УДК 513.8

О сигнатуре транзитивного унимодулярного алгеброида Ли *

Я.Кубарски †и А.С.Мищенко ‡

Алгеброиды Ли возникают как инфинитезимальные объекты для группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений ([1], см. также [2], [3]), трансверсально полных слоений (кратко, ТС-слоений), незамкнутых подгрупп Ли([4]), многообразий Пуассона и др. Их алгебраические аналоги известны как псевдоалгебры Ли , называемые также алгебрами Ли-Райнхарта .

Алгеброид Ли на многообразии M состоит из тройки $L = (L, [\![\cdot,\cdot]\!], \gamma_L)$, где L есть векторное расслоение на многообразии M, на пространстве сечений $(\mathrm{Sec}\, L, [\![\cdot,\cdot]\!])$ которого задана структура $\mathbb{R}$-алгебры Ли, отображение $\gamma_L : L \to TM$, называемое

*Работа была частично представлена на Международном Конгрессе математиков в Пекине, август 2002 г.

†При поддержке гранта, присужденного факультетом технической физики, вычислительной техники и прикладной математики Технического университета Лодзи.

‡Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-01-00574) и фонда "Университеты России"(контракт УР.04.03.009)

анкером, является линейным гомоморфизмом векторных расслоений, для которого выполняется условие Лейбница

$$[\![\xi, f\cdot\eta]\!] = f\cdot[\![\xi,\eta]\!] + \gamma_L(\xi)(f)\cdot\eta, \quad f\in C^\infty(M),\ \xi,\eta\in \operatorname{Sec} L.$$

Анкер сохраняет операцию коммутирования сечений , $\gamma_L\circ[\![\xi,\eta]\!] = [\gamma_L\circ\xi, \gamma_L\circ\eta]$, [5]. Алгеброид Ли называется транзитивным алгеброидом, если анкер γ_L является послойным эпиморфизмом. Для транзитивных алгеброидов Ли имеет место точная последовательность Атья $0\longrightarrow \boldsymbol{g}\hookrightarrow L\xrightarrow{\gamma_L} TM\longrightarrow 0$, в которой ядро анкера $\boldsymbol{g} := \ker\gamma_L$ образует векторное расслоение, являющееся расслоением алгебр Ли. Это расслоение называется присоединенным к расслоению L. Слоем $\boldsymbol{g}_x$ расслоения $\boldsymbol{g}$ в каждой точке $x\in M$ служит алгебра Ли, с естественной операцией коммутирования. Алгебра Ли $\boldsymbol{g}_x$ называется изотропной алгеброй Ли алгеброида L в точке $x\in M$. Любой транзитивный алгеброид Ли L на стягиваемом многообразии M изоморфен тривиальному алгеброиду Ли ([6], [7]).

С каждым алгеброидом Ли L связывается алгебра когомологий $H_L(M)$, задаваемая с помощью дифференциальной градуированной алгебры L-дифференциальных форм $(\Omega_L(M), d_L)$ на пространстве сечений $\operatorname{Sec} L$ алгеброида.

Для тривиального алгеброида Ли TM – касательного расслоения многообразия M дифференциал d_{TM} совпадает с дифференциалом d_M дифференциальных форм на многообразии M.

Нетривиальным примером алгеброида служит расслоение $L = A(P) = TP/G$ для некоторого главного G-расслоения $P \to M$. В этом случае $\Omega_L(M) \cong \Omega^r(P) \hookrightarrow \Omega(P)$, где $\Omega^r(P)$ есть пространство G-право инвариантных дифференциальных форм на P, а $H_L(M) \cong H(\Omega^r(P))$. Гомоморфизм i является изоморфизмом в случае, когда группа G связна и компактна.

Нас будут интересовать транзитивные алгеброиды Ли, алгебра когомологий $H_L(M)$ которых снабжена двойственностью Пуанкаре [8]. Транзитивные унимодулярные инвариантно ориентированные (TUIO) алгеброиды Ли [9] являются примерами таких алгеброидов. Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Sec} \bigwedge^n \boldsymbol{g}$ есть некоторая ориентирующая форма расслоения $\boldsymbol{g}$. Фундаментальную роль играет послойный интеграл ([9]) $\fint_L : \Omega_L^\star(M) \to \Omega_{dR}^{\star-n}(M)$, который приводит к гомоморфизму в когомологиях

$$\fint_L^\# : H_L^\star(M) \to H_{dR}^{\star-n}(M).$$

Примеры. (1) Алгеброид Ли $A(P)$ главного G-расслоения $P \to M$ является TUIO-алгеброидом Ли [9] в случае, когда группа G обладает свойством: $\det(Ad_G a) = +1$, $a \in G$.

(2) Алгеброид Ли $A(M; \mathcal{F})$ трансверсально параллелизуемого слоения на компактном односвязном связном многообразии является TUIO-алгеброидом Ли.

(3) Алгеброид Ли $A(G; H)$ некоторой незамкнутой подгруппы Ли H в группе Ли G (т.е. алгеброид Ли соответствующего трансверсально полного слоения левых классов смежности

подгруппы H в группе G) является TUIO-алгеброидом Ли. При этом присоединенное расслоение алгебр Ли этого алгеброида Ли $A(G;H)$ является тривиальным расслоением абелевых алгебр Ли ([4]).

Предположим, что многообразие M связно и ориентированно. Тогда скалярное произведение Пуанкаре

$$H_L^*(M) \times H_{L,c}^{m+n-*}(M) \to \mathbb{R},$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \int_L^{\#} \alpha \wedge \beta = \int_M \left(\int_L \alpha \wedge \beta \right)$$

является невырожденным, т.е. $H_L(M) \cong (H_{L,c}(M))^*$.

В случае, когда многообразие M является компактным связным ориентированным многообразием и $m+n = 4k$, получается симметрическая квадратичная форма на когомологиях, и ее сигнатура обозначается через $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ и называется сигнатурой алгеброида L. В остальных случаях (т.е., когда $m+n \neq 0 \pmod 4$) по определению полагаем $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

В работе [8] была поставлена задача вычисления сигнатуры $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ и нахождения условия, при которых эта сигнатура тривиальна, $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

Для изучения сигнатуры алгеброида L мы используем технику спектральных последовательностей комплекса Чеха-де Рама $K^{*,*}$ дифференциальных форм алгеброида L, аналогичного комплексу Чеха-де Рама для многообразия и воспользуемся известными методами и утверждениями из работы [10].

Рассмотрим произвольный транзитивный алгеброид Ли L на многообразии M с изотропными алгебрами Ли $\boldsymbol{g}_{|x}$, которые изоморфны данной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если открытое подмножество $U \subset M$ диффеоморфно евклидовому пространству $\mathbb{R}^m$, то ограничение $L_{|U}$ алгеброида L на подмножество U является тривиальным алгеброидом Ли, точнее, изоморфно тривиальному алгеброиду $TU \times \mathfrak{g}$. Обозначим для краткости алгебру когомологий $H_{L_{|U}}(U)$ через $H_L(U)$. Согласно формуле Кюннета имеем (см. [8])

$$H_L(U) \cong H(\mathfrak{g}) \otimes H(U) \cong H(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим так называемое хорошее покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ многообразия M, т.е. когда все множества покрытия U_α и все их непустые конечные пересечения $\bigcap_i U_{\alpha_i}$ диффеоморфны евклидовому пространству $\mathbb{R}^m$. Образуем двойной комплекс типа Чеха - де Рама

$$K^{p,q} = C^p\left(\mathfrak{U}, \Omega_L^q\right) := \prod_{\alpha_0 < \ldots < \alpha_p} \Omega_L^q\left(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\right)$$

$p, q \geq 0$, с естественной мультипликативнай структурой $\cup : K^{p,q} \times K^{r,s} \to K^{p+r,q+s}$.

Этот комплекс имеет два естественных граничных гомоморфизма: горизонтальный d и вертикальный δ. Горизонтальный гомоморфизм $d : C^p\left(\mathfrak{U}, \Omega_L^q\right) \to C^p\left(\mathfrak{U}, \Omega_L^{q+1}\right)$ действует как внешнее дифференцирование дифференциальных форм на алгеброиде L: $d = (-1)^p d_L$. Вертикальный гомоморфизм δ :

$C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega_L^q)$ действует как кограничный оператор в коцепях покрытия

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0\ldots\widehat{\imath}\ldots\alpha_{p+1}}|U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}.$$

Гомоморфизмы d и δ являются антидифференцированиями степени $+1$ по отношению к суммарной градуировке. Поэтому набор $(K, K^{p,q}, \cup, d, \delta)$ образует двойной комплекс первого квадранта с мультипликативной структурой. Суммарный оператор $D = d+\delta$ тоже является антидиффернцированием. Комплекс дифференциальных форм алгеброида вкладывается в двойной комплекс K , $r : \Omega_L^* \to K^{0,*} \subset K^{(*)}$, и порождает гомоморфизм когомологий $r^\# : H_L^*(M) \to H^{(*)}(K, D)$.

Аугментированная строка в двойном комплексе

$$0 \to \Omega_L^q(M) \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} \ldots$$

является точной. Доказательство стандартно получается использованием разбиения единицы $\{\rho_\alpha\}$, подчиненного покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, и оператора цепной гомотопии $H : K^{p,q} \to K^{p-1,q}$, $(H\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$. Следовательно, гомоморфизм $r^\# : H_L^*(M) \to H^{(*)}(K, D)$ является изоморфизмом градуированных алгебр когомологий.

Рассмотрим убывающую фильтрацию $K_j = \bigoplus\limits_{p\geq j, q\geq 0} K^{p,q}$. Согласно общей конструкции спектральной последовательности (см. например, [11], 1.4.2) для указанной фильтрации можно построить спектральную последовательность градуированных дифференциальных колец $(E_s^{p,q}, d_s)$, $d_s : E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q-s+1}$, для которых $E_{s+1}^{p,q} = H(E_s^{p,q}, d_s)$, причем кольцо $E_\infty^{p,q}$ присоединено к кольцу когомологий $H(K,D)$ по отношению к фильтрации, индуцированной фильтрацией $\{K_j\}$.

Первые два члена спектральной последовательности (E_s, d_s) выглядят следующим образом: $E_0^{p,q} = K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q)$, $d_0 = d = (-1)^j d_L$; $E_1^{p,q} = H^{p,q}(K,d) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q)$, $d_1 = \delta^\# : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$, где $\mathcal{H}_L^* = (U \longmapsto H_L^*(U))$ есть предпучок когомологий типа Лере, являющийся локально постоянным пучком на хорошем покрытии со значением в группе (точнее, в алгебре) $H^*(\mathfrak{g})$. Следовательно, второй член спектральной последовательности $E_s^{j,i}$ вычисляется по формуле

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}\left(H(K,D), \delta^\#\right) = H_{\delta\#}^j(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q).$$

В присоединенном расслоении $\boldsymbol{g}$ со слоем изотропная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ функции склейки λ_x на пересечении карт являются непрерывными функциями со значением в структурной группе $Aut(\mathfrak{g})$, топология в которой отлична от классической и задается по следующему правилу. Пусть $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ — произвольный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\varphi^* : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathfrak{g})$ обозначает индуцированный автоморфизм групп когомологий. Через $\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$ обозначим стационарную подгруппу действия в когомологиях, т.е. подгруппу таких автоморфизмов $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, для которых $\varphi^* = \mathrm{Id}$. Изменим топологию в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, добавив к открытым множествам еще одно — подгруппу $\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$. Группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ с новой топологией обозначим через $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})$. Ясно, что фактор группа $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$ является дискретной группой, а расслоение $H^*(\boldsymbol{g})$ является плоским расслоением, т.е. все функции склейки являются локально постоянными функциями.

Предположим, что предпучок $\mathcal{H}_L^*$ является постоянным на некотором хорошем покрытии $\mathfrak{U}$, т.е. представление монодромии фундаментальной группы многообразия M для присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли тривиально. Тогда

$E_2^{j,i} = H_{\delta\#}^j\left(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^i\right) \cong H^j\left(\mathfrak{U}, H^i\left(\mathfrak{g}\right)\right) \cong H^j\left(\mathfrak{U}, \mathbb{R}\right) \bigotimes H^i\left(\mathfrak{g}\right) \cong H_{dR}^j\left(M\right) \bigotimes H^i\left(\mathfrak{g}\right).$

Лемма 1 *([10]) Если дифференциальная градуированная алгебра* $(A^*, \cup, d)$ *является алгеброй Пуанкаре, дифференциал которой является дифференциалом Пуанкаре, то ее градуированная алгебра когомологий* $\left(H^*\left(A\right), \cup\right)$ *является алгеброй Пуанкаре относительно того же элемента* $0 \neq \xi \in A^{n_0} = H^{n_0}\left(A, d\right)$ *и выполнено равенство* $\mathrm{Sign}\, A = \mathrm{Sign}\, H\left(A\right).$

Отсюда следует, что если L есть транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном многообразии M, у которого изотропные алгебры Ли $\mathfrak{g}_{|x} \cong \mathfrak{g}$ унимодулярны, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения $\boldsymbol{g}$ изотропных алгебр Ли тривиальна, то для спектральной последовательности хорошего покрытия имеют место равенства

$$0 = \mathrm{Sign}\, M \cdot \mathrm{Sign}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Sign}\, E_2 = \ldots = \mathrm{Sign}\, E_\infty.$$

Осталось доказать равенство $\mathrm{Sign}\, E_\infty = \mathrm{Sign}\, H_L(M)$, которое следует из сравнения убывающей фильтрации с присоединенной градуировкой. В результате имеет место следующая

Теорема 2 (Теорема Черна–Хирцебруха–Серра для транзитивных алгеброидов Ли).

Пусть L — произвольный транзитивный унимодулярный инвариантно ориентированный алгеброид Ли на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропная алгебра Ли равна $\mathfrak{g}$, а группа монодромий тривиальна. Тогда

$$\mathrm{Sign}\, L = \mathrm{Sign}\, E_2 = \mathrm{Sign}\, M \cdot \mathrm{Sign}\, \mathfrak{g} = 0.$$

В частности, теорема 2 выполняется в следующих случаях:

1) многообразие M является односвязным,

2) изотропная алгебра Ли $\boldsymbol{g}$ есть простая алгебра одного из типов $B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2$ (см. [12, Добавление Д.8]),

3) присоединенное расслоение алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ тривиально по отношению к структурной группе $\mathrm{Aut}^s(\boldsymbol{g})$. Например, когда алгеброид Ли $A(G;H)$ есть алгеброид Ли трансверсально полного слоения левых классов смежности незамкнутой подгруппы Ли H в произвольной группе Ли G.

Полное изложение будет опубликовано позже, где будет показано, что сигнатура транзитивного унимодулярного алгеброида Ли тривиальна и в случае конечной монодромии, а также приведен пример алгеброида Ли (с бесконечной монодромией) с нетривиальной сигнатурой.

Список литературы

[1] *Pradines J.* // Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, 1967. V.9. P. 1–4.

[2] *Kubarski J.* In: Publ. Dep. Math. Universite de Lyon 1. 1989. V. 1/A. P.1-66.

[3] *Kubarski J.* // Trans. AMS. 1996. V. 348. No.6. P.2151-2167.

[4] *Kubarski J.* // Rev. Mat. Univ. Computense de Madrid. 1991. V.4. No. 2/3. P.159-176.

[5] *Balcerzak B., Kubarski J., Walas W.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry. Banach Center Publ. Inst. Math. Polish Acad. Sci. Warszawa, 2001. V. 54. P. 71–97.

[6] *Mackenzie K.* Lie Groupoides and Lie Algebroids in Differential Geometry. London Math. Soc. Lect. Note Ser. Cambridge, 1987. V.124.

[7] *Kubarski J.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry. Banach Center Publ. Inst. Math. Polish Acad. Sci. Warszawa, 2001. Vol.54. P. 135–173.

[8] *Kubarski J.* // Topology and Its Applications. 2002. V. 121. P. 333–355.

[9] *Kubarski J.* Proc. Conf. on Differential Geometry. New Developments in Differential Geometry. Budapest. July 27-30 1996. N.Y.: Kluwer Acad. Publ. 1999. P. 173–202.

[10] *Chern S.S., Hirzebruch F., Serre J-P.* // Proc. AMS. 1957. V.8. P. 587–596.

[11] *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.

[12] *Humphreys J.E.* Linear Algebraic Groups. N.Y.: Springer, 1975.

УДК 513.8

О сигнатуре транзитивного унимодулярного алгеброида Ли

Я.Кубарски и А.С.Мищенко

Аннотация

Мы доказываем, что для произвольного транзитивного унимодулярного инвариантно ориентированного алгеброида Ли L на компактном ориентированном связном многообразии, у которого монодромия тривиальна, его алгебра когомологий является алгеброй Пуанкаре с тривиальной сигнатурой. Примерами таких алгеброидов являются алгеброиды на связном многообразии, а также когда группа внешних автоморфизмов изотропной алгебры Ли совпадает с внутренними автоморфизмами, или когда присоединенное расслоение алгебр Ли является тривиальным плоским расслоением.

Библиография: 12 названий.

Ян Кубарски

Институт математики технического университета в Лодзи, Польша,

E-mail: kubarski@ck-sg.p.lodz.pl

Мищенко Александр Сергеевич

Московский Государственный университет, Москва, Россия

E-mail: asmish@higeom.math.msu.su

тел. 434-5643