ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
33 (1969), 239

УДК 513.83

В. М. БУХШТАБЕР, А. С. МИЩЕНКО

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ «K-ТЕОРИЯ НА КАТЕГОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛЕТОЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ»

В указанной работе (см. Известия АН СССР, сер. матем., 32(1968), 560—604) нами утверждалось, что предложение «всякий элемент $\alpha \in \{\bar{0}\} \subset k^*(X)$ делится на любое целое число» является формальным алгебраическим следствием из теоремы 1.1 (следствие 2.1). Однако, как показывают примеры из алгебры, это предложение не является формальным алгебраическим следствием из теоремы 1.1, но само утверждение справедливо. Поскольку оно используется в дальнейшем (в доказательствах теорем 3.2, 3.3), мы считаем необходимым дать его доказательство. В доказательстве будут использованы некоторые топологические соображения.

Из теоремы 1.1 вытекает на самом деле более слабое утверждение.

Предложение 1. *В группе $k^*(X)$ уравнение $nx = y$ разрешимо для любых n и $y \in \{\bar{0}\}$.*

Пусть $S^*(X)$ — группа элементов бесконечной фильтрации группы $k^*(X)$.

Предложение 2. *В группе $S^*(X)$ уравнение $nx = y$ разрешимо для любых n и $y \in S^*(X)$.*

Доказательство. Из предложения 1 вытекает, что предложение 2 справедливо, если $k^*(X, Z_p) = 0$ для всех p, поскольку в этом случае $k^*(X) = S^*(X)$. Без ограничения общности (ввиду изоморфизма Ботта) можно считать, что X — трехсвязный комплекс. Для данного трехсвязного комплекса X существует такой комплекс Y, что $k^*(Y, Z_p) = 0$, $H^{\mathrm{odd}}(Y, Q) = 0$ и существует отображение $f\colon X \to Y$ такое, что точна последовательность в рациональных когомологиях

$$0 \leftarrow H^{\mathrm{ev}}(X) \leftarrow H^{\mathrm{ev}}(Y) \leftarrow H^{\mathrm{ev}}(Y / X) \leftarrow H^{\mathrm{odd}}(X) \leftarrow 0. \qquad (*)$$

В качестве Y можно взять прямой предел конечных произведений пространств вида $K(Z, 2n)$, $n \geqslant 2$. Отметим, что доказательство того факта (см. теорему 6.2), что $k^*(K(Z, n), Z_p) = 0$, не использует следствия 2.1. Отсюда легко получить, что и $k^*(Y, Z_p) = 0$, а $k^i(Y) = S^i(Y)$. Из точной последовательности $(*)$ получаем, что $H^{\mathrm{odd}}(Y / X, Q) = 0$, а это значит (см. теорему 1.1), что $S^0(Y / X) = 0$. Из точной последовательности пары в k-теории имеем: $k^0(Y / X) \leftarrow k^1(X) \leftarrow S^1(Y)$. Отсюда получаем точную последовательность $0 \leftarrow S^1(X) \leftarrow S^1(Y)$, что и завершает доказательство предложения для $S^1(X)$.

Для $S^0(X)$ нужно перейти к надстройке.

Замечание. На самом деле теоремы 3.2 и 3.3 можно доказать независимо от следствия 2.1.

Поступило
18.IX.1968