida R., Molino P.* Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1985. V. 300. P. 13–15.
18. *Kubarski J.* The Chern–Weil homomorphism of regular Lie algebroids. Lyon: Univ. Claude-Bernard 1991.
19. *Kubarski J.* Poincaré duality for transitive unimodular invariantly oriented Lie algebroids // Topology Appl. 2002. V. 121. P. 333–355.
20. *Kubarski J.* Fibre integral in regular Lie algebroids // New Developments in Differential Geometry, Budapest. 1996. Proceedings of the Conference on Differential Geometry (Budapest, Hungary, July 27–30, 1996). New York: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 173–202.
21. *Chern S. S., Hirzebruch F., Serre J.-P.* On the index of a fibered manifold // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 587–596.
22. *Bott R., Tu L. W.* Differential forms in algebraic topology. New York: Springer-Verlag, 1982. (Geom. Topol. Monogr. V. 82.)
23. *Dupont J. L.* Curvature and characteristic classes. New York: Springer-Verlag, 1978. (Lecture Notes in Math. V. 640.)
24. *Aziz El Kacimi-Alouni, Sregiescu V., Hector G.* La cohomologie basique d'un feuilletage Riemannien est de dimension finie // Math. Z. 1985. V. 188. P. 593–599.
25. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
26. *Greub W., Halperin S., Vanstone R.* Connections, curvature, and cohomology. V. III. New York: Acad. Press, 1976.
27. *Humphreys J. E.* Linear algebraic groups. New York: Springer-Verlag, 1975.

Институт математики
 технического университета г. Лодзи, Польша;
 Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kubarski@ck-sg.p.lodz.pl; asmish@higeom.math.msu.su

Поступила в редакцию
 17.02.2003