1971 г. март — апрель *т. XXVI, вып. 2 (158)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Посвящается
Ивану Георгиевичу ПЕТРОВСКОМУ
в связи с его семидесятилетием

УДК 519.4+513.83

ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ИХ РОЛЬ В АППАРАТЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данный краткий обзор естественно примыкает к обзору С. П. Новикова [13], и их полезно читать одновременно. Здесь мы касаемся, в основном, итогов развития теории кобордизмов за последнее пятилетие на базе работ авторов, Д. Квиллена и некоторых других. В приложении изложена идея прекрасной работы Сулливана по так называемой гипотезе Адамса в K-теории.

§ 1. Формальные группы

Большую роль в современном аппарате топологии, построенном на теории кобордизмов, играет теория коммутативных формальных групп и их обобщений. Здесь мы изложим необходимые сведения из этой теории.

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $A[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами в A и $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ — соответствующее кольцо степенных рядов.

Определение 1.1. *Коммутативной одномерной формальной группой над A* называется степенной ряд $F(u, v) \in A[[u, v]]$ такой, что $F(F(u, v), w) = F(u, F(v, w))$ и $F(u, v) = F(v, u)$, причем $F(u, 0) = u$.

Заметим, что существование «обратного элемента» $\varphi(u) \in A[[u]]$ такого, что $F(u, \varphi(u)) = 0$, вытекает из определения 1.1.

Определение 1.2. *Гомоморфизмом Ψ формальных групп $G \xrightarrow{\Psi} F$*, определенных над кольцом A, называется такой ряд $\psi(u)$, что $F(\psi(u), \psi(v)) = \psi(G(u, v))$. Если $\psi(u) = u + O(u^2)$, то гомоморфизм Ψ называется *сильным изоморфизмом* (обратимой заменой переменных).

Основные кольца A, которые приходилось рассматривать ранее в основных примерах — это кольца целых чисел $\mathbf{Z}$, целых p-адических чисел $\mathbf{Z}_p$, вычеты по модулю p: $Z_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, кольца целых элементов в каком-либо поле алгебраических чисел или их p-адические пополнения. В топологии — это кольца Ω какого-либо вида кобордизмов, особенно кольцо унитарных кобордизмов, которое алгебраически изоморфно градуированному кольцу полиномов над $\mathbf{Z}$ с полиномиальными образующими всех четных размерностей.

Большое количество примеров формальных групп над числовыми кольцами читатель может найти в прекрасной статье Хонда [17].

Простейшие примеры. а) Линейная группа над $\mathbf{Z}$, где $F_0(u, v) = u + v$.

б) Мультипликативная группа над $\mathbf{Z}$, где $F_m(u, v) = u + v \pm uv$; замена переменных $\psi(u) = \pm\ln(1 \pm u)$, приводящая группу $F_m(u, v)$ к линейной форме, лежит в кольце $Q \supset \mathbf{Z}$, поэтому над $\mathbf{Z}$ эта группа неизоморфна линейной.

в) Группа Лазара. Рассмотрим кольцо $B = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ целочисленных полиномов от бесконечного числа переменных и ряд $g(u) = u + \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{u^{n+1}x_n}{n+1}$. Тогда определена группа

$$F(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v)),$$

где $g^{-1}(g(u)) = u$. Коэффициенты α_{ij} ряда $F(u, v)$ лежат в кольце $B \otimes Q$ и порождают над $\mathbf{Z}$ подкольцо $A \subset B \otimes Q$, где $F(u, v) = u + v + \sum\limits_{\substack{i \geqslant 1 \\ j \geqslant 1}} \alpha_{ij} u^i v^j$.

Имеют место следующие теоремы Лазара.

Теорема 1.1. *Кольцо A коэффициентов группы Лазара является кольцом полиномов над $\mathbf{Z}$ с бесконечным числом образующих.*

Теорема 1.2. *Для любой коммутативной одномерной формальной группы над любым кольцом A' существует единственный гомоморфизм $A \to A'$, при котором группа Лазара переходит в заданную группу («универсальность группы Лазара»).*

Теорема 1.3. *Для любой коммутативной одномерной формальной группы $F(u, v)$ над любым кольцом A' существует ряд $\varphi(u) \in A'[[u]] \otimes Q$ такой, что*

$$\varphi(u) = u + O(u^2) \quad \text{и} \quad F(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \in A'[[u, v]] \otimes Q.$$

Таким образом, над рациональными числами все группы линеаризуются. Ряд $\varphi(u)$ называется «логарифмом» формальной группы $F(u, v)$. Заметим, что коэффициенты формального дифференциала $d\varphi(u) = \left(\sum_{n\geqslant 0} \varphi_n u^n\right) du$ лежат в кольце A', где $\varphi_0 = 1$, $\varphi(u) = u + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi_n}{n+1} u^{n+1}$. Дифференциал $d\varphi$ называется «инвариантным дифференциалом» группы $F(u, v)$ и вычисляется так: $d\varphi = du \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial v} F(u, v)\right)_{v=0}$ (см. Хонда [17]). Над кольцом $A' \otimes Q$ мы имеем также равенство $\varphi(u) = \left[\frac{1}{k}\varphi^{-1}(k\varphi(u))\right]_{k=0}$.

Доказательство теорем 1.1—1.3 можно найти в [4]; выражения вида $\frac{1}{k}\varphi^{-1}(k\varphi(u)) = \frac{1}{k} F(u, F(u, \ldots)\ldots) = \Psi^k(u)$ связаны с «операторами Адамса» в топологии.

Замечательным оказался факт, что введенная А. С. Мищенко и С. П. Новиковым в [14] «формальная группа геометрических кобордизмов», игравшая важную роль и имеющая простой геометрический смысл, оказалась совпадающей с универсальной группой Лазара. Это впервые заметил Квиллен в [7], который дал дальнейшие важные применения этой группы в топологии. Инвариантный дифференциал этой группы имеет вид $dg(u) = \left(\sum_{n\geqslant 0} [CP^n]\, u^n\right) du$, где $[CP^n]$ — классы унитарных кобордизмов комплексных проективных пространств; кольцо коэффициентов A группы Лазара совпадает с кольцом Ω унитарных кобордизмов. Далее нам придется встретиться с понятием «степенной системы», более слабым, чем формальная группа.

Определение 1.3. *Степенной системой типа $s \geqslant 1$ над кольцом A* называется последовательность рядов $f_k(u) \in A[[u]]$ таких, что $f_k(u) = k^s u + O(u^2)$ и $f_k(f_l(u)) = f_{kl}(u)$, где k, l — любое целое число (над кольцами A с кручением полезно требовать алгебраичности коэффициентов рядов $f_k(u)$ по переменной k).

Имеет место простой факт (В. М. Бухштабер и С. П. Новиков [4]). Над кольцом $A \otimes Q$ существует ряд $B(u) \in A[[u]] \otimes Q$ такой, что $f_k(u) = B^{-1}(k^s B(u))$, где $B^{-1}(B(u)) = u$ и $B(u) = u + O(u^2)$.

Всякая группа порождает степенную систему над тем же кольцом, но обратное, вообще говоря, не верно, так как кольцо коэффициентов степенной системы гораздо меньше. Ряд примеров степенных систем, их свойств и теорем о них читатель может найти в [4].

Заметим, что в работе [4], [21] и в дальнейших параграфах этого обзора встретятся «двузначные» аналоги формальных групп, задаваемые (не имеющими над кольцом $A[[u, v]]$ решений) уравнениями

$$Z^2 - \Theta_1(u, v)\, Z + \Theta_2(u, v) = 0;$$

здесь Θ_1, Θ_2 — это как бы «сумма» и «произведение» значений группы $F^{\pm}(u, v)$, не лежащих в исходном кольце. «Обратный элемент» для u — это такой ряд $\varphi(u)$, что $\Theta_2(u, \varphi(u)) = 0$. Важен случай, когда $\varphi(u) = u$ (см. § 4).

§ 2. Теории кобордизмов и бордизмов

1. Аксиоматика теорий бордизмов. Общие свойства. Пусть задан некоторый класс гладких многообразий, быть может, с дополнительной структурой, замкнутых и с краем такой, что

а) граница многообразий этого класса ему принадлежит;

б) прямое произведение многообразий этого класса ему принадлежит («мультипликативность»);

в) замкнутая область с гладкой границей в многообразии этого класса ему принадлежит (а также замкнутый отрезок лежит в этом классе) («аксиома вырезания» и гомотопическая инвариантность).

Говорят, что такой класс задает теорию кобордизмов (и бордизмов). Обозначим этот класс через P.

Циклами (сингулярными бордизмами в классе P) для любого комплекса K называются пары (M, f), где $M \in P$, $f\colon M \to K$ — непрерывное отображение, M — замкнутое многообразие. Сингулярными пленками называются пары (N, g), где $N \in P$ имеет край и $f\colon N \to K$. Очевидным образом возникает группа n-мерных циклов, профакторизованных по границам пленок в классе P для любого комплекса K; эта группа обозначается через $\Omega_n^P(K)$ и называется «группой бордизмов» комплекса K относительно класса P. Аналогичным образом определяется группа «относительных бордизмов» $\Omega_n^P(K, L)$, и имеет место так называемая «точная последовательность пары»: $\ldots \to \Omega_n^P(L) \to \Omega_n^P(K) \to \Omega_n^P(K, L) \xrightarrow{\partial} \Omega_{n-1}^P(L) \to \ldots$ При отображениях $K_1 \xrightarrow{\varphi} K_2$ имеется гомоморфизм $\varphi_*\colon \Omega_n^P(K_1) \to \Omega_n^P(K_2)$. Группы Ω_n^P вместе с гомоморфизмами φ_* гомотопически инвариантны (отрезок $I^1 \in P$). Для евклидова пространства R^q (или точки) группы $\Omega_n^P(R^q)$ при $n > 0$, вообще говоря, нетривиальны. Прямая сумма $\Omega_*^P = \sum\limits_n \Omega_n^P(R^q)$ образует «кольцо скаляров теории бордизмов».

Для конечных комплексов K мы определяем группы кобордизмов $\Omega_P^n(K)$, следуя закону двойственности Александера — Понтрягина: если $K \subset S^N$, где S^N — сфера, N — велико, то по определению полагаем $\Omega_P^n(K) = \Omega_{N-n}^P(S^N, S^N \setminus K)$, и это определение не зависит от N и вложения $K \subset S^N$. Группы Ω_P^i обладают свойствами когомологий, и определены относительные группы $\Omega_P^i(K, L)$. Сумма $\Omega_P^* = \sum\limits_n \Omega_P^n(K, L)$ образует «кольцо кобордизмов» пары $K \supset L$. Для пространства R^q (или точки) кольцо $\Omega_P^* = \sum\limits_n \Omega_P^n(R^q)$ является аналогом скаляров.

По определению для точки x мы имеем $\Omega_P^n(x) = \Omega_{-n}^P(x)$.

Для некоторых классов многообразий верен «закон двойственности Пуанкаре — Атья»: $D\colon \Omega_P^i(M^n) \xrightarrow{\approx} \Omega_{n-i}^P(M^n)$.

Примеры. Важнейшие примеры классов P связаны с введением какой-либо структуры в стабилизованное касательное расслоение τ_M к многообразию M; например, ориентация в расслоении $\tau_M \times R^k$ при каком-либо

$k \geqslant 0$, комплексная структура в расслоении $\tau_M \times R^q$, симплектическая структура в $\tau_M \times R^q$ или тривиализация расслоения $(-\tau_M) \times R^q$ (оснащение или структура Понтрягина), и т. д. Таким образом, классы P этого рода связаны с каким-то классом Q векторных расслоений над любыми комплексами, т. е. $P = P(Q)$.

Изоморфизм Тома. Для классов P, связанных с классом Q векторных расслоений, требуется еще одно свойство, дополнительное к требованиям а), б), в) (см. выше):

г) пространство расслоения класса Q со слоем диск и базой, $M \in P$, является многообразием из класса P.

Если база расслоения η есть K, пространство расслоения со слоем диск D^n — это E_η и его граница $\mathring{E}_\eta$ — расслоение со слоем S^{n-1}, то из определений и пункта г) вытекает так называемый «изоморфизм Тома» φ_P: $\Omega_i^P(K) \xrightarrow{\approx} \Omega_{n+i}^P(E_\eta, \mathring{E}_\eta)$, определяемый с помощью пространств индуцированных расслоений $f^*\eta$. Изоморфизм Тома порождает двойственность Пуанкаре — Атья для всех многообразий класса P: D: $\Omega_P^i(M^n) \xrightarrow{\approx} \Omega_{n-i}^P(M^n)$. Можно определить фундаментальный цикл $[M^n] \in \Omega_n^P(M^n)$, операцию Чеха $x \cap y \in \Omega_{n-q}^P(K)$ для $x \in \Omega_P^q$, $y \in \Omega_n^P$, и доказать, что двойственность Пуанкаре определяется операцией Чеха. Более того, для всех непрерывных отображений f имеет место тождество $f_*(f^*x \cap y) = x \cap f_* y$, где $x \in \Omega_P^q$, $y \in \Omega_n^P$.

II. Унитарные кобордизмы. Основной интересующий нас класс P — это класс стабильно квазикомплексных многообразий и Q — класс комплексных векторных расслоений. В этом случае группы $\Omega_*^P(K)$ и $\Omega_P^*(K)$ обозначаются обычно через $U_*(K)$ и $U^*(K)$ и называются «унитарными бордизмами и кобордизмами». Кольцо U_* (точка) $= \Omega_*^U$ есть кольцо полиномов над $\mathbf{Z}$ от четномерных образующих — в каждой размерности по одной.

Другие бордизмы классов P, связанных соответственно со всеми многообразиями, ориентируемыми, специально унитарными, унитарными, стабильно симплектическими или оснащенными, и т. д., обозначаются обычно через Ω_*^O, Ω_*^{SO}, $\Omega_*^U = U_*$, Ω_*^{SU}, Ω_*^{Sp}, $\Omega_*^1 =$ (бордизмы оснащенных многообразий). В обзоре С. П. Новикова [13] можно найти информацию об этих группах.

Кольцо операций. Определение 2.1. *Гомологической операцией* (стабильной) называется аддитивный гомоморфизм θ: $\Omega_*^P(K, L) \to \Omega_*^P(K, L)$, определенный сразу для всех размерностей и всех комплексов и перестановочный с непрерывными отображениями, а также перестановочный с граничным гомоморфизмом ∂: $\Omega_*^P(K, L) \to \Omega_*^P(L)$, $K \supset L$.

Такие операции образуют кольцо —«кольцо Стинрода» A^P, обозначаемое для унитарных бордизмов U_* через A^U. Для кобордизмов U^* кольцо операций определяется аналогично и совпадает с кольцом операций A^U.

Если U_N — унитарная группа, BU_N — база универсального расслоения и η_N — само расслоение (со слоем диск), то через MU обозначается спектр (MU_N) пространств Тома $MU_N = E_{\eta_N}/\mathring{E}_{\eta_N}$, где E_{η_N} — пространство расслоения η_N. Стабильные гомотопические классы отображений

$[K, MU]$ совпадают с кольцом $U^*(K)$. В частности, $A^U = [MU, MU]$, и определен универсальный изоморфизм Тома φ: $U^*(BU_N) \xrightarrow{\approx} U^*(MU_N)$ (см. обзор [13]).

Пример. Умножение на «скаляр» $\lambda \in U^*$ (точка), очевидно, является когомологической операцией. Заметим, что для U-кобордизмов мы имеем $\Omega^U_* = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$. Для когомологических операций в классических теориях гомологий и когомологий скаляры были лишь обычными числами и коммутировали со всеми остальными операциями. В кобордизмах все сложнее.

Кольцо A^U было вычислено С. П. Новиковым в [14]. Оно описывается так. Для любого симметризованного разбиения $k = \dim \omega = \sum k_i$, $k_i \geqslant 0$, определены операторы $S_\omega \in A^U$ такие, что $S_{(0)} = 1$, и любой элемент из A^U имеет вид формального ряда $\sum\limits_i \lambda_i S_{\omega_i}$, где $\dim \omega_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и $\lambda_i \in \Omega^U_*$. Формулы для суперпозиции $S_{\omega_1} \circ S_{\omega_2}$ указаны в [14] и вытекают в конечном счете из формулы Лейбница $S_\omega(xy) = \sum\limits_{(\omega_1, \omega_2)=\omega} S_{\omega_1}(x) S_{\omega_2}(y)$ [1]. Суперпозиция вида $S_\omega \circ \lambda$ равна

$$\lambda \circ S_\omega + \sum_{\substack{(\omega_1, \omega_2)=\omega \\ \dim \omega_1 > 0}} \sigma^*_{\omega_1}(\lambda) S_{\omega_2},$$

где аддитивные гомоморфизмы $\sigma^*_\omega(\lambda)$ на Ω^U_* вычислены через геометрию многообразий, представляющих $\lambda \in \Omega^U_*$. Например, $\sigma^*_{(q)}([CP^n]) = -(n+1)[CP^{n-q}]$. В частности, такое представление $*$, что $S_\omega \xrightarrow{*} \sigma^*_\omega$ и $\lambda \to$ (умножение на λ), кольца операций A^U на кольце бордизмов точки U^*(точка) $= \Omega^*_U$ является точным.

Геометрические бордизмы. Имеются важные подмножества «геометрических кобордизмов» $V(K) \subset U^2(K)$ в любом комплексе K или двойственные им множества $V(M^n) \subset U_{2n-2}(M^n)$ для квазикомплексных многообразий («геометрические бордизмы»), состоящие из подмногообразий комплексной коразмерности 1. Если $u \in V(K)$, то $S_\omega(u) = 0$ при $\omega \neq (q)$ и $S_{(q)} u = u^{q+1}$. Это свойство замыкает аксиоматику для операций S_ω вместе с формулой умножения $S_\omega(xy) = \sum\limits_{(\omega_1, \omega_2)=\omega} S_{\omega_1}(x) S_{\omega_2}(y)$.

Всевозможные мультипликативные операции $\alpha \in A^U$, т. е. такие, что $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ для всех $x, y \in U^*(K)$ и всех K, определяются одним рядом $\alpha(u) \in U^*(CP^\infty)$, где $u \in V(CP^\infty)$ и CP^∞ — бесконечномерное комплексное проективное пространство. Надо сказать, что кольцо $U^*(CP^\infty)$ есть просто кольцо формальных рядов $U^*(CP^\infty) = \Omega^*_U[[u]]$, где $\Omega^*_U = U^*$ (точка).

Характеристические классы. Формальная группа. Имея операции S_ω и изоморфизм Тома, можно построить обычным образом аналоги «классов Черна» $C_\omega(\eta)$ (где $C_k = C_{(1, \ldots, 1)}$ по определению) для любого U_N-расслое-

---

[1]) Описание кольца A^U без формулы для суперпозиции $S_\omega \circ \lambda$ было получено также П. Ландвебером в работе [22].

ния η (см. [8]) [1]). При этом $C_\omega(\eta) \in U^*$ (база). Для U_1-расслоений ξ и η произведение $\xi \otimes \eta$ есть U_1-расслоение. Класс $C_1(\xi \otimes \eta) = F(C_1(\xi), C_1(\eta))$ вычисляется как формальный ряд с коэффициентами в Ω_U^* (см. [14], приложение 1). Возникает формальная группа «геометрических кобордизмов» $F(u, v) = F(C_1(\xi), C_1(\eta)) = C_1(\xi \otimes \eta) = u + v - [CP^1]\, uv + \ldots$ А. С. Мищенко показал, что $F(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v))$, где $g(u) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{CPn}{n+1} u^{n+1}$ и $dg(u) = \left(\sum\limits_{n \geqslant 0} CP^n u^n\right) du = CP(u)\, du$.

Формальные группы и операции. Аналоги операций Адамса $\Psi^k \in A^U \otimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{k}\right]$ определяются из требования мультипликативности

$$\Psi^k(xy) = \Psi^k(x)\, \Psi^k(y) \quad \text{и} \quad \Psi^k(u) = \frac{1}{k}\, g^{-1}(kg(u)) \quad \text{для} \quad u \in V(CP^\infty) \subset$$

$\subset U^2(CP^\infty)$, т. е. связаны с возведением в степень k в формальной группе $F(u, v)$. Они порождают степенну́ю систему. Далее, $\Psi^0 \in A^U \otimes Q$ определено как $\Psi^0(u) = g(u) = \left[\frac{1}{k} g^{-1}(kg(u))\right]_{k=0}$ и определяет проектор теории кобордизмов $U^* \otimes Q$ на обычные когомологии $H^*(\ ;Q)$ (см. [14]).

Вообще говоря, в кольцах $A^U \otimes \mathbf{Z}_p$ для простых p много мультипликативных проекторов (см. [7], [14]). Канонический проектор π_p указан Квилленом ([7]), а именно $\pi_p^*[CP^n] = 0$ при $n \neq p^h - 1$, и $\pi_p^*[CP^{p^h-1}] = [CP^{p^h-1}]$. Этот проектор найден Квилленом, исходя из теории формальных групп. Проекционные операторы важны потому, что они выделяют меньшие теории гомологий, которые удобнее при вычислении, например, гомотопических групп с помощью спектральной последовательности типа Адамса, введенной в теорию кобордизмов в [14]. Необходимо, однако, уметь вычислять кольца операций этих меньших теорий; здесь можно использовать уже известную структуру кольца операций A^U в унитарных кобордизмах, если проектор достаточно простой. Эту программу реализовал Квиллен в [7], найдя удачный проектор. Роль формальных групп в построении теории операций стала очевидной; кроме того, она подтверждается также результатами авторов и Г. Г. Каспарова по неподвижным точкам преобразований. Здесь отдельно следует отметить результаты А. С. Мищенко [11] (см. также [4] и § 5) о неподвижных многообразиях действия групп с нетривиальным нормальным пучком.

Характеры Черна. Отметим также, что формальные группы тесно связаны с аналогами так называемого «характера Черна». Классический характер Черна ch — это аддитивно-мультипликативная функция от расслоения со значением в рациональных когомологиях. С. П. Новиков в [14] указал, что такая функция от расслоения со значением в кобордизмах определяется своим значением на U_1-расслоениях η, на которых она равна

---

[1]) Отметим, что в теории кобордизмов сначала были введены характеристические классы (Коннер и Флойд) и уже на их основе определены когомологические операции и дано вычисление алгебры A^U (С. П. Новиков).

$\exp(g(u))$, где $u = C_1(\eta)$, $g(u) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{CPn}{n+1} u^{n+1}$. Другое, абстрактное понятие характера Черна, введенное Дольдом, не связано с расслоениями — это просто изоморфизм теорий ch_U: $U^* \otimes Q \to H^*(\ ;\Omega_U^* \otimes Q)$, тождественный на гомологиях точки. Здесь также проявляется ряд $g(u)$. Как показал В. М. Бухштабер [2], для базисного элемента $t \in H^2(CP^\infty)$ мы имеем $ch_U^{-1}(t) = g(u)$. В работе [2] им был изучен общий характер Черна — Дольда в унитарных кобордизмах и дан ряд его применений, развитых далее в работах [3], [4], [21].

Роды Хирцебруха. Как указано Новиковым в [15], так называемые «мультипликативные роды Хирцебруха» $Q(z)$ — или гомоморфизмы Q: $\Omega_*^U \to \mathbf{Z}$—, такие, что $Q(CP^n) = [Q(z)^{n+1}]_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{Q^{n+1}}{z^{n+1}} dz$ — вычисляются через $g^{-1}(z)$, а именно, $Q(z) = \frac{z}{g_Q^{-1}(z)}$, где

$$g_Q(u) = \sum_{n\geq 0} \frac{Q(CPn)}{n+1} u^{n+1} \quad \text{и} \quad g_Q^{-1}(g_Q(u)) = u.$$

Таким образом, *все основные понятия и факты теории унитарных кобордизмов, современные и классические, выражаются через формальную группу Лазара.*

Сведения из K-теории. Наконец, остановимся на обычной комплексной K-теории $K^*(X)$, где $K^i(X) = K^{i+2}(X)$ для всех i (периодичность Ботта), $K^0(X)$ — стабильные классы комплексных расслоений над X и $K^1(X)$ — гомотопические классы отображений $X \to U_N$, где $N > \dim X$. Если λ^i — внешние степени, $\lambda_t = \sum\limits_{i\geq 0} \lambda^i t^i$, то $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$ — экспоненциальная операция. Для симметрических степеней S_i мы имеем $S_t = \sum\limits_{i\geq 0} S_i t^i = \frac{1}{\lambda_t}$. Далее, если $Q_k = \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^k$ $(N \to \infty)$ и $Q_k = Q_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, где $\sigma_k(t_1, \ldots, t_N)$ — элементарные симметрические функции, то виртуальное представление, называемое оператором Адамса, есть просто $Q_k(\lambda^1, \ldots, \lambda^k) = \Psi^k$. Оказывается, что $\Psi^k(x+y) = \Psi^k(x) + \Psi^k(y)$, $\Psi^k(xy) = \Psi^k(x)\Psi^k(y)$ и $\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{kl}$. Далее, для U_1-расслоений $\eta \in K^0(X)$ мы имеем $\Psi^k\eta = \eta^k$. Оператор Адамса Ψ^k не коммутирует с оператором периодичности Ботта β: $K^i \to K^{i-2}$. Имеет место формула $\Psi^k \cdot \beta = k\beta \cdot \Psi^k$. Поэтому операторы Ψ^k определены в теории $K^* \otimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{k}\right]$. Когомологии точки в K-теории имеют вид $K^*(\text{точка}) = \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ и $\Psi^k\beta = k\beta\Psi^k$. Это завершает описание операций в K-теории. Аналоги «геометрических кобордизмов» в K-теории — это U_1-расслоения; точнее, это элементы $u = \beta^{-1}(\xi - 1) \in K^2(X)$ для U_1-расслоений $\xi = \beta u + 1$. Мы имеем $k\Psi^k(u) = \beta^{-1}((\beta u + 1)^k - 1)$ и $F(u, v) = u + v - \beta uv = \beta^{-1}((\beta u + 1)(\beta v + 1) - 1)$ — мультипликативная группа. Таким образом, известный гомоморфизм Римана — Роха — Гротендика r: $U^*(X) \to K^*(X)$ соответствует гомоморфизму универсальной группы Лазара на мультипликативную, где $r(\lambda) = T(\lambda \cdot \beta^{\frac{\dim\lambda}{2}})$, T — род Тодда, $\lambda \in \Omega_U^*$.

§ 3. Формальная группа геометрических кобордизмов

Закон умножения в формальной группе геометрических кобордизмов. Пусть $\eta \to CP^n$, $n \leqslant \infty$, — каноническое комплексное одномерное расслоение над проективным пространством CP^n. Как уже отмечалось в § 2, формальный ряд $c_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = F(u, v) \in U^2(CP^\infty \times CP^\infty) = \Omega_U[[u, v]]$, $u = c_1(\eta_1)$, $v = c_1(\eta_2)$, задает закон умножения в одномерной формальной группе геометрических кобордизмов над кольцом Ω_U.

Теорема 3.1. а) *Имеет место формула*

$$F(u, v) = \frac{u + v + \sum [H_{r,t}]\, u^r v^t}{CP(u) \cdot CP(v)},$$

где $H_{r,t}$ — алгебраическое подмногообразие комплексной коразмерности 1 в $CP^r \times CP^t$, являющееся нулями сечений расслоения $\eta_1 \otimes \eta_2 \to CP^r \times CP^t$ и, таким образом, реализующее цикл $[CP^{r-1} \times CP^t + CP^r \times CP^{t-1}] \in H_{2(r+t-1)}(CP^r \times CP^t)$.

б) *Логарифм группы $F(u, v)$ имеет вид $g(u) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$.*

Доказательство. Пусть $F(u, v) = u + v + \sum e_{ij} u^i v^j$ и λ: $CP^r \times CP^t \to CP^\infty \times CP^\infty$ — стандартное вложение. Имеем $\varepsilon D \lambda^* F(u, v) = [H_{r,t}] = [CP^{r-1}][CP^t] + [CP^r][CP^{t-1}] + \sum e_{i,j}[CP^{r-i}][CP^{t-j}]$, где D — оператор двойственности Пуанкаре — Атья, ε: $U^*(CP^r \times CP^t) \to \Omega_U$ — аугментация в точку и $[CP^{r-i}] = \varepsilon D u^i$, если $u = c_1(\eta) \in U^2(CP^r)$. Таким образом, $u + v + \sum [H_{r,t}]\, u^r v^t = F(u, v)\, CP(u)\, CP(v)$. Утверждение а) доказано. Имеет место формула

$$dg(u) = \frac{du}{\left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0}},$$

следовательно,

$$dg(u) = \frac{CP(u)\, du}{1 + \sum ([H_{r,1}] - [CP^1][CP^{r-1}])\, u^r}.$$

Легко показать, например, сравнением чисел Черна, что $[H_{r,1}] = [CP^1][CP^{r-1}]$. Следовательно, $dg(u) = CP(u)$. Теорема доказана.

Универсальность формальной группы геометрических кобордизмов. Как показано в [9], [12], кольцо Ω_U мультипликативно порождается элементами $[H_{r,t}]$, а согласно [16] кольцо $\Omega_U \otimes Q$ мультипликативно порождается элементами $[CP^n]$, $n \geqslant 0$. Из теоремы 3.1 мы получаем теперь, что подкольцо в Ω_U, порожденное коэффициентами закона умножения формальной группы геометрических кобордизмов, совпадает с Ω_U, а коэффициенты логарифма этой группы алгебраически независимы и порождают кольцо $\Omega_U \otimes Q$. Покажем теперь, что из этих фактов тривиально следует универсальность группы $F(u, v)$ над Ω_U на категории коммутативных колец без кручения. Пусть $G(u, v)$ — произвольная формальная группа над кольцом R без кручения, и пусть $g_G(u) = \sum \frac{a_n}{n+1} u^{n+1}$, $a_n \in R$ — ее логарифм. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм r: $\Omega_U \to R \otimes Q$, $r[CP^n] = a_n$. Так как $G(u, v) =$

$= g^{-1}(g(u)+g(v))$, то $r(F(u, v)) = \sum r(e_{i,j}) u^i v^j = G(u, v)$. Следовательно, $r(e_{i,j}) \in R$, т. е. $\operatorname{Im}(r\colon \Omega_U \to R \otimes Q) \subset R$. Так как универсальная группа Лазара определена над кольцом без кручения, то мы тем самым доказали теорему.

Теорема 3.2. *Формальная группа геометрических кобордизмов совпадает с универсальной формальной группой Лазара, т. е. гомоморфизм кольца Лазара A в Ω_U, соответствующий группе $F(u, v)$ (см. § 1), является изоморфизмом.*

Роды Хирцебруха с точки зрения теории формальных групп. В силу теоремы 3.2 любой целочисленный род Хирцебруха или, что то же самое, гомоморфизм $\Omega_U \to Z$ определяет формальную группу над Z, и обратно, любая формальная группа над Z определяет род Хирцебруха. При этом род Хирцебруха, определяющий гомоморфизм $\Omega_U \to Z$, может иметь рациональные коэффициенты. Эквивалентные (сильно изоморфные) формальные группы определяются рядами Хирцебруха $Q(z)$, $Q'(z)$, связанными формулой $\frac{z}{Q(z)} = \varphi^{-1}\left(\frac{z}{Q'(z)}\right)$, где $\varphi^{-1}(u) = u + \sum \lambda_i u^{i+1}$, $\lambda_i \in \mathbf{Z}$. Это вытекает из того, что логарифмы формальных групп равны $g_Q(z) = \left(\frac{z}{Q(z)}\right)^{-1}$, и мы имеем по определению $g_Q(z) = g_{Q'}(\varphi(z))$. Пусть задан целочисленный род Хирцебруха, задаваемый рациональным рядом $g_Q(u)$. Тогда Q'-род такой, что $g_Q(u) = g_{Q'}(\varphi(u))$, $\varphi(u) = u + \sum \mu_i u^{i+1}$, $\mu_i \in \mathbf{Z}$, также имеет целые значения на Ω_U. В этом смысл эквивалентности родов Хирцебруха как формальных групп. Рассмотрим, какие примеры формальных групп рассматривались ранее в топологии в связи с известными мультипликативными родами c, T, L, A. Рассмотрим T_y-род (см. [18]). Так как $T_y([CP^n]) = \sum_{i=0}^{n} (-y)^i$, то соответствующая ему формальная группа над кольцом $\mathbf{Z}[[y]]$ имеет вид $F_{T_y} = \frac{u+v+(y-1)uv}{1+uvy}$. При $y = -1$, 0, 1 мы получаем формальные группы, соответствующие эйлеровой характеристике c, роду Тодда T и L-роду Хирцебруха. При всех значениях y группа $F_{T_y}(u, v)$ эквивалентна либо линейной либо мультипликативной. Заметим теперь, что A-род как формальная группа эквивалентен L-роду, и мы получаем, что с точностью до эквивалентности все рассматриваемые ранее в топологии роды Хирцебруха связаны либо с линейной либо с мультипликативной группами.

Мультипликативные когомологические операции и роды Хирцебруха. Каждая мультипликативная когомологическая операция в кобордизмах однозначно задается, с одной стороны, кольцевым гомоморфизмом $\varphi^*\colon \Omega_U \to \Omega_U$, который она индуцирует при представлении из § 1, а с другой стороны, своим значением на геометрическом кобордизме $u \in U^2(CP^\infty)$, т. е. формальным рядом $\varphi(u) = u + O(u^2) \in U^2(CP^\infty) = \Omega_U[[u]]$. Отметим, что ряд $\varphi(u)$ задает сильный изоморфизм универсальной группы $F(u, v) = u + v + \sum e_{i,j} u^i v^j$ с группой

$$\varphi(F(u, v)) = u + v + \sum \varphi^*(e_{i,j}) u^i v^j.$$

В теории характеристических классов кольцевые гомоморфизмы $\Omega_U \to \Omega_U$ задаются «рядами Хирцебруха» $K(1+u) = Q(u)$,

$$Q(u) = \frac{u}{a(u)}, \quad a(u) = u + \sum \lambda_i u^i, \quad \lambda_i \in \Omega_U \otimes Q.$$

С точки зрения рядов Хирцебруха действие ряда $a(u)$ на кольце Ω_U задается формулой $a([CP^n]) = \left[\left(\frac{u}{a(u)}\right)^{n+1}\right]_n$, где $[f(u)]_n$ — n-й коэффициент ряда $f(u)$. Таким образом, каждый формальный ряд $a(u) = u + O(u^2)$ задает кольцевой гомоморфизм $a^*\colon \Omega_U \to \Omega_U$ как мультипликативную операцию в кобордизмах, а так же кольцевой гомоморфизм $a\colon \Omega_U \to \Omega_U$, определенный рядом Хирцебруха $Q(u) = \frac{u}{a(u)}$. Указанные два действия ряда $a(u) = u + O(u^2)$ на кольце Ω_U не совпадают. Например, для $a(u) = u$ имеем $a^*([CP^n]) = [CP^n]$, $a([CP^n]) = 0$, $n > 0$. Как показали В. М. Бухштабер и С. П. Новиков (см. [4]), имеет место [1])

Теорема 3.3. *Преобразование кольца рядов $g\colon a(u) \to a(g(u))$ обладает тем свойством, что $a(u)[x] = a(g(u))^*[x]$ для любого элемента x, где $g(u) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$ — логарифм формальной группы геометрических кобордизмов.*

Обобщенный характеристический класс Тодда. Определение 3.1. *Обобщенным классом Тодда* комплексного расслоения ξ над X называется характеристический класс $T(\xi) \in H^*(X, \Omega_U \otimes Q)$, соответствующий ряду $Q(u) = \frac{u}{g^{-1}(u)}$, $g^{-1}(g(u)) = u$.

Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon M^{2n} \to M^{2m}$ квазикомплексных многообразий и обозначим через $\tau(f)$ элемент $(\tau(M^{2n}) - f^*\tau(M^{2m})) \in \widetilde{K}(M^{2n})$, где τ — касательное расслоение.

Теорема 3.4 (см. [2]). *Имеет место формула* $\mathrm{ch}_U D[f] = f_! T(\tau(f))$, *где $[f]$ — класс бордизмов отображения f, ch_U — характер Черна — Дольда (см. § 2) и $f_!$ — гомоморфизм Гизина в когомологиях.*

В работе В. М. Бухштабера [2] указаны различные формулы, выражающие обобщенный класс Тодда $T(\xi)$ через классические характеристические классы расслоения ξ. Эти формулы в ряде случаев позволяют эффективно вычислять класс бордизмов отображения f. Приведем простейшую из этих формул.

Теорема 3.5. *Пусть η — одномерное расслоение над X и $u = c_1(\eta) \in H^2(X, Z)$, тогда $T(\eta) = \frac{u}{g^{-1}(u)}$ и $g^{-1}(u) = \mathrm{ch}_U \sigma_1(\eta) = u + \sum [M^{2n}] \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$, где $[M^{2n}] = \sigma_1(\xi_{n+1}) \in U^2(S^{2n+2}) \approx \Omega_U^{-2n}$, причем $s_\omega(-\tau(M^{2n})) = 0$, $\omega \neq (n)$, $s_{(n)}(M^{2n}) = -(n+1)!$, $\sigma_1(\xi_{n+1})$ — первый класс Черна в кобордизмах от образующего $\xi_{n+1} \in K(S^{2n+2})$ и s_ω — числа Черна, соответствующие разбиению ω.*

---

[1]) Этот результат, в близкой формулировке, получен также Дж. Адамсом [23].

§ 4. Двузначные формальные группы и степенные системы

Понятие двузначной формальной группы. Пусть $F(u, v) = u + v + \ldots$ — одномерная формальная группа над коммутативным кольцом R с единицей 1, $\bar{u} = -u + O(u^2) \in R[[u]]$ — формальный ряд, задающий обратный элемент в группе $F(u, v)$, т. е. $F(u, \bar{u}) = 0$, и $g_F(u)$ — логарифм группы $F(u, v)$. В работе [4] показано, что формальные ряды $F(u, v) \cdot F(\bar{u}, \bar{v}) + F(u, \bar{v}) \cdot F(\bar{u}, v) = |F(u, v)|^2 + |F(u, \bar{v})|^2$ и $|F(u, v)|^2 \cdot |F(u, \bar{v})|^2$ из кольца $R[[u, v]]$ фактически принадлежат кольцу $R[[x, y]] \subset R[[u, v]]$, где $x = u\bar{u} = |u|^2$, $y = |v|^2$, т. е. имеют вид $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$ соответственно. Рассмотрим над $R[[x, y]]$ квадратное уравнение $\mathcal{Y}(x, y) = Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) = 0$ и обозначим через $B(x) = x + O(x^2) \in R[[x]] \otimes Q$, ряд, который в кольце $R[[u]] \otimes Q \supset R[[x]] \otimes Q$ имеет вид $g_F(u) g_F(\bar{u}) = -g_F^2(u)$. Как заметил Новиков [4], над кольцом R без кручения решения уравнения $\mathcal{Y}(x, y) = 0$ имеют вид

$$F^{\pm}(x, y) = B^{-1}\left(\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)}\right)^2. \tag{4.1}$$

Эти решения, очевидно, не являются формальными рядами от x и y, но, как показывает формула (4.1), обладают своеобразной ассоциативностью. Такие квадратные уравнения и были названы в работе [4] двузначными формальными группами.

Двузначные формальные группы и симплектические кобордизмы. Рассмотрим двузначную формальную группу в кобордизмах, построенную по формальной группе геометрических кобордизмов. Как показано в [4], ряд $B^{-1}(z)$ из формулы (4.1) совпадает с формальным рядом $\mathrm{ch}_U(x) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [N^{4n-4}] \frac{z^n}{(2n)!} \in H^*(CP^\infty, \Omega_U \otimes Q)$, где z — образующая группы $H^4(CP^\infty, \mathbf{Z})$ и $s_{(2n-2)}[N^{4n-4}] = (-1)^n 2 \cdot (2n)! \neq 0$.

Теорема 4.1 (см. [4]). *Для любого $n \geqslant 2$ классы бордизмов $[N^{4n-4}]$ принадлежат образу гомоморфизма $\Omega_{Sp}^{-4n+4} \to \Omega_U^{-4n+4}$. При $n \equiv 1 \bmod 2$ группе $\mathrm{Im}(\Omega_{Sp} \to \Omega_U)$ принадлежат уже элементы $[N^{4n-4}]/2 \in \Omega_U$.*

Каноническое отображение спектров ω: $MS_p \to MU$, соответствующее вложению групп $Sp(n) \subset U(2n)$, определяет эпиморфизм $A^U \to U^*(MSp(n))$ и, следовательно, вложение кольца $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$ в Ω_U. Далее мы будем отождествлять $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$ с его образом в Ω_U. Имеет место вложение i: $\mathrm{Im}(\Omega_{Sp} \to \Omega_U) \subset \mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$, причем гомоморфизм $i \otimes Z\left[\frac{1}{2}\right]$ является изоморфизмом; это легко следует из работы [12]. В дополнение к теореме 4.1 отметим, что элементы $[N^{8n-4}]/2$ принадлежат группе $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$, но не принадлежат к $\mathrm{Im}(\Omega_{Sp} \to \Omega_U)$ (см. [4]). В работе [4] показано, что из теоремы 4.1 и свойств характера Черна, описанных в [2], следует

Теорема 4.2. *Пусть $\Lambda \subset \Omega_U$ — кольцо, порожденное коэффициентами двузначной формальной группы в кобордизмах:*

а) $\Lambda \subset \mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$,

б) $\Lambda\left[\frac{1}{2}\right] \approx \Omega^*_{Sp}(*) \otimes Z\left[\frac{1}{2}\right]$.

Так как кольцо Λ существенно меньше кольца Ω_U, то над $\Omega_U \otimes Q$ существует много одномерных формальных групп, квадраты модулей которых порождают двузначную формальную группу в кобордизмах. В. М. Бухштабером показано [21], что минимальная (в смысле кольца коэффициентов) группа из таких одномерных групп над $\Omega_U \otimes Q$ однозначно определяется мультипликативным проектором $\varkappa^*$: $\Omega_U\left[\frac{1}{2}\right] \to \Omega_U\left[\frac{1}{2}\right]$, значение которого на геометрическом кобордизме $u \in U^2(CP^\infty)$ равно $\varkappa(u) = \sqrt{-u\bar{u}} = u + O(u^2) \in U^2(CP^\infty)\left[\frac{1}{2}\right]$. В. М. Бухштабером доказана [21]

Теорема 4.3. а) *Для того чтобы элемент* $\sigma \in \Omega_U$ *принадлежал группе* $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U) \subset \Omega_U$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varkappa^*(\sigma) = \sigma$.

б) $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U) \cong \mathrm{Im}\,\varkappa \cap \Omega_U$.

Следствие 4.1. *Композиция преобразований*

$$Sp^*(X)\left[\frac{1}{2}\right] \xrightarrow{\omega} U^*(X)\left[\frac{1}{2}\right] \xrightarrow{\varkappa} \mathrm{Im}\left(\varkappa U^*(X)\left[\frac{1}{2}\right]\right)$$

устанавливает изоморфизм теории когомологий $Sp^*\left[\frac{1}{2}\right]$ *с теорией, выделяемой в* $U^*\left[\frac{1}{2}\right]$ *проекционным оператором* $\varkappa$.

Алгебраические свойства двузначных формальных групп. В. М. Бухштабером [21] дано аксиоматическое определение двузначной формальной группы $\mathcal{Y}(x, y) = Z^2 - \Theta_1(x, y) Z + \Theta_2(x, y) = 0$, включающее в себя как частный случай квадратное уравнение, определенное квадратом модуля одномерной формальной группы. Мы не будем здесь приводить это определение ввиду его громоздкости, а только отметим, что в определении требуется существование такого формального ряда $\varphi(x)$, что $\Theta_2(x, \varphi(x)) = 0$. Ряд $\varphi(x)$ имеет смысл обратного элемента и играет большую роль при классификации двузначных формальных групп. Например, имеет место

Теорема 4.4. *Двузначная формальная группа в кобордизмах, рассматриваемая над кольцом* $\Lambda \subset \Omega_U$ *коэффициентов рядов* $\Theta_1(x, y)$ *и* $\Theta_2(x, y)$, *является универсальной для двузначных групп над кольцами* R *без кручения, у которых* $\varphi(x) = x$, *т. е.* $\Theta_2(x, x) = 0$.

Формальные степенные системы, не лежащие в формальных группах. Пусть $\mathcal{Y}(x, y) = Z^2 - \Theta_1(x, y) Z + \Theta_2(x, y) = 0$—двузначная формальная группа над кольцом $R[[x, y]]$, определенная квадратом модуля одномерной группы $F(u, v) \in R[[u, v]]$. Рассмотрим последовательность формальных рядов $\varphi_k(x) \in R[[x]]$: $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \Theta_1(x, x)$, ..., $\varphi_n(x) = \Theta_1(x, \varphi_{n-1}(x)) - \varphi_{n-2}(x)$, ... Ряды $\varphi_k(x) = k^2x + O(x^2)$, рассматриваемые в кольце $R[[u]] \supset R[[x]]$, имеют вид $[u]_k\,[\bar{u}]_k$, где $[u]_k$ — k-я степень элемента u в группе $F(u, v)$. Следовательно, последовательность рядов $\varphi_k(x)$ образует формальную степенную систему типа $s = 2$. В случае, когда $R = \Omega_U$ и $F(u, v)$ — формальная группа геометрических кобордизмов, легко показать (см. [4]), что система $\{\varphi_k(x)\}$ не является системой возведения в степень ни в какой формальной группе над Ω_U. Отметим, что система $\{\varphi_k(x)\}$ имеет важные топологические применения и впервые возникла в неявном виде в работе Новикова [15] при описании неподвижных точек действия 2-групп обобщенных кватернионов на квазикомплексных многообразиях.

В заключение укажем, что конструкция степенной системы $\varphi_k(x)$ имеет естественное обобщение. Пусть $F(u, v)$ — формальная группа над кольцом R без кручения и $g_F(u)$ — ее логарифм. Рассмотрим полный набор ($\xi_0 = 1, \ldots, \xi_{m-1}$) корней m-й степени из 1. Положим $B_m^{-1}(-y) = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(\xi_j \sqrt[m]{y})$, $x = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(\xi_j g_F(u))$. Тогда $-B_m(x) = g_F(u)^m$, и мы получаем формальную степенную систему

$$F_k^{(m)}(x) = B_m^{-1}(k^m B_m(x)) = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(k\xi_j g_F(u))$$

типа $s = m$. Коэффициенты ряда $F_k^{(m)}(x)$ заведомо лежат в кольце R для формальных групп $F(u, v)$ с комплексным умножением на ξ_j (возведением в степень ξ_j). Эта конструкция проходит для формальной группы геометрических кобордизмов над кольцом $\Omega_U \otimes \mathbf{Z}_p$ и $m = p-1$, где $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Как и в случае $m = 2$, можно рассмотреть также m-значную формальную группу, задаваемую алгебраическим уравнением степени m, решение которого имеет вид $F(x, y) = B_m^{-1}(\sqrt[m]{B_m(x)} + \sqrt[m]{B_m(y)})^m$.

§ 5. Неподвижные точки периодических преобразований в терминах формальных групп

В работе Коннера и Флойда [6] впервые было указано, что язык теории бордизмов чрезвычайно удобен при изучении неподвижных точек гладких периодических преобразований. Использование формальных групп позволило систематизировать и далеко обобщить результаты в этой области.

Основные конструкции и понятия. Пусть M^n — гладкое квазикомплексное замкнутое многообразие, T — гладкое преобразование многообразия M^n, $T^p = \mathrm{id}$, p — простое число, и пусть T сохраняет квазикомплексную структуру многообразия M^n. Легко доказать, что множество $X \subset M^n$ неподвижных точек преобразования T, т. е. таких точек $x \in M^n$, что $Tx = x$, образует несвязное объединение конечного числа замкнутых подмногообразий N_i с естественной квазикомплексной структурой на них. При этом можно так выбрать трубчатые окрестности U_i многообразий N_i, что U_i являются пространствами нормальных расслоений вложений N_i в M, а действие преобразования T линейно на U_i и свободно вне нулевых сечений $N_i \subset U_i$. Таким образом, границы трубчатых окрестностей ∂U_i являются квазикомплексными многообразиями со свободным действием группы Z_p и поэтому определяют элемент бордизмов $\alpha(T)$ бесконечномерной линзы BZ_p, $\alpha(T) \in U_{n-1}(BZ_p)$. Элемент $\alpha(T)$ определяется только поведением преобразования T вблизи неподвижных подмногообразий N_i. Ясно, что $\alpha(T) = 0$, поскольку $\bigcup_i \partial U_i = \partial(M^n \setminus \bigcup_i U_i)$, а действие преобразования T на многообразии $M^n \setminus \bigcup_i U_i$ свободно. Следовательно, задача классификации гладких квазикомплексных многообразий с действием группы Z_p в терминах бордизмов сводится к двум задачам: а) к описанию действия группы Z_p вблизи множества неподвижных точек и б) нахождению таких наборов неподвижных подмногообразий, чтобы $\alpha(T) = 0$.

Постановка задачи. Сначала уточним, что мы будем понимать под классификацией действий группы Z_p в терминах бордизмов. Будем говорить, что квазикомплексное многообразие M^n с действием группы Z_p бордантно нулю, если найдется такое квазикомплексное многообразие с границей W и такое квазикомплексное действие T' на нем, что $(T')^p = \mathrm{id}$, $\partial W = M$, $T' \mid \partial W = T$. Мы будем изучать классы бордантных многообразий в указанном выше смысле. Поведение преобразования T вблизи неподвижных подмногообразий легко описывается. Известно, что если на комплексном расслоении ξ действует группа Z_p неподвижно на базе, то расслоение ξ представляется в виду суммы $\xi = \bigoplus_{i=1}^{p} \xi_i$, а действие группы Z_p определяется на расслоении ξ_i одним из неприводимых унитарных представлений группы Z_p. Таким образом, если T — образующая группы Z_p, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$, то $T(x) = \zeta^i x$ для $x \in \xi_i$. В классе бордантных многообразий с действием группы Z_p неподвижная компонента N_i определяет бордизм суммы $(p-1)$ расслоения, т. е.

$$\beta(N_i) \in U_{k_i}\left(\prod_{j=1}^{p-1} BU(l_j^i)\right), \quad \text{где} \quad \dim N_i = k_i,\ \dim \xi_j = l_j^i.$$

Таким образом, если $\Omega_{U,p}^n$ — группа n-мерных бордизмов с действием группы Z_p, то существует отображение

$$\beta\colon \Omega_{U,p}^n \longrightarrow \bigoplus_{k+2\Sigma l_i = n} U_k\left(\prod BU(l_i)\right),$$

сопоставляющее многообразию с действием группы Z_p набор бордизмов, определяемый компонентами неподвижного подмногообразия.

Вторая задача заключается в том, чтобы для любого бордизма

$$x \in \bigoplus_{k+2\Sigma l_i = n} U_k\left(\prod BU(l_i)\right)$$

ответить на вопрос, реализуется ли элемент x в качестве множества неподвижных точек некоторого квазикомплексного действия группы Z_p. Как уже указывалось, существует отображение

$$\alpha\colon \bigoplus_{k+2\Sigma l_i = n} U_k\left(\prod BU(l_i)\right) \longrightarrow U_{n-1}(BZ_p),$$

причем, если $\alpha(x) = 0$, то элемент x реализуется как множество неподвижных точек действия группы Z_p. Другими словами, если A — кольцо всех бордизмов

$$A = \bigoplus_{(k,\, l_1,\, \ldots,\, l_{p-1})} U_k\left(\prod BU(l_i)\right),$$

то последовательность $\Omega_{U,p}^* \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\alpha} U_*(BZ_p)$ точна. Легко усмотреть, что α является эпиморфизмом, а $\operatorname{Ker}\beta \approx p\Omega_U^*$. Интересен случай такого действия группы Z_p, когда неподвижное подмногообразие состоит только из изолированных точек или из подмногообразий с тривиальным нормальным расслоением. В последнем случае неподвижное подмногообразие определяется бордизмом $x \in \Omega_U^k$ и набором весов $x_1, \ldots, x_{\frac{n-k}{2}}$ представления группы Z_p в нормальном расслоении.

Основные формулы. Интересные связи с формальной группой в кобордизмах концентрируются вокруг описания гомоморфизма α (подробное описание см. в [4]). Известно, что кольцо кобордизмов пространства BZ_p можно представить в виде

$$(5.1) \qquad U^*(BZ_p) = \Omega_U[[u]]/p\Psi^p(u) = 0.$$

Тогда для изолированной неподвижной точки с набором весов $(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место формула, полученная Г. Г. Каспаровым [5], А. С. Мищенко [10], С. П. Новиковым [15].

$$(5.2) \qquad \alpha(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{u}{g^{-1}(x_j g(u))} \cap \alpha(1, \ldots, 1),$$

где $g(u)$ логарифм формальной группы. Из равенства (5.1) следует, что правая часть формулы (5.2) имеет смысл. В общем случае мультипликативный базис кольца A над кольцом Ω_U образуют многообразия CP^k с одномерным расслоением Хопфа и весом x. Это значит, что элементы кольца A определяются последовательностью чисел $((k_1, x_1), \ldots, (k_l, x_l))$, $\sum(k_i+1)=n$.

Рассмотрим мероморфный дифференциал Ω с полюсами при $z = v$ на формальной группе $f(u, v)$, где $\Omega = \Omega(u, z)\, dz = \frac{dg(z)}{f(n, \bar{z})}$, $\bar{z} = g^{-1}(-g(z))$, инвариантен относительно сдвига $u \to f(u, w)$, $z \to f(z, w)$, $\Omega \to \Omega$. Этот дифференциал есть аналог $dz/(u-z)$ на линейной группе. Пусть $t = \frac{z}{u}$ и $dt = \frac{dz}{u}$, где u — параметр. Имеем $\Omega = \Omega(u, z)\, dz = G(u, t)\, dt$, причем G имеет полюс при $t = 1$ для всех z, u. Тогда как показано в [11] (см. также [4]), имеет место формула

$$\alpha((k_1, x_1), \ldots, (k_l, x_l)) =$$
$$= \left[\prod_{q=1}^{l} G(g^{-1}(x_q g(u)), t_q) \frac{u}{g^{-1}(x_q g(u))}\right]_{k_1, \ldots, k_l} \cap \alpha_{2n-1}(1, \ldots, 1),$$

где $[\quad]_{k_1, \ldots, k_l}$ означает коэффициент при $t_1^{k_1} \ldots t_l^{k_l}$.

Связь с формулой Атьи — Ботта. Кроме описания допустимых наборов неподвижных точек, интересен и вопрос о том, на каком многообразии этот допустимый набор неподвижных точек реализуется, т. е. описание отображения $\operatorname{Ker} \alpha \to \Omega_U \otimes Z/pZ$. Оказывается, что допустимый набор

$$(x_1, \ldots, x_n) - \prod_{j=1}^{n} \frac{u}{x_j \Psi^{x_j}(u)} \cap (1_1, \ldots, 1_n),$$

где

$$u^k \cap (1_1, \ldots, 1_n) = (1_1, \ldots 1_{n-k}),$$

реализуется на многообразии из класса

$$\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{u}{x_j \Psi^{x_j}(u)}\right]_n \in \Omega_U^{2n} \otimes Z/pZ.$$

Из работы Атьи — Ботта [1] можно извлечь следующую формулу для рода Тодда многообразия M^n в терминах весов преобразования в неподвижных точках

$$(5.3)\qquad -T(M^n) \equiv \sum_j \mathrm{Tr}\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\exp\Big(-\frac{2\pi i x_k^j}{p}\Big)\Big)^{-1}\Big) \bmod p,$$

где $\mathrm{Tr} : Q(\sqrt[p]{1}) \to Q$ — теоретико-числовой след, а суммирование в (5.3) ведется по всем неподвижным точкам. Интересно было получить аналогичный результат Атьи и Ботта в кобордизмах. Эта задача связана с построением гомоморфизма $\gamma\colon A \to \Omega_U \otimes Q_p$, совпадающего с $\prod_j \frac{u}{x_j \Psi^{x_j}(u)}$ на $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Здесь мы под кольцом A понимаем только неподвижные подмногообразия с тривиальным расслоением. Как показано в [4], формула для гомоморфизма γ имеет вид

$$(5.4)\qquad \gamma(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{1}{x_1 \ldots x_n}\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{u}{\Psi^{x_j}(u)}\right)\frac{u}{\Psi^p(u)}\right]_n.$$

Применяя к (5.4) род Тодда $T : \Omega_U \to Z$, мы получим числовую функцию

$$(5.5)\qquad \mathfrak{T}\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{pu}{1-(1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{1-(1-u)^{x_k}}\right]_n.$$

Однако она не совпадает с функцией Атьи и Ботта

$$(5.6)\qquad AБ(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi i x_k}{p}\right)\right)^{-1}\right).$$

Функции (5.5) и (5.6) совпадают только на $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Точнее, пусть $KФ(x_1, \ldots, x_n)_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, — композиция функций

$$(5.7)\qquad \left[\frac{u}{\Psi^p(u)}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{x_k \Psi^{x_k}(u)}\right]_m$$

с родом Тодда. Отметим, что для допустимого набора неподвижных точек функции (5.7) обращаются в нуль.

Теорема 5.1 (см. [4]). $AБ(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{m=0}^{n-1} KФ(x_1, \ldots, x_n)_m \bmod p\mathbf{Z}p$.

Из теоремы 5.1 следует, что результаты Атьи и Ботта о вычислении рода Тодда многообразия по инвариантам неподвижных точек являются редукцией с помощью рода Тодда аналогичной задачи в кобордизмах. Интересно отметить, как указал Д. К. Фаддеев, что формула Атьи — Ботта имеет выражение в терминах формальной группы, соответствующей мультипликативному гомоморфизму $T\colon \Omega_U \to Z$, — так называемой мультипликативной формальной группы. А именно (см. [4])

$$AБ(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m=0}^{n} \left[\frac{pu}{\langle u\rangle_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{\langle u\rangle_{x_k}} \right]_m = -\left[\frac{p\langle u\rangle_{p-1}}{\langle u\rangle_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{\langle u\rangle_{x_k}} \right]_n \operatorname{mod} p\mathbf{Z}p,$$

где $\langle u\rangle_q$ — q-я степень элемента u в формальной группе $f(u, v) = u + v - uv$.

Действие окружности на квазикомплексных многообразиях. В последнее время С. Гусейн-заде изучил неподвижные точки при действии окружности S^1 на квазикомплексных многообразиях. Как и в случае групп Z_p, можно построить точную последовательность Коннера — Флойда $0 \to U_*(S^1) \xrightarrow{\gamma} \bigoplus U_*(ПBU(n_i)) \xrightarrow{\alpha} U_*(S^1, \{Z_s\}_s) \to 0$, где средний член описывает структуру действия S^1 вблизи неподвижных точек, а последний член обозначает группу бордизмов с действием S^1 без неподвижных точек (стационарные точки допускаются). Замечательный результат С. Гусейна-заде заключается в описании последнего члена в этой последовательности. А именно,

$$U_*(S^1, \{Z_s\}_s) \approx \bigoplus U_*\left(\prod_i BU(n_i) \times BU(1)\right). \tag{5.8}$$

После установления формулы (5.8) описание гомоморфизма α легко сводится к алгебраической задаче с использованием языка формальных групп. Ввиду некоторой громоздкости формул, здесь мы их не приводим. (См. изложение результатов С. Гусейн-заде в [21].)

ДОПОЛНЕНИЕ I [1]

СТЕПЕНИ СТИНРОДА В КОБОРДИЗМАХ И НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЛЬЦА БОРДИЗМОВ КВАЗИКОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЙ [2]

Изоморфизмы Тома в кобордизмах. Для любого комплексного расслоения ξ над X, $\dim \xi = n$, определен универсальный класс Тома $u(\xi) \in U^{2n}(M(\xi))$, соответствующий классифицирующему отображению $M(\xi) \to MU(n)$, где $M(\xi)$ — комплекс Тома расслоения ξ. Умножение на элемент $u(\xi)$ определяет функториальный изоморфизм Тома $\varphi(\xi)\colon U^q(X) \to \widetilde{U}^{q+2n}(M(\xi))$, $\varphi(\xi)(\alpha) = u(\xi)\alpha$. Рассмотрим пару комплексов $i\colon Y \subset X$ и обозначим через ξ' ограничение расслоения ξ на Y. Определен гомоморфизм

$$\varphi(\xi, \xi')\colon \widetilde{U}^q(X/Y) \to \widetilde{U}^{q+2n}(M(\xi)/M(\xi')), \quad \varphi(\xi, \xi')(\alpha) = u(\xi)\alpha.$$

Так как $i^*u(\xi) = u(\xi')$ и $\varphi(\xi)$, $\varphi(\xi')$ являются изоморфизмами, то $\varphi(\xi, \xi')$ — изоморфизм. Пусть ξ и η — расслоения над X. Рассмотрим композицию отображений

$$\Delta\colon M(\xi + \eta)/M(\xi' + \eta') \xrightarrow{j} M(\xi \times \eta)/M(\xi' \times \eta') \xrightarrow{\approx} (M(\xi) \wedge M(\eta))/(M(\xi') \wedge M(\eta')) \to M(\xi) \wedge (M(\eta)/M(\eta')),$$

[1]) Дополнение написано В. М. Бухштабером по работам Т. Дика [19] и Д. Квиллена [20].

[2]) Кольцо бордизмов квазикомплексных многообразий было вычислено давно (Милнор, Новиков) методом спектральной последовательности Адамса. Цель нового метода вычисления этого кольца, предложенного Квилленом, заключается в том, что он не использует спектральной последовательности Адамса.

где $M(\xi\times\eta)$ — комплекс Тома расслоения $\xi\times\eta$ над $X\times X$, отображение j определено диагональю $X\to X\times X$ и $(X\times Y)/X\times * \cup *\times Y = X\wedge Y$, $*$ — отмеченная точка. Определен гомоморфизм

$$\Phi(\xi)\colon \widetilde{U}^q(M(\eta)/M(\eta'))\to\widetilde{U}^{q+2n}(M(\xi+\eta)/M(\xi'+\eta')),$$

$$\Phi(\xi)\,\alpha=\Delta^*(u(\xi)\cdot\alpha).$$

Так как $u(\xi\times\eta)=u(\xi)\cdot u(\eta)\in U^*(M(\xi\times\eta))$, то $\Phi(\xi)\,\varphi(\eta)=\varphi(\xi+\eta,\ \xi'+\eta')$, следовательно, $\Phi(\xi)$ изоморфизм.

Внешние степени Стинрода. Пусть $S^\infty=\lim S^{2n+1}$ — бесконечномерная сфера и $S^\infty\to BZ_p=L_p^\infty$ — универсальное Z_p-расслоение. Для любого X с отмеченной точкой $*$ обозначим через $E(X)$ пространство $(S^\infty\cup *)\wedge\underbrace{X\wedge\ldots\wedge X}_{p\text{ раз}}$. На $E(x)$ определено каноническое действие группы Z_p, ограничение которого на $X\wedge\ldots\wedge X$ представляет собой перестановку сомножителей. Положим $E_p(X)=E(X)/Z_p$. Соответствие $X\mapsto E_p(X)$, очевидно, функториально относительно отображений $X\to Y$. Рассмотрим над комплексом $V=S^\infty\times X\times\ldots\times X$ расслоение $\xi\times\ldots\times\xi$, поднятое с $X\times\ldots\times X$. Так как действие группы Z_p на V свободно, то определено расслоение $\xi_{(p)}=(\xi\times\ldots\times\xi)/Z_p\to V/Z_p$. Имеет место равенство $E_p(M(\xi))=M(\xi_{(p)})$.

Определение I.1. *Внешней степенью Стинрода в U-кобордизмах* называется совокупность $P_e=\{P_e^{2n},\ n\in\mathbf{Z}\}$ естественных преобразований $P_e^{2n}\colon\widetilde{U}^{2n}(X)\ \widetilde{U}^{2np}(E_p(X))$, такая, что:

1) $i^*P_e^{2n}(a)=a^p\in\widetilde{U}^{2np}(X\wedge\ldots\wedge X)$, где $i\colon X\wedge\ldots\wedge X\to E_p(X)$, $i(x_1,\ldots,x_p)=(e,x_1,\ldots,x_p)$, $e\in S^\infty$ — вложение;

2) $P_e^{2(n+m)}(ab)=T^*(P_e^{2n}(a)\,P_e^{2m}(b))\in\widetilde{U}^{2(n+m)p}(E_p(X\wedge Y))$, где $a\in\widetilde{U}^{2n}(X)$, $b\in\widetilde{U}^{2m}(Y)$, $ab\in\widetilde{U}^{2(n+m)}(X\wedge Y)$ и $T\colon E_p(X\wedge Y)\to E_p(X)\wedge E_p(Y)$, $T(e,x_1,y_1,\ldots,x_p,y_p)=(e,x_1,\ldots,x_p,e,y_1,\ldots,y_p)$;

3) $P_e^{2n}(u(\xi))=u(\xi_{(p)})\in\widetilde{U}^{2np}(M(\xi_{(p)}))$, где ξ — расслоение над X, $\dim X=n$.

Из аксиом следует, что для канонического элемента $u_n\in U^{2n}(MU(n))$ имеет место формула $P_e^{2n}u_n=u(\eta_{n,(p)})$, где η_n — универсальное $U(n)$-расслоение над $BU(n)$. Пусть теперь элемент $a\in\widetilde{U}^{2n}(X)$ представлен отображением $f\colon S^{2k}X\to MU(k+n)$. Так как $S^{2k}X=M(k)/M(k')$, где k — тривиальное k-мерное расслоение над X и k' — ограничение его на $*\in X$, то $E_p(S^{2k}X)=M(k_{(p)})/M(k'_{(p)})$, где $k'_{(p)}$ — ограничение расслоения $k_{(p)}$ на подкомплекс $Y\subset(S^\infty\times X\times\ldots\times X)/Z_p$, образованный точками $(e,x_1,\ldots,x_p)$, у которых хотя бы одна из координат $x_i=*\in X$. Так как $E_p(X)=M(0)/M(0')$, то определено отображение $\Delta\colon E_p(S^{2k}X)=M(k_{(p)})/M(k'_{(p)})\to E_p(X)\wedge E_p(S^{2k}X)$, индуцирующее изоморфизмом $\Phi(k_{(p)})\colon U^*(E_p(X))\to U^*(E_p(S^{2k}X))$, $\Phi(k_{(p)})(a)=\Delta^*(u(k_{(p)})\cdot a)$.

Так как $f^*u_{k+n}=u(k)\cdot a$, то мы получаем $E_p(f)^*(u(\eta_{k+n,(p)}))=\Phi(k_{(p)})(P_e^{2n}a)$. Из свойств изоморфизма $\Phi(k_{(p)})$ легко следует, что эта формула однозначно определяет элемент $P_e^{2n}(a) \in \widetilde{U}^{2np}(E_p(X))$. Таким образом, внешние степени Стинрода в кобордизмах существуют и единственны.

Степени Стинрода в кобордизмах. Диагональное отображение $X \to X \wedge \ldots \wedge X$ определяет вложение $i\colon (L_p^\infty \cup *) \wedge X = (S^\infty \cup *) \wedge \wedge X/Z_p \to E_p(X)$.

Определение I.2. *Степенью Стинрода* называется совокупность естественных преобразований $P = \{P^{2n}\colon \widetilde{U}^{2n}(X) \to \widetilde{U}^{2np}((L_p^\infty \cup *) \wedge X),\ n \in Z\}$, такая, что $P^{2n}(a) = i^* P_e^{2n} a$.

Пусть $j\colon BU(n) \to BU(n) \times \ldots \times BU(n)$ — диагональ. Вложение $i\colon (L_p^\infty \cup *) \wedge MU(n) \to E_p(MU(n))$ разлагается в композицию $(L_p^\infty \cup *) \wedge \wedge MU(n) \xrightarrow{\lambda} M((j^*\eta_n)_{(p)}) \xrightarrow{\bar{j}} M(\eta_{n,(p)}) = E_p(MU(n))$. Пусть C^p — p-мерное комплексное линейное пространство, на котором группа Z_p действует перестановкой координат. Рассмотрим комплексное расслоение $\widetilde{v} = S^\infty \times_{Z_p} C^p \to L_p^\infty$. Непосредственно следует, что $M((j^*\eta_n)_{(p)})$ является пространством Тома расслоения $\widetilde{v} \otimes \eta_n \to L_p^\infty \times BU(n)$. Вычислим класс Черна $\sigma_{np}(\widetilde{v} \otimes \eta_n) \in U^{2np}(L_p^\infty \times BU(n))$. Разлагая представление группы Z_p на C^p в сумму одномерных представлений, получаем, что $\widetilde{v}$ изоморфно сумме расслоений $1 + \sum_{q=1}^{p-1} \eta^q$, где η — каноническое расслоение над L_p^∞. Далее, представим η_n в виде суммы формальных одномерных расслоений $\sum_{l=1}^{n} \mu_l$:

$$\sigma_{np}(\widetilde{v} \otimes \eta_n) = \prod_{l=1}^{n} \prod_{q=0}^{p-1} \sigma_1(\eta^q \otimes \mu_l) = \prod_{l=1}^{n} \prod_{q=0}^{p-1} \left(\sigma_1(\eta^q) + \sigma_1(\mu_l) + \sum e_{i,j} \sigma_1(\eta^q)^i \sigma_1(\mu_l)^j\right),$$

где $e_{i,j} \in \Omega_U^{-2(i+j-1)}$ — коэффициенты формальной группы геометрических кобордизмов. Обозначим кольцо, порожденное элементами $e_{i,j}$, через $A \subset \Omega_U$. Так как элементы $\sigma_1(\eta^q) \in U^2(L_p^\infty)$ представляют собой формальные ряды от $u = \sigma_1(\eta)$ с коэффициентами из подкольца $A \subset \Omega_U$, то получаем

$$\sigma_{np}(\widetilde{v} \otimes \eta_n) = \sigma_n(\eta_n)\left(w^n + \sigma_n(\eta_n)^{p-1} + \sum w^{n-|\omega|} \alpha_\omega(u)\, \sigma_\omega(\eta_n)\right), \tag{I.1}$$

где $w = \sigma_{p-1}\left(\sum_{q=1}^{p-1} \eta^q\right)$, $\sigma_\omega(\eta_n)$ — характеристический класс, соответствующий разбиению $\omega = (i_1, \ldots, i_n)$, $|\omega| = \sum i_k$ и $\alpha_\omega(u) \in U^*(L_p^\infty)$ — полином от $u = \sigma_1(\eta)$ с коэффициентами из кольца A. Заметим теперь, что пространство $(L_p^\infty \cup *) \wedge MU(n)$ является комплексом Тома расслоения $\eta_n \to L_p^\infty\, BU(n)$, причем отображение комплексов Тома $\lambda\colon (L_p^\infty \cup *) \wedge \wedge MU(n) \to M((j^*\eta_n)_{(p)})$ тождественно на базе. Напомним, что когомологические операции $S_\omega(u_n)$ можно определить по формуле $S_\omega(u_n) = u_n \cdot \sigma_\omega(\eta_n)$. Имеем $P^{2n} u_n = i^* P_e^{2n} u_n = \lambda^* \bar{j}^* u(\eta_{n,(p)}) = \lambda^* u((j^*\eta_n)_{(p)}) = w^n u_n + u_n^p + \sum w^{n-|\omega|} \alpha_\omega(u) S_\omega(u_n)$. Здесь мы использовали тот факт, что при ограничении класса Тома $u(\xi)$ на нулевое сечение расслоения ξ он, по определению, переходит в характеристический класс $\sigma_n(\xi)$, где $n = \dim \xi$.

Теорема I.1. *Пусть элемент* $a \in U^{2n}(X)$ *представлен отображением* $f\colon S^{2k} X \to MU(k+n)$; *тогда в кольце* $U^*(L_p^\infty \times X)$ *имеет место формула*

$$w^k P^{2n} a = w^{n+k} a + \sum w^{n-|\omega|} \alpha_\omega(u) S_\omega(a),$$

где $w = \sigma_{p-1}\left(\sum_{q=1}^{p-1} \eta^q\right) \in U^*(L_p^\infty)$ *и* $\alpha_\omega(u) \in U^*(L_p^\infty)$ — *полиномы от* u *с коэффициентами из кольца* A, *порожденного коэффициентами закона умножения формальной группы геометрических кобордизмов.*

Доказательство. Пусть $u(k) \in \tilde{U}^{2k}(S^{2k}) = Z$ — образующий. Имеем $f^* u_{k+n} = u(k) \cdot a$. Следовательно, $f^* P^{2(k+n)} u_{k+n} = T^*(P^{2k} u(k) \cdot P^{2n}(a))$, где $T\colon (L_p^\infty \cup *) \wedge S^{2k} X \to (L_p^\infty \cup *) \wedge S^{2k} \wedge (L_p^\infty \cup *) \wedge X$. Элемент $u(k)$ представлен вложением $S^{2k} \subset MU(k)$, следовательно, $P^{2k} u(k) = w^k u(k)$. Используя теперь формулу для элемента $P^{2(+kn)} u_{k+n}$, мы получаем доказательство теоремы.

Вычисление кольца бордизмов квазикомплексных многообразий. Стандартные рассуждения из гомотопической топологии, не использующие информации о кольце Ω_U, показывают, что если каноническое отображение $\mu\colon U^*(X) \to H^*(X, Z)$ является эпиморфизмом, и группа $H^*(X, Z)$ не имеет кручения, то группа $U^*(X)$ является свободным Ω_U-модулем (см. [8]), дополнение). Так как построение характеристических классов $\sigma_\omega(\xi)$ в кобордизмах также проводится независимо от результатов о кольце Ω_U, и кроме того, $\mu\sigma_\omega(\xi) = c_\omega(\xi) \in H^{2|\omega|}(X, Z)$, где c_ω — классические классы Черна (см. [6], дополнение), то мы получаем, что группы $U^*(BU(n) \times BU(k))$ и $U^*(MU(n))$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, являются свободными Ω_U-модулями. В частности, $U^*(CP^\infty \times CP^\infty) = \Omega_U[[u, v]]$, где u, v — первые классы Черна в кобордизмах канонических одномерных расслоений η_1 и η_2. Пусть $A = Z[y_1, \ldots, y_n]$ — универсальная группа Лазара и $\varphi\colon A \to \Omega_U$ — кольцевой гомоморфизм, соответствующий формальной группе геометрических кобордизмов

$$F(u, v) = \sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) \in U^2(CP^\infty \times CP^\infty).$$

В § 3 мы показали прямым вычислением, что коэффициенты логарифма $g(u)$ группы $F(u, v)$ алгебраически независимы. А так как коэффициенты логарифма группы Лазара порождают кольцо $A \otimes Q$, то мы получаем, что φ — мономорфизм.

Рассмотрим формальный ряд $\Theta_p(u) = \dfrac{[u]_p}{u} = p + \alpha_1 u + \ldots$ над $\Omega_U[[u]]$, где $[u]_p$ — p-я степень элемента u в формальной группе.

Лемма I.1. *Имеет место точная последовательность*

$$\Omega_U \xrightarrow{\Theta_p(u)} U^q(L_p^\infty) \xrightarrow{u} U^{q+2}(L_p^\infty),$$

где $u = \sigma_1(\eta)$, η — *каноническое расслоение над* L_p^∞, *и гомоморфизмы в последовательности являются умножениями на элементы* $\Theta_p(u)$ *и* u.

Доказательство. Символом η мы обозначим также каноническое расслоение над CP^∞. Рассмотрим расслоение $\eta^p \to CP^\infty$, и обозначим через $E \to CP^\infty$ расслоение со слоем диск D^2, ассоциированное с η^p. Имеем $\partial E = L_p^\infty$, $E/\partial E = M(\eta^p)$. Из рассмотрения гомоморфизма $\mu\colon U^*(L_p^\infty) \to H^*(L_p^\infty, Z)$ следует, что гомоморфизм $U^*(E) = U^*(CP^\infty) \to U^*(L_p^\infty)$ является эпиморфизмом, а так как $\sigma_1(\eta^p)=[u]_p$, то мы получаем, что имеет место точная последовательность $0\leftarrow U^*(L_p^\infty)\leftarrow U^*\ (CP^\infty)\xleftarrow{[u]_p}\widetilde{U}^*(M(\eta^p))\leftarrow 0$. Доказательство леммы теперь следует из того, что гомоморфизм умножения на u в кольце $U^*(CP^\infty)=\Omega_U[[u]]$ является мономорфизмом.

Теорема I.2. *Гомоморфизм* $\varphi\colon Z[y_1,\ldots,y_n,\ldots]\to\Omega_U$ *группы Лазара в* Ω_U, *соответствующий формальной группе геометрических кобордизмов, является изоморфизмом.*

Доказательство. Нам осталось доказать только, что φ является эпиморфизмом. Положим $C=\operatorname{Im}\varphi\subset\Omega_U$ и покажем, что для любого $n\geqslant 0$ имеет место изоморфизм $U^*(S^n)=C\sum\limits_{q\geqslant 0}U^q(S^n)$. Заметим сначала, что ввиду изоморфизма $U^q(S^n)\simeq U^{q+1}(S^{n+1})$ и конечнопорожденности группы $U^q(S^n)$ для любого q достаточно доказать, что для любого простого p имеет место изоморфизм $\widetilde{U}^{ev}(S^n)\otimes Z_p=C\cdot\sum\limits_{q>0}U^{2q}(S^n)\otimes Z_p$. Положим $R_p=C\cdot\sum\limits_{q>0}U^{2q}(S^n)\otimes Z_p$. Допустим, что для всех $j<q$ уже доказан изоморфизм $R_p^{-2j}=\widetilde{U}^{-2j}(S^n)\otimes Z_p$. Для $q=0$ этот изоморфизм очевиден. Пусть элемент $a\in\widetilde{U}^{-2q}(S^n)$ представлен отображением $f\colon S^{2k}\ S^n\to MU\ (k-q)$: тогда по теореме I.1 имеет место формула

$$w^kP^{-2q}a=w^{k-q}a+\sum w^{n-|\omega|}\alpha_\omega(u)\cdot S_\omega(a). \tag{I.2}$$

Элемент $w\in U^{2np}(L_p^\infty)$ представляет собой формальный ряд вида $(p-1)!\,u^{p-1}+O(u^p)$ с коэффициентами в кольце C. По предположению индукции $S_\omega(a)\in R_p$, $|\omega|>0$, и мы из формулы (I.2) получаем для некоторого m формулу

$$u^m(w^qP^{-2q}a-a)=\psi(u)\in U^*(L_p^\infty\times S^n)\approx U^*(L_p^\infty)\otimes_{\Omega_U}U^*(S^n), \tag{I.3}$$

где $\psi(u)\in R_p[[u]]$. Допустим, что $m\geqslant 1$ есть наименьшее из чисел, для которых имеет место формула (I.3). Так как $\psi(0)=0$, то $\psi(u)=u\psi_1(u)$. $\psi_1(u)\in R_p[[u]]$, и мы получаем формулу $u(u^{m-1}(w^qP^{-2q}a-a)-\psi_1(u))=0$ Тогда по лемме I.1 существует элемент $y\in U^*(S^q)$ такой, что

$$u^{m-1}(w^qP^{-2q}a-a)=\psi_1(u)+y\Theta_p(u)\in U^*(L_p^\infty\times S^n). \tag{I.4}$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на $U^*(L_p^\infty)$, мы получаем $y'\Theta_p(u)=0$, где $y'=\varepsilon(y)$, $\varepsilon\colon U^*(S^n)\to U^*(*)$. Следовательно, если $m>1$, то по предположению индукции $y\cdot\Theta_p(u)\in R_p[[u]]$, что противоречит минимальности m. Но если $m=1$, то рассмотрев ограничение формулы (I.4) на группу $U^*(S^n)$, мы получаем $-a=\psi_1(0)+py$, т. е. $a\in R_p$.

ДОПОЛНЕНИЕ II[1]
ГИПОТЕЗА АДАМСА

Гипотеза Адамса касается вычисления образа J-гомоморфизма вещественной K-теории (см. [13]). Вот ее точная формулировка: для любого расслоения ξ найдется такое целое число N, что $J(k^N(\Psi^k(\xi)-\xi))=0$ для

[1] Дополнение II написано А. С. Мищенко.

любого числа $k \geqslant 1$. Гипотеза Адамса позволяет строить верхнюю оценку на образ J-гомоморфизма. Известно было, что гипотеза Адамса верна для одномерных и ориентируемых двумерных расслоений, а также для их прямых сумм. Для доказательства гипотезы Адамса достаточно проверить ее для классифицирующих расслоений на грассмановых многообразиях. Мы приведем схему доказательства гипотезы Адамса по Сулливану[1]). Основная идея заключается в том, чтобы отобразить K-функтор в другой функтор, в котором операции Адамса Ψ^k будут, так сказать, сохранять размерность «расслоения». Точный смысл можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма II.1. *Пусть B_n — последовательность комплексов $\gamma_n\colon E_n \to B_n$ — сферические расслоения со слоем S^{n-1} $f_n\colon B_n \to B_{n-1}$ — такие отображения, что $f_n^* (\gamma_{n+1}) = \gamma_n \oplus 1$, $f_n \sim \gamma_{n+1} \cdot h_n$, где $h_n\colon B_n \to E_{n+1}$ — гомотопическая эквивалентность. Пусть $a_n\colon B_n \to B_n$ — стабильная операция функтора $\varinjlim [\,, B_n]$, т. е. $f_n a_n \sim a_{n+1} f$, являющаяся обратимой. Тогда, если $J_n\colon B_n \to BG_n$ — естественное J-отображение, $G_n \approx (\Omega^{n-1} S^{n-1})_0$, то $J_n \sim J_n a_n$.*

Отметим, что операции Ψ^k для последовательности $B_n = BO(n)$ не удовлетворяют условиям леммы. Сулливан нашел подходящую теорию $K^\wedge(X)$, в которой некоторые аналоги операций Ψ^k уже удовлетворяют условиям леммы. Пусть X — произвольный CW-комплекс. Под пополнением $\hat{X}$ комплекса X будем понимать такой (единственный) комплекс, для которого выполнено условие $[Y, \hat{X}] = \lim\limits_{\{F, f\}} [Y, F]$. Здесь $\{F, f\}$ — категория всех отображений $f\colon X \to F$, где F пробегает такие комплексы, у которых все гомотопические группы конечны. Тогда положим $K^\wedge(X) = [X, BO^\wedge]$. Легко видеть, что пространства $BO(n)^\wedge$ удовлетворяют условиям леммы, если в качестве γ_n понимать расслоение со слоем $(S^{n-1})^\wedge$. С другой стороны, поскольку все гомотопические группы BG_n конечны, то существует естественное отображение $J^\wedge\colon BO(n)^\wedge \to BG_n$, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd} BO \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "J"'] & BO^\wedge \arrow[d, "J^\wedge"] \\ & BG \end{tikzcd}$$

коммутативна. Наконец, можно определить операции $(\Psi^k)^\wedge$ в группах $K^\wedge(X)$, так что $(\Psi^k x)^\wedge = (\Psi^k)^\wedge (x^\wedge)$. Если мы докажем, что операции $(\Psi^k)^\wedge$ сохраняют геометрическую размерность расслоений, т. е. существуют отображения $(\Psi_n^k)^\wedge\colon BO(n)^\wedge \to BO(n)^\wedge$, такие, что $(\Psi^k)^\wedge = \lim (\Psi_n^k)^\wedge$, то из леммы вытекает гипотеза Адамса. Для доказательства последнего утверждения Сулливан использует тот факт, что многообразия Грассмана $G_{n,\,k}$ являются алгебраическими многообразиями над полем рациональных чисел. Следовательно, на многообразии $G_{n,\,k}$ действует группа Галуа $\mathrm{Gal}\,(C, Q)$. Оказы-

[1]) Доказательство гипотезы Адамса началось три года назад с идеи Квиллена (Quillen D., Some remarks on etale homotopy, theory and a conjecture of Adams. Topology (1968), 7, №2, 111—116) применить свойства эталь-топологии грассмановых многообразий. В 1970 г. наряду с изложенным доказательством Сулливана появилось доказательство Квиллена, основанное на редукции гипотезы Адамса к расслоениям с конечной структурной группой и отличающееся от его первой идеи.

вается, что индуцированное действие в эт励когомологиях с коэффициентами в конечной группе определяется только представлением группы Gal (C, Q) в группе перестановок всех корней из единицы, т. е. гомоморфизмом Gal $(C, Q) \to (\hat{Z})^*$. Вместе с теоремой Артина об изоморфизме этальных когомологий с коэффициентами в конечной группе с обычными когомологиями многообразия, мы получаем действие группы $(\hat{Z})^*$ на пространстве $(G_{n, k})^\wedge$. Легкой проверкой можно убедиться, что действие элемента $(k) \in (\hat{Z})^*$ совпадает с операцией $(\Psi^k)^\wedge$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Атья, Р. Ботт, Заметки о теореме Лефшеца о неподвижной точке, Матем. **10**:4 (1966), 101—139.

[2] В. М. Бухштабер, Характер Чженя — Дольда в кобордизмах. I, Матем. сб. **83** (125) (1970), 575—595.

[3] В. М. Бухштабер, Спектральные последовательности, связанные с характером Чженя — Дольда, УМН **26**:1 (157) (1971), 575—595.

[4] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса, Матем. сб. **84** (126) (1971), 116—153.

[5] Г. Г. Каспаров, Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов, Изв. АН, серия матем. **33** (1969), 735—747.

[6] П. Коннер, Э. Флойд, Гладкие периодические отображения, М., «Мир», 1969.

[7] D. Quillen, On the formal group law of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. **75**:6 (1969), 1293—1298.

[8] Дж. Милнор, Лекции о характеристических классах, Матем. **5**:4 (1959).

[9] J. Milnor, Cobordism ring and complex analogue, Amer. J. Math. **82**:3 (1960), 505—521.

[10] А. С. Мищенко, Многообразия с действием группы Z_p и неподвижные точки, Матем. заметки **4**:4 (1968), 381—386.

[11] А. С. Мищенко, Бордизмы с действием группы Z_p и неподвижные точки, Матем. сб. **80** (122) (1969), 307—313.

[12] С. П. Новиков, Гомотопические свойства комплексов Тома, Матем. сб. **57** (99) (1962), 406—442.

[13] С. П. Новиков, Новые идеи в алгебраической топологии (K-теория и ее применения), УМН **20**:3 (123) (1965), 41—66.

[14] С. П. Новиков, Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН, серия матем. **31** (1967), 885—951.

[15] С. П. Новиков, Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН, серия матем. **32** (1968), 1245—1264.

[16] Р. Том, Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий, сб. «Расслоенные пространства и приложения», М., ИЛ, 1958.

[17] Т. Хонда, Формальные группы и дзета-функция, Матем. **13**:6 (1969), 3—17.

[18] Чжень Шен-шэнь, Комплексные многообразия, М., ИЛ, 1961.

[19] T. Dieck, Steenrod-Operationen in Kobordism-Theorien, Math. Z. **107** (1968).

[20] D. Quillen, Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operation (preprint).

[21] В. М. Бухштабер, Двузначные формальные группы. Некоторые приложения к кобордизмам, УМН **26**:3 (1971).

[22] P. S. Landweber, Cobordism operations and Hopf algebras, Trans. Amer. Math. Sos. **129**:1 (1967), 94—110.

[23] J. F. Adams, Quillen's Work on Formal Group Law and Complex Cobordism, University of Chicago, Lecture Notes Ser., 1970.

Поступило в редакцию 3 декабря 1970 г.