УДК 513.836

Бордизмы с действием группы Z_p и неподвижные точки

А. С. Мищенко (Москва)

Цель настоящей статьи — дать описание кольца бордизмов с действием Группы Z_p и кольца всех допустимых наборов неподвижных подмногообразий при действии группы Z_p.

§ 1

Известно, что множество неподвижных точек на квазикомплексном многообразии M^{2n} при квазикомплексном действии группы Z_p является объединением конечного числа замкнутых квазикомплексных подмногообразий N_i. При этом можно так отождествить трубчатую окрестность N_i с нормальным расслоением ν_i к N_i, что в ν_i индуцируется линейное действие группы Z_p. Согласно [2], расслоение ν_i можно представить в виде суммы $\nu_i = \bigoplus_{j=1}^{p-1} \nu_{ij}$, причем на ν_{ij} действие группы Z_p задается с помощью умножения на число $e^{\frac{2\pi i}{p} j}$.

Таким образом, действие группы Z_p вблизи неподвижного подмногообразия N характеризуется набором $p-1$ расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$, в сумме дающих нормальное расслоение. Нормальное расслоение к N индуцирует расслоение на сферы, на котором действует Z_p без неподвижных точек, и, значит, определяет некоторый бордизм $\alpha(N, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1})$ бесконечномерной линзы L_p^∞. Сумма $\sum_N \alpha(N, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1})$ по всем неподвижным подмногообразиям, очевидно, равна нулю.

В работе [1] определено кольцо бордизмов с действием группы Z_p. Обозначим его через Ω_*^p. Пусть $[M^{2n}] \in \Omega_*^p$, $(N_i, \xi_1^i, \ldots, \xi_{p-1}^i)$ — неподвижные подмногообразия, $\dim N_i = 2n_i$, $\dim \xi_k^i = l_{k,i}$, $\sum_{k=1}^{p-1} l_{k,i} + n_i = n$. Набору $(N_i, \xi_1^i, \ldots, \xi_{p-1}^i)$ можно сопоставить элемент $\gamma(N_i, \xi_1^i, \ldots, \xi_{p-1}^i)$ из $U_{2n_i}\left(\prod_{k=1}^{p-1} BU(l_{k,i})\right)$; при этом сумма $\sum \gamma(N_i, \xi_1^i, \ldots, \xi_{p-1}^i)$ по всем i, таким, что $l_{k,i} = l_k$, не зависит от представления класса $[M^{2n}]$.

Рассмотрим группу $A = \bigoplus U_*\left(\prod_{k=1}^{p-1} BU(l_k)\right)$; сумма берется по всем наборам $l_1, \ldots, l_{p-1}$, $l_i \geqslant 0$. Градуируем ее следующим образом: элемент

$x \in U_k\left(\prod_{k=1}^{p-1} BU(l_k)\right)$ будет считаться однородным элементом степени $k+2\sum_{k=1}^{p-1} l_k$. Считаем, что $BU(0)$— точка. Введем в группе A умножение, используя отображение $BU(n)\times BU(m)\to BU(n+m)$. Легко видеть, что A становится кольцом многочленов $\Omega_*[x_i^k]$, $k\geqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant p-1$, где $x_i^k: CP^k\subset BU(1)$ — каноническое вложение. Таким образом, $\deg x_i^k = 2(k+1)$. Неподвижные точки описываются мономами с коэффициентом 1 от образующих x_i^0, неподвижные многообразия N с тривиальным нормальным пучком описываются мономами от x_i^0 с коэффициентом $[N]\in\Omega_*$. Таким образом, можно построить кольцевой гомоморфизм $\gamma:\Omega_*^p\to A$, который каждрму многообразию сопоставляет сумму классов бордизмов, определяемых неподвижными многообразиями. П у с $\pi:\Omega_*^p\to\Omega_*$: с т в е н н о е отображение колец бордизмов. Имеет место

Л е м м а 1. *Ограничение* π *на* $\operatorname{Ker}\gamma$ *является мономорфизмом':*

$$\pi(\operatorname{Ker}\gamma) = p\Omega_*\subset\Omega_*.$$

С другой стороны, мы построили отображение $\alpha: A\to U_*(L_p^\infty)$. Имеет место

Л е м м а 2. $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im}\gamma$.

Пусть $B=\operatorname{Ker}\alpha$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & p\Omega_* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega_* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega_*\otimes Z_p \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[r] \arrow[u, "\pi"] & \Omega_*^p \arrow[r] \arrow[u, "\pi"] & B \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Ker}\pi \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[u] & 0, \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

у которой все строки и столбцы точны.

Нашей дальнейшей задачей будет описание кольца B и гомоморфизма β.

§2

Пусть $f_k(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^k u^i$ — такой формальный ряд, $\lambda_i^k\in\Omega_*$, что при отображении $\varphi_k: CP^\infty\to CP^\infty$, соответствующем умножению на k, образ «геометрического» кобордизма $u\in U^*(CP^\infty)$ равен $f_k(u)$:

$$\varphi_k^*(u) = f_k(u) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^k u^i.$$

Тогда кольцо $U^*(L_p^\infty)$ изоморфно кольцу $\Omega^*[[u]]/(f_p(u)=0)$. Соответственно Ω_*-модуль $U_*(L_p^\infty)$ порожден элементами а ((*?)") с единственными соотношениями

$$\sum_{j=1}\lambda_{n+1-j}^p\alpha((x_1^0)^j) = 0.$$

Пусть $[\varphi(t)]$ обозначает правильную часть ряда Лорана ср (t) без свободного члена; Пусть, далее, $\varphi: CP^\infty \times CP^\infty \to CP^\infty$ — такое отображение, что $\varphi^*(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2$, и

$$\varphi^*(u) = \sum \lambda_{ij} u^i \otimes u^j, \qquad CP(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [CP^n] t^n,$$

$$G_{n,k}(u) = \sum_{s \geqslant 0} l_{n,k}^s u^s,$$

причем выполнено равенство рядов

$$u = \sum \lambda_{ij} t^i u^i \frac{(uCP(tu))^j}{\left(\sum\limits_n G_{n,s}(u) t^n\right)^j}, \quad \text{а} \quad G_{n,k}(u) = \frac{u}{f_k(u)} G_{n,1}(f_k(u)).$$

Легко видеть, что ряды $G_n,k(u)$ существуют и единственны. Наконец, положим

$$M_n^k(x_1^0) = \sum_{S=0}^{\infty} l_{n,k}^s (x_1^0)^{n+1-s}.$$

Теорема 1. *Кольцо B аддитивно порождается элементами вида*

$$w_m = \prod (x_k^n)^{m_{k,n}} - \left[\prod (M_n^k(x_1^0))^{m_{k,n}}\right],$$

где $m = \{m_{k,n}\}$ — конечный мультииндекс, и

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i+1-j}^p (x_1^0)^j.$$

Элементы w_{mkns} мультипликативно порождают B, где среди $mk,_n,s$ отличны от нуля только $m^*,_n = 1$ м $m_{110} = s$, *т. е.*

$$w_{m_{k,n,s}} = x_k^n (x_1^0)^s - [(x_1^0)^s M_n^k (x_1^0)].$$

Теорема 2. *Гомоморфизм* р *переводит элемент w_m в свободный член ряда* $\prod (M_n^k(x_1^0))^{m_{k,n}}$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Элементы $x^m = \prod (x_k^n)^{m_{k,n}}$, $m = \{m_{k,n}\}$, $m_{k,n} \geqslant 0$, образуют аддитивный базис кольца A над Ω_*. С другой стороны, модуль $U_*(L_p^\infty)$ аддитивно порождается элементами $\alpha((x_1^0)^s)$ с единственными соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1-j}^p \alpha((x_1^0)^j). \tag{1}$$

Отметим, что $\lambda_1^p = p$. Следовательно, существуют такие многочлены $F_m(x_1^0)$, $\deg F_m = \sum (n+1) m_{k,n}$, что $\alpha(x^m) = \alpha(F_m(x_1^0))$. Ясно, что многочлен $F_m(x_1^0)$

выбирается однозначно с точностью до соотношений (1). Поскольку Ω_* — кольцо многочленов, то, зафиксировав в Ω_* свободный базис, можно потребовать при выборе многочленов $F_m(x_1^0)$, чтобы все коэффициенты находились на отрезке $[0, p-1]$. При выполнении этого требования многочлены F_m определяются однозначно. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Аддитивный базис кольца B имеет вид*

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i+1-j}^{p} (x_1^0)^j, \quad w_m = x^m - F_m(x_1^0), \quad m = \{m_{k,n}\}, \quad \sum_{(k,n)\neq(1,0)} m_{k,n} > 0.$$

Пусть $y \in A$ — однородный элемент степени s, отличный от $(x_1^0)^s$, и $F_{y,k}(x_1^0)$ — такие многочлены, что $\alpha(y(x_1^0)^k) = \alpha(F_{y,k}(x_1^0))$, $F_{y,k}(x_1^0) = \alpha_{y,k}^0 (x_1^0)^{s+k} + \ldots + \alpha_{y,k}^{s+k-1} x_1^0$.

Лемма 2. *При $l \leqslant s+k-1$ имеют место равенства*

$$\alpha_{y,k}^l = \alpha_{y,k+1}^l.$$

Доказательство. Лемму 2 можно сформулировать следующим образом: если $y \in B$, то

$$\alpha(x_1^0 y) = \alpha(A x_1^0), \quad A \in \Omega_*. \tag{2}$$

Ясно, что если $y, z \in B$ удовлетворяют условию (2), то и $yz \in B$ тоже удовлетворяют условию (2). Поэтому достаточно доказать лемму для некоторого мультипликативного базиса в кольце B. Поскольку $\alpha(x_k^0) = k^{-1}\alpha(x_1^0)$ (см. [3]), то условие (2) эквивалентно условию

$$\alpha(x_k^0 y) = \alpha(A x_k^0).$$

Мультипликативный базис можно выбрать в виде $x_k^n (x_k^0)^s - F_{x_1^n (x_1^0)^s}(x_k^0)$, $k \in Z_p$, $n \geqslant 1$, $s \geqslant 0$; $x_k^0 (x_1^0)^s - F_{x_k^0 (x_1^0)^s}(x_1^0)$. Следовательно, достаточно доказать лемму для элементов вида

$$x_1^n (x_1^0)^s - F_{x_1^n (x_1^0)^s}(x_1^0) \tag{3}$$

и

$$x_k^0 (x_1^0)^s - F_{x_k^0 (x_1^0)^s}(x_1^0). \tag{4}$$

Для элементов вида (4) это доказанов [3].

Рассмотрим теперь элемент $x_1^n (x_1^0)^s$. Геометрически он представлен расслоением $\xi + s$ над базой CP^n, где ξ — каноническое одномерное расслоение. Пусть P — проективизация этогорасслоения η — каноническое расслоение над P. Тогда пучок сфер $S(\eta)$ с действием группы Z_p и пучок сфер $S(\xi + s)$ с действием группы Z_p определяют один и тот же элемент в $U_*(L_p^\infty)$. С другой стороны, пара (η, P) определяет элемент $U_*(CP^\infty)$. Ясно, что $D(c_1(\eta))^s = (\xi, CP^n)$. Это значит, что

$$\alpha(x_1^n (x_1^0)^s) = \alpha((x_1^0)^{n+s+1}) + \text{члены степени, меньшей } s.$$

Таким образом, лемма 2 справедлива в случае (3) для всех коэффициентов при первых n-1 членах. Для завершения доказательства достаточно показать, что если $y \in B$, $yx_1^0 - \alpha x_1^0 \in B$, $y(x_1^0)^2 - \beta(x_1^0)^2 - \gamma x_1^0 \in B$, то $\alpha \equiv \beta \pmod p$. В самом деле,

$$y^2(x_1^0)^2 - \beta y(x_1^0)^2 - \gamma y x_1^0 \in B, \quad y^2(x_1^0)^2 - 2\alpha y(x_1^0)^2 + \alpha^2(x_1^0)^2 \in B,$$

$$(2\alpha - \beta)(\beta(x_1^0)^2 + \gamma x_1^0) - \alpha^2(x_1^0)^2 - \gamma\alpha x_1^0 \in B,$$

$$-(\alpha - \beta)^2(x_1^0)^2 + \gamma(\alpha - \beta)x_1^0 \in B.$$

Значит, $(\alpha - \beta)^2 \equiv 0 \pmod p$ или $\alpha \equiv \beta \pmod p$. Лемма 2 доказана.

Пусть $y \in A$ — однородный элемент степени s, не равный $(x_1^0)^s$. Рассмотрим ряд Лорана $F_y(x_1^0)$ такой, что $(x_1^0)^{-k}F_{y,k}(x_1^0)$ являются его отрезками. Ясно, что $\alpha(y(x_1^0)^k) = [(x_1^0)^k F_y(x_1^0)]$.

Лемма 3. *Для любых однородный элементов* $y, z \in A$, *нг равных* $(x_1^0)^s$, *имеет место равенство*

$$F_{yz} = F_y F_z.$$

$$\deg y = s, \ \deg z = l,$$

Доказательство. Пусть

$$y(x_1^0)^k - \sum_{j=0}^{k+s-j} \alpha_y^j (x_1^0)^{k+s-j} \in B, \quad z - \sum_{i=0}^{l} \alpha_z^i (x_1^0)^{l-i} \in B.$$

Тогда

$$yz(x_1^0)^k - \sum_{j=0}^{k+s-1} \sum_{i=0}^{k+s+l-j-1} \alpha_y^j \alpha_z^i (x_1^0)^{l+k+s-i-j} -$$

$$-\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{k+s+l-i-1} \alpha_z^i \alpha_y^j (x_1^0)^{l+k+s-i-j} + \sum_{j=0}^{k+s-1} \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_y^j \alpha_z^i (x_1^0)^{k+l+s-i-j} \in B.$$

При члене x_1^0 стоит коэффициент, равный $\sum\limits_{i+j=k+s+l-1} \alpha_y^j \alpha_z^i$, что и доказывает лемму 3.

Фиксируем некоторое большое число N и рассмотрим L_p^{2N+1}. Пусть $u \in U^2(L_p^{2N+1})$ — каноническая образующая. Пусть, далее, $y, z \in A$ — однородные элементы степени s, l, $F_y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_y^i (x_1^0)^{s-i}$ — соответствующий ряд Лорана.

Положим

$$G_y(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_y^i u^i.$$

Из лемм 2 и 3 легко видеть, что если D — двойственность Пуанкаре, то

$$D\alpha(y(x_1^0)^k) = u^{N+1-(k+s)} G_y(u), \quad D\alpha(yz) = u^{N+1-(l+k)} G_y(u) G_z(u).$$

В частности, если $y = x_k^n$, то положим

$$G_y(u) = G_{n,k}(u).$$

Напомним, что $\deg x_k^n = n+1$. Рассмотрим формальные ряды

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n u^n t^n, \quad G_k(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,k}(u) t^n.$$

Отметим, что $G_{0,1} = 1$, $G_{0,k}(u)$ было получено в [3]. Из вышеприведенных формул следует, что

$$D\alpha(A_k(t)^l) = u^{N+1-l}(G_k(u, t))^l.$$

Пусть $\varphi_{k^{-1}}: L_p^{2N+1} \to L_p^{2N+1}$ — отображение, соответствующее умножению на k^{-1}. При этом

$$\varphi_{k^{-1},*}(\alpha(x_1^n)) = \alpha(x_k^n) \quad \text{или} \quad \varphi_{k^{-1},*}(D\alpha(A_1(t)^l)) = D\alpha(A_k(t)^l),$$

т. е.

$$\varphi_{k^{-1},*}(u^{N+1-l}G_1^l) = u^{N+1-l}G_k^l.$$

Положим $v_k = u(G_k(u, t))^{-1}$. Элемент v_1 является мультипликативной образующей в кольце $U^*(L_p^{2N+1})[[t]]$ над кольцом $\Omega_*[[t]]$. Пусть $\varphi_{k^{-1},*}(v_1) = \sum \mu_i v_1^i$. Тогда, применяя формулу $f_*(f^*(x)y) = xf_*(y)$ для случая $x = v_1$, $y = G_1^{N+1}$, получим соотношение

$$v_1 G_k^{N+1} = \sum \mu_i v_k^i G_k^{N+1}$$

или

$$v_1 = \sum \mu_i v_k^i.$$

После элементарных преобразований, вспоминая, что $\varphi_k^*(u) = \sum \lambda_i^k u^i$, получаем равенство

$$G_k(u, t) = \frac{u}{f_k(u)} G_1(f_k(u), t).$$

При $t = 0$ мы получаем формулу из работы [3] для неподвижных подмногообразий с тривиальным нормальным пучком, поскольку $G_1(f_k(u), t) = 1$ при $t = 0$. Таким образом, нам осталось найти вид ряда $G_1(u, t)$.

Пусть $w_{n,m}$ — проективизация пучка $(m+1)\xi$ над базой CP^n, где ξ — канонический пучок. Тогда класс бордизма в CP^∞

$$\sum w_{n,m} u^n t^n = \frac{A_1(t)^{m+1}}{CP(ut)^m}.$$

С другой стороны, $w_{n,m}$ вместе с каноническим пучком изоморфно $CP^n \times CP^m$ с пучком $\xi_1 \otimes \xi_2$. Поэтому, если $f: CP^{\frac{N}{2}} \times CP^{\frac{N}{2}} \to CP^N$ -отображение, при котором $f^*(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_*(u_1^{\frac{N}{2}-n} \otimes u_2^{\frac{N}{2}-m}) u^n t^n = \frac{u^{N-m} G_1(u, t)^{m+1}}{CP(ut)^m}.$$

Применяя формулу $f_*(f^*(x) y) = x f_*(y)$, для случая $y = \sum (u_1^{\frac{N}{2}-n} \otimes 1) u^n t^n$, $x = u$ получаем

$$\sum \lambda_{ij} t^i u^i \frac{u^{\left(\frac{N}{2}+i\right)} G_1(u, t)^{\left(\frac{N}{2}+1-i\right)}}{CP(ut)^{\left(\frac{N}{2}-i\right)}} = u \frac{u^{\frac{N}{2}} G_1(u, t)^{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{CP(ut)^{\frac{N}{2}}},$$

или по модулю $u^{\left(\frac{N}{2}+1\right)} = 0$ имеем равенство

$$u = \sum \lambda_{ij} t^i u^i \frac{(uCP(ut))^j}{G_1(u, t)^j}.$$

Здесь λ_{ij} — коэффициенты ряда $f^*(u) = \sum \lambda_{ij} u^i \otimes u^j$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть y, z — два соотношения из кольца B, $\bar{y} = yx_1^0 - Ax_1^0 \in B$, $\bar{z} = zx_1^0 - Bx_1^0 \in B$. Тогда

$$(\beta(y) - A)\beta(\bar{z}) = (\beta(z) - B)\beta(\bar{y})$$

в $\Omega_* \otimes Z_p$. Для доказательства теоремы достаточно найти такое z, чтобы $\beta(z) = B$, $\beta(\bar{z}) \neq 0$. Такие z существуют, например $z = p(x_1^0)^{p-2}$ при $p \geqslant 3$, $\bar{z} = p(x_1^0)^{p-1}$. Для $p = 2$ следует взять $z = 4x_1^0$, $\bar{z} = 4(x_1^0)^2$. Так как $\beta(2x_1^0) = CP^1$, то $\beta(z) = 0$, $\beta(\bar{z}) = CP^1 \times CP^1$.

(Поступила в редакцию 16/IX 1968 г.)

Литература

1. P. Conner, E. Floyd, Differentiable periodic maps, Berlin, Springer — Verlag, 1964.
2. М. Атья, Лекции по K-теории, Москва, изд-во «Мир», 1967.
3. А. С. Мищенко, Многообразия с действием группы Z_p и неподвижные точки. Матем. заметки, 4, № 4 (1968), 381—386.

Mat. Sbornik
Tom 80 (122) (1969), No. 3

Math. USSR Sbornik
Vol. 9 (1969), No. 3

BORDISMS WITH THE ACTION OF THE GROUP Z_p AND FIXED POINTS

A. S. MIŠČENKO

UDC 513.836

Abstract. A full description of the ring of unitary bordisms with the action of Z_p and of the ring of all admissible collections of fixed submanifolds under the action of Z_p is given in terms of generators and relations. The calculations are based on a special choice of polynomial generators in the ordinary ring of unitary bordisms and Poincaré duality in bordism theory.

Bibliography: 3 titles.

Introduction

The purpose of this paper is the description of the ring of unitary bordisms with the action of Z_p and of the ring of all admissible collections of fixed submanifolds under the action of Z_p.

§1.

It is known that the set of fixed points of an almost complex Z_p action on an almost complex manifold M^{2n} is a finite union of closed almost complex submanifolds N_i. Moreover, the tubular neighborhood of N_i may be identified with the bundle ν_i normal to N_i so that the induced action of Z_p on ν_i is linear. According to (2) the fibration ν_i can be represented as a sum $\nu_i = \bigoplus_{j=1}^{p-1} \nu_{ij}$, where the action of Z_p on ν_{ij} is multiplication by $e^{2\pi ij/p}$.

Thus the action of the group Z_p close to a fixed submanifold N is characterized by a collection of p - 1 bundles $\xi_1, \cdots, \xi_{p-1}$ whose sum is the normal bundle. The normal bundle to /V induces a sphere bundle on which Z_p acts without fixed points, i. e. it defines a bordism class $\alpha(N, \xi_1, \cdots, \xi_{p-1})$ of the infinite lens space L_p^∞. The sum $\Sigma_N\, \alpha(N, \xi_1, \cdots, \xi_{p-1})$ over all fixed submanifolds is clearly equal to zero.

In [1] the bordism ring with the action of Z_p was determined. We denote this ring by Ω_*^p. Let $[M^{2n}] \in \Omega_*^p$, $(N_i, \xi_1^i, \cdots, \xi_{p-1}^i)$ be fixed submanifolds, and let $\dim N_i = 2n_i$, $\dim \xi_k^i = l_{k,i}$ and $\Sigma_{k=1}^{p-1} l_{k,i} + n_i = n$. To the collection $(N_i, \xi_1^i, \cdots, \xi_{p-1}^i)$ we can associate the element $\gamma(N_i, \xi_1^i, \cdots, \xi_{p-1}^i)$ of $U_{2n_i}(\Pi_{k=1}^{p-1} BU(l_{k,i}))$; the sum $\Sigma\, \gamma(N_i, \xi_1^i, \cdots, \xi_{p-1}^i)$ over all i such that $l_{k,i} = l_k$ is independent of the representative of the class $[M^{2n}]$.

Consider the group $A = \bigoplus U_*(\Pi_{k=1}^{p-1} BU(l_k))$; the sum is to be taken over all choices $l_1, \cdots l_{p-1}$, $l_i \geq 0$. We consider the following grading: an element $x \in U_k(\Pi_{k=1}^{p-1} BU(l_k))$ is homogeneous of degree $k + 2\Sigma_{k=1}^{p-1} l_k$.

We take 6/7(0) to be a point. In the group A we introduce a multiplication using the map

$BUM + BU(m) \longrightarrow BU(jn+n)$. It is easy to see that A becomes a polynomial ring $\Omega_*[x_i^k]$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq p-1$, where $x_i^k\colon CP^k \subset BU(1)$ is the canonical inclusion. Thus $\deg x_i^k = 2(k+1)$. Fixed points are represented by monomials in the generators x_i^0 with coefficient 1; fixed submanifolds N with trivial normal bundle are represented by monomials in the generators x_i^0 with coefficients $[N] \in \Omega_*$. Thus one can construct a ring homomorphism $\gamma\colon \Omega_*^p \to A$ which to each bordism class associates the sum of bordism classes defined by the fixed submanifolds. Let $\pi\colon \Omega_*^p \to \Omega_*$ be the natural homomorphism of the bordism rings. We have

Lemma 1. *The restriction of* π *to* $\operatorname{Ker}\gamma$ *is a monomorphism:*

$$\pi(\operatorname{Ker}\gamma) = p\Omega_* \subset \Omega_*.$$

On the other hand, we have constructed the homomorphism $\alpha\colon A \to U_*(L_p^\infty)$. We have

Lemma 2. $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im}\gamma$.

Let $B = \operatorname{Ker}\alpha$. We then have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & p\Omega_* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega_* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega_* \otimes Z_p \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[r] \arrow[u, "\pi"] & \Omega_*^p \arrow[r] \arrow[u, "\pi"] & B \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Ker}\pi \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[u] & 0, \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

with all rows and columns exact.

The next problem is the description of the ring B and the homomorphism β.

Let $f_k(u) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^k u^i$ be a formal power series with $\lambda_i^k \in \Omega_*$ such that under the map $\phi_k\colon CP^\infty \to CP^\infty$ which corresponds to multiplication by k, the image of the "geometric" cobordism $u \in U^*(CP^\infty)$ is equal to $f_k(u)$:

$$\varphi_k^*(u) = f_k(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k u^i.$$

Then the ring $U^*(L_n^\infty)$ is isomorphic to the ring $\Omega_*[[u]]/(f_p(u) = 0)$. Thus the Q_t-module $U_*(L_p^\infty)$ **is** generated by the elements $\alpha((x_1^0)^n)$ and relations $\sum_{j=1}^n \lambda_{n+1-j}^p\, \alpha((x_1^0)^j) = 0$.

Let $[\phi(t)]$ denote the regular part of the Laurent expansion of $\phi(t)$ without the free term. Furthermore, let $\phi\colon CP^\infty \times CP^\infty \to CP^\infty$ be a map such that $\phi^*(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2$ and

$$\varphi^*(u) = \sum \lambda_{ij} u^i \otimes u^j, \qquad CP(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [CP^n]\, t^n,$$

$$G_{n,k}(u) = \sum_{s \geqslant 0} l_{n,k}^s u^s,$$

where the following equalities between series hold:

$$u = \sum \lambda_{ij} t^i u^i \frac{(uCP(tu))^j}{\left(\sum\limits_n G_{n,s}(u)\, t^n\right)^j}, \text{ and } G_{n,k}(u) = \frac{u}{f_k(u)}\, G_{n,1}(f_k(u)).$$

It is easy to see that the series $G_{n,k}(u)$ exist and are unique. Finally, set

$$M_n^k(x_1^0) = \sum_{s=0}^{\infty} l_{n,k}^s (x_1^0)^{n+1-s}.$$

Theorem 1. *The ring B is additively generated by elements of the form*

$$w_m = \prod (x_k^n)^{m_{k,n}} - \left[\prod (M_n^k(x_1^0))^{m_{k,n}}\right],$$

where $m = \{m_{k,n}\}$ is a finite multi-index and

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1-j}^p (x_1^0)^j.$$

The elements $w_{m_{k,n,s}}$ multiplicatively generate B, and among the $m_{k,n,s}$ the only nonzero ones are $m_{k,n} = 1$ and $m_{1,0} = s$, i. e.

$$w_{m_{k,n,s}} = x_k^n (x_1^0)^s - [(x_1^0)^s M_n^k (x_1^0)].$$

Theorem 2. *The homomorpkism /3 takes the element w_m into the free term of the series* $\prod (M_n^k(x_1^0))^{m_{k,n}}$

§ 3. Proof of Theorem 1

The elements $x^m = \prod (x_k^n)^{m_{k,n}}$, $m = \{m_{k,n}\}$, $m_{k,n} \geq 0$, form an additive basis of the ring A over Ω_*. On the other hand the module $U_*(L_p^\infty)$ is additively generated by the elements $\alpha((x_1^0)^s)$ with

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1-j}^p \alpha((x_1^0)^j) \tag{1}$$

as the only relations. Note that $\lambda_1^p = p$. Therefore there exist polynomials $F_m(x_1^0)$, $\deg F_m = \Sigma(n+1)m_{k,n}$, such that $\alpha(x^m) = \alpha(F_m(x_1^0))$. It is clear that the polynomial $F_m(x_1^0)$ can be chosen uniquely up to relations (1). Since Ω_* is a polynomial ring, one can fix a basis in Ω_* and, when choosing the polynomials $F_m(x_1^0)$, require that all coefficients be in the interval [0, p - 1]. If this condition be satisfied the polynomials F_m are uniquely defined. We thus have

Lemma 1. *The additive basis of the ring B has the form*

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1-j}^p (x_1^0)^j, \quad w_m = x^m - F_m(x_1^0), \quad m = \{m_{k,n}\}, \quad \sum_{(k,n)\neq(1,0)} m_{k,n} > 0.$$

Let $y \in A$ be a homogeneous element of degree s, not equal *to* $(x_1^0)^s$, and let $F_{y,k}(x_1^0)$ be polynomials such that $\alpha(y\,(x_1^0)^k) = \alpha(F_{y,k}(x_1^0))$, $F_{y,k}(x_1^0) = \alpha_{y,k}^0 (x_1^0)^{s+k} + \dots + \alpha_{y,k}^{s+k-1} x_1^0$.

Lemma 2. *For $1 < s + k - 1$ we have the following equalities:*

$$\alpha_{y,k}^i = \alpha_{y,k+1}^i.$$

Proof. Lemma 2 can be formulated in the following way: if $y \in B$, then

$$\alpha(x_1^0 y) = \alpha(A x_1^0), \quad A \in \Omega_*. \tag{2}$$

It is clear that if $y, z \in B$ satisfy condition (2), then $yz \in B$ also satisfies condition (2). It is therefore sufficient to prove the lemma for some multiplicative basis in the ring B. Since $\alpha(x_k^0) = k^{-1}\alpha(x_1^0)$ (cf. [3]), the condition (2) is equivalent to

$$\alpha(x_k^0 y) = \alpha(A x_k^0),$$

The multiplicative basis can be chosen to have the form $x_k^n(x_k^0)^s - F_{x_1^n(x_1^0)^s}(x_k^0)$, $k \in Z_p$, $n \geq 1$, $s \geq 0$; $x_k^0(x_1^0)^s - F_{x_k^0(x_1^0)^s}(x_1^0)$. It is therefore sufficient to prove the lemma for elements of the form

$$x_1^n(x_1^0)^s - F_{x_1^n(x_1^0)^s}(x_1^0) \tag{3}$$

and

$$x_k^0(x_1^0)^s - F_{x_k^0(x_1^0)^s}(x_1^0). \tag{4}$$

For elements of the form (4) this lemma was proven in [3].

Consider now the element $x_1^n(x_1^0)^s$. It is geometrically represented by the bundle $\xi + s$ over the space CP^n, where ξ is the canonical line bundle. Let P be the projectification of this fibration and let η be the canonical bundle over P. The sphere bundle $S(\eta)$ with the Z_p action and the sphere bundle $S(\xi + s)$ with the Z_p action define the same element in $U_*(\Gamma_p^\infty)$. On the other hand, the pair (η, P) defines an element of $U_*(CP^\infty)$. It is clear that $D(c_1(\eta))^s = (\xi, CP^n)$. This means that

$$\alpha(x_1^n(x_1^0)^s) = \alpha((x_1^0)^{n+s+1}) + \text{ terms of degree lower than } s.$$

Thus Lemma 2 holds in the case (3) for all coefficients of the first $n+1$ terms. To complete the proof it suffices to show that if $y \in B$, $yx_1^0 - \alpha x_1^0 \in B$, $y(x_1^0)^2 - \beta(x_1^0)^2 - yx_1^0 \in B$, then $\alpha \equiv \beta \pmod p$. Indeed,

$$y^2(x_1^0)^2 - \beta y(x_1^0)^2 - \gamma y x_1^0 \in B, \quad y^2(x_1^0)^2 - 2\alpha y(x_1^0)^2 + \alpha^2(x_1^0)^2 \in B,$$

$$(2\alpha - \beta)(\beta(x_1^0)^2 + \gamma x_1^0) - \alpha^2(x_1^0)^2 - \gamma\alpha x_1^0 \in B,$$

$$-(\alpha - \beta)^2(x_1^0)^2 + \gamma(\alpha - \beta)x_1^0 \in B.$$

That is, $(\alpha - \beta)^2 \equiv 0 \pmod p$ or $\alpha \equiv \beta \pmod p$. This completes the proof.

Let $y \in A$ be a homogeneous element of degree s not equal to $(x_1^0)^s$. Consider the Laurent series $F_y(x_1^0)$ for which $(x_1^0)^{-k} F_{y,k}(x_1^0)$ are the partial sums. We clearly have $\alpha(y(x_1^0)^k) = [(x_1^0)^k F_y(x_1^0)]$.

Lemma 3. *For any homogeneous elements $y, z \in A$ other then $(x_1^0)^s$ we have the equality*

$$F_{yz} = F_y F_z.$$

Proof. Let $\deg y = s$, $\deg z = l$,

$$y(x_1^0)^k - \sum_{j=0}^{k+s-l} \alpha_y^j (x_1^0)^{k+s-j} \in B, \quad z - \sum_{i=0}^{l} \alpha_z^i (x_1^0)^{l-i} \in B.$$

Then

$$yz(x_1^0)^k - \sum_{j=0}^{k+s-1} \sum_{i=0}^{k+s+l-j-1} \alpha_y^j \alpha_z^i (x_1^0)^{l+k+s-i-j}$$

$$-\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{k+s+l-i-1} \alpha_z^i \alpha_y^j (x_1^0)^{l+k+s-i-j} + \sum_{j=0}^{k+s-1} \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_y^j \alpha_z^i (x_1^0)^{k+l+s-i-j} \in B.$$

The coefficient of the term x_1^0 is $\sum_{i+j=k+l-1} \alpha_y^j \alpha_z^i$, **which proves Lemma 3.**

Let us fix some large integer N and consider L_p^{2N+1}. Let $u \in U^2(L_p^{2N+1})$ be a canonical generator. Furthermore, let $y, z \in A$ be homogeneous elements of degrees s and l, and let $F_y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_y^i (x_1^0)^{s-i}$ be the corresponding Laurent series. Let

$$G_y(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_y^i u^i.$$

From Lemmas 2 and 3 it easily follows that if D is the Poincaré duality, then

$$D\alpha(y(x_1^0)^k) = u^{N+1-(k+s)}G_y(u), \quad D\alpha(yz) = u^{N+1-(l+k)}G_y(u)G_z(u).$$

In particular, if $y = x_k^n$ we set

$$G_y(u) = G_{n,k}(u).$$

Recall that $\deg x_k^n = n + 1$. Consider the formal series

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n u^n t^n, \quad G_k(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,k}(u) t^n.$$

Note that $G_{0,1} = 1$, $G_{0,k}(u)$ was obtained in (3). From the formulas we have obtained, it follows that

$$D\alpha(A_k(t)^l) = u^{N+1-l}(G_k(u, t))^l.$$

Let $\phi_{k-1}\colon L_p^{2N+1} \to L_p^{2n+1}$ be the map which corresponds to multiplication by k^{-1}. We have

$$\varphi_{k^{-1},*}(\alpha(x_1^n)) = \alpha(x_k^n) \quad \text{as} \quad \varphi_{k^{-1},*}(D\alpha(A_1(t)^l)) = D\alpha(A_k(t)^l),$$

i. e.

$$\varphi_{k^{-1},*}(u^{N+1-l}G_1^l) = u^{N+1-l}G_k^l.$$

Let $v_k = u(G_k(u, t))^{-1}$. The element v_1 is a multiplicative generator in the ring $U^*(L_p^{2N+1})[[t]]$ over the ring $\Omega_*[[t]]$. Let $\phi_{k-1\,*}(v_1) = \Sigma\mu_i v_1^i$. Using the formula $f_*(f^*(x)y) = xf_*(y)$ in the cases $x = v_1$, $y - G_1^{N+1}$, we obtain the relation

$$v_1 G_k^{N+1} = \sum \mu_i v_k^i G_k^{N+1}$$

or

$$v_1 = \sum \mu_i v_k^i.$$

After elementary transformations, recalling that $\phi_k^*(u) = \Sigma\lambda_i^k u^i$ we get the equality

$$G_k(u, t) = \frac{u}{f_k(u)} G_1(f_k(u), t).$$

For $t = 0$ we get the formula of [3] for fixed submanifolds with trivial normal bundle, since $G_1(f_k(u), t) = 0$ for $t = 0$. So now we must study the series $G_1(u, t)$.

Let $w_{n,m}$ be the projectification of the bundle $(m + 1)\xi$ over CP^n, where ξ is the canonical line bundle. The bordism class in CP^∞

$$\sum w_{n,m} u^n t^n = \frac{A_1(t)^{m+1}}{CP(ut)^m}.$$

On the other hand, $w_{n,m}$ with its canonical bundle is isomorphic to $CP^n \times CP^m$ with the bundle $\xi_1 \otimes \xi_2$. Therefore if $f\colon CP^{N/2} \times CP^{N/2} \to CP^N$ is a map for which $f^*(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2$, then

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_*(u_1^{\frac{N}{2}-n} \otimes u_2^{\frac{N}{2}-m}) u^n t^n = \frac{u^{N-m}G_1(u, t)^{m+1}}{CP(ut)^m}.$$

Applying the formula $f_*(f^*(x)\,y) = xf_*(y)$ to the case $y = \sum (u_1^{N/2-n} \otimes 1)\, u^n t^n$ and $x = u$ we obtain

$$\sum \lambda_{ij} t^j u^i \frac{u^{\left(\frac{N}{2}+j\right)} G_1(u,t)^{\left(\frac{N}{2}+1-j\right)}}{CP(ut)^{\left(\frac{N}{2}-j\right)}} = u\, \frac{u^{\frac{N}{2}} G_1(u,t)^{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{CP(ut)^{\frac{N}{2}}},$$

or, modulo $u^{(N/2+1)} = 0$, we have the equality

$$u = \sum \lambda_{ij} t^j u^i \frac{(uCP(ut))^j}{G_1(u,t)^j}.$$

Here λ_{ij} are coefficients of the series $f^*(u) = \sum \lambda_{ij}\, u^i \otimes u^j$. Theorem 1 is proved.

§ 4. Proof of Theorem 2

Let y and z be two relations in the ring B, with $\bar{y} = yx_1^0 - Ax_1^0 \in B$ and $\bar{z} = zx_1^0 - Bx_1^0 \in B$. Then

$$(\beta(y) - A)\,\beta(\bar{z}) = (\beta(z) - B)\,\beta(\bar{y})$$

in $\Omega_* \otimes Z_p$. To prove the theorem it suffices to find a z such that $\beta(z) = B$ and $\beta(\bar{z}) \neq 0$. Such z exist; for example $z = p(x_1^0)^{p-2}$ for $p \geq 3$, $\bar{z} = p(x_1^0)^{p-1}$. For $p = 2$ one should take $z = 4x_1^0$, $\bar{z} = 4(x_1^0)^2$. Since $\beta(2x_1^0) = CP^1$ we have $\beta(z) = 0$ and $\beta(\bar{z}) = CP^1 \times CP^1$.

Received 16 SEPT 68

BIBLIOGRAPHY

[1] P. Conner and E. Floyd, *Differentiable periodic maps,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 33, Academic Press, New York, and Springer-Verlag. Berlin, 1964. MR 31 #750.

[2] V. Viyah, *Lectrues in K-theory,* Benjamin, New York, 1967; Russian transl., "Mir", Moscow, 1967. MR 36 #7130; 7131.

[3] A. S. Miščenko, *Manifolds with the action of the group Z_p and fixed points,* Mat. Zametki 4(1968), 381-386. (Russian)

Translated by:
S. Feder