ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ВЫСШИХ СИГНАТУР НЕОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. С. Мищенко

Пусть M — гладкое многообразие, $\pi_1(M) = M$. Если π — тривиальная группа, то единственным гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является род Хирцебруха многообразия, равный сигнатуре квадратичной формы в рациональных когомологиях. Этот же инвариант тесно связан с классификацией гладких односвязных многообразий данного гомотопического типа (см. [1]). Именно, одним из инвариантов, различающих гладкие многообразия данного гомотопического типа, является стабильное нормальное расслоение, причем всякий элемент $\xi \in K_0(M)$ можно реализовать в качестве нормального расслоения некоторого многообразия M', гомотопически эквивалентного многообразию M, если выполнены следующие два условия:

$$J(\xi) = J(\nu(M)),$$
$$L(\xi) = L(\nu(M)),$$

где L — род Хирцебруха. Указанная связь базируется на методе перестроек многообразий и исследовании так называемых препятствий к перестройке одного многообразия до гомотопически эквивалентного другому.

Пусть M, X — многообразия размерности n, $f: M \to X$ — отображение степени 1, ξ — расслоение на X, $\varphi: f^*(\xi) \to \nu(M)$ — некоторый изоморфизм расслоений. Тройка (M, f, φ) определяет (см. [2]) бордизм $\alpha \in \Omega_n(X, \xi)$. Пусть $L_n(\pi)$ — группы Уолла (определенные в [2]), $\theta(\alpha) \in L_n(\pi_1(X))$ — препятствие к перестройке тройки (M, f, φ) до гомотопической эквивалентности. Возникает задача о вычислении элемента $\theta(\alpha)$ через характеристические классы многообразий X и M, которая тесно связана с описанием всех гомотопически инвариантных характеристических классов неодносвязного многообразия M. Естественным претендентом на такие классы являются «высшие сигнатуры»

$$\sigma_x(M) = \langle L(M)x,\ [M]\rangle,$$

где x — прообраз некоторого элемента рациональных когомологий $K(\pi, 1)$, $\pi = \pi_1(M)$. П. С. Новиков ([3]) и В. А. Рохлин ([4]) доказали гомотопическую инвариантность $\sigma_x(M)$, если x — одномерный класс когомологий или произведение двух одномерных классов. Г. Г. Каспаров ([5]) и Фаррелл и Чанг ([6]) доказали аналогичный факт для произведения одномерных когомологий.

В работе [7] были построены группы $L_n^Q(\pi)$ и такие гомоморфизмы:

$$\sigma: \Omega_n(K(\pi, 1)) \to L_n^Q(\pi),$$
$$\varphi: L_n(\pi) \to L_n^Q(\pi),$$

что $\varphi\theta(\alpha) = \sigma(M) - \sigma(X)$. Таким образом, если π — свободная абелева группа, то $\varphi(\theta(\alpha))$ полностью определяется высшими сигнатурами $\sigma_x(M)$, $\sigma_x(X)$.

Оказывается, что высшие сигнатуры $\sigma_x(M)$ являются гомотопическими инвариантами для любого $x \in H^*(K(\pi, 1), Q)$.

Доказательство основано на построении аналога теории пересечений для комплексов Пуанкаре. Комплекс X называется комплексом Пуанкаре формальной размерности n, если вложение $\partial U \subset U$ индуцирует сферическое расслоение со слоем S^{N-1}, где U — регулярная окрестность вложения комплекса X в евклидово пространство R^{n+N}.

Лемма. *Пусть M, X — гладкие ориентируемые многообразия, Y — ориентируемая пара Пуанкаре с гладкой границей ∂Y,* $\dim M = n$, $\dim X = p$, $\dim Y = q$, $\pi_i(M) = 0$ *при* $2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(p + q - n) + 2$, $f: X \to M$, $g: Y \to M$ — *отображения, индуцирующие изоморфизм фундаментальных групп. Если $p + q - n$ нечетно, то существует такая пара $(Z, \partial Z)$ с двойственностью Пуанкаре в рациональных гомологиях формальной размерности $p + q - n$, что $\partial Z = (X, f) \cap (\partial Y, g)$.*

Вторым моментом в доказательстве является построение таких групп $\Omega_n(\Lambda)$, $\Lambda = \mathbf{Z}[\pi]$, что существуют такие отображения

$$\sigma : \Omega_n(K(\pi, 1)) \to \Omega_n(\Lambda),$$
$$\varphi : L_n(\pi) \to \Omega_n(\Lambda),$$

что $\operatorname{Ker} \varphi$ имеет конечный порядок, а $\varphi(\theta(\alpha)) = \sigma(M) - \sigma(X)$.

После этого доказательство гомотопической инвариантности высших сигнатур выводится стандартным приемом, учитывая эквивалентность этого факта мономорфности гомоморфизма

$$\sigma \otimes L_* (1) : \Omega_* (K (\pi, 1)) \otimes_{\Omega_*} L_* (1) \to \Omega_* (\Lambda).$$

Таким образом, в качестве следствия мы получаем теорему о классификации гладкостей на данном гомотопическом типе.

Теорема. *Пусть M — гладкое многообразие,* $\pi = \pi_1(M)$, $\xi \in K_0(M)$, $J(\xi) = J(\nu(M))$. *Для того чтобы расслоение ξ было нормальным расслоением многообразия M', гомотопически эквивалентного многообразию M, необходимо, чтобы для любого $x \in H^*(K(\pi, 1), Q)$ имело место равенство*

$$\langle L (\xi) x, [M]\rangle = \sigma_x (M). \tag{1}$$

Если условие (1) выполнено, то для некоторого целого числа N расслоение $\nu(M) + N(\xi - \nu(M))$ является нормальным расслоением некоторого многообразия M', гомотопически эквивалентного многообразию M. Число N можно считать степенью числа 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Новиков, Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, Изв. АН, сер. матем. **28** (1964), 365—474.

[2] С. Т. С. Wall, Surgery of compact manifolds, Liverpool Univ., 1968 (preprint).

[3] С. П. Новиков, О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применения, Изв. АН, сер. матем. **30** (1966), 207—246.

[4] В. А. Рохлин, Классы Понтрягина — Хирцебруха коразмерности 2, Изв. АН, сер. матем. **30** (1966), 705—718.

[5] Г. Г. Каспаров, О гомотопической инвариантности рациональных чисел Понтрягина, ДАН **190**:5 (1970), 1022—1025.

[6] F. T. Farrell, Z. C. Hsiang, A geometric interpretation of the Künueth formula for algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc. **74**:3 (1968), 548—553.

[7] А. С. Мищенко, Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий, I. Рациональные инварианты, Изв. АН, сер. матем. **34** (1970), 501—514.

Поступило в Правление общества 9 марта 1971 г.