ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

32(1968), 560—604

УДК 513.83

В. М. БУХШТАБЕР, А. С. МИЩЕНКО

K-ТЕОРИЯ НА КАТЕГОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛЕТОЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Основная цель работы заключается в вычислении когомологических операций в K-теории $\operatorname{mod} p$ и операций из обычной теории когомологий в K-теорию.

Предложенный метод основан на распространении K-теории на категорию бесконечных комплексов, что позволяет применять спектральные последовательности типа «бар-конструкции».

Введение

Как известно, классическая K-теория строится для конечных клеточных комплексов. Для локально конечных клеточных комплексов, т. е. комплексов с конечными остовами, М. Атья ([1]), ([2]) предложил рассматривать группы $\mathcal{K}(X)$ как обратный предел по остовам, $\mathcal{K}(X) = \varprojlim K(X^n)$. Однако вычисления группы $\mathcal{K}(X)$ затруднено тем обстоятельством, что каждый раз приходится проверять, точна ли когомологическая последовательность пары (X, Y), которая в общем случае неточна [см. ([20])].

М. Атья предложил и другой подход к построению K-теории для локально конечных комплексов. Именно, согласно Дж. Милнору классифицирующее пространство BU бесконечномерной унитарной группы U является гомотопическим коммутативным кольцом (см. Дополнение). Поэтому можно определить функтор $k(X) = [X, BU]_0$ со значениями в категории коммутативных колец. Из результатов Д. Пуппе ([6]) вытекает, что этот функтор определяет обобщенную теорию когомологий на категории локально конечных комплексов.

Вычисления группы $k(X)$ естественным образом приводят к рассмотрению топологии в кольце $k(X)$, индуцированной некоторой возрастающей фильтрацией в пространстве X. Эта топология, вообще говоря, неотделима. Когда фильтрация в пространстве X задана остовами, то можно показать, что $\mathcal{K}(X) / \overline{\{0\}}$ (лемма 1.1).

Спектральные последовательности, которые являются основным инструментом для изучения когомологий, сходятся, как правило, к обратному пределу относительно фильтрации, т. е. в нашем случае к группам $\mathcal{K}(X)$. Поэтому необходимо изучать оба функтора $\mathcal{K}(X)$ и $k(X)$ и связь между ними.

Во многих ситуациях имеет место равенство $k(X) = \mathcal{K}(X)$. Мы даем эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия для равенства $k(X) = \mathcal{K}(X)$ в терминах характера Черна (теорема 3.2) и в терминах спектральной последовательности М. Атья и Ф. Хирцебруха (теорема 3.3). В частности, для k-теории $\operatorname{mod} p$ имеет место равенство $k^*(X, \mathbf{Z}_p) = \mathcal{K}^*(X, \mathbf{Z}_p)$. Далее, используя те же критерии, мы даем положительный ответ на вопрос М. Атья и Ф. Хирцебруха ([2]) о совпадении групп $\mathcal{K}^*(BG)$ и $k^*(BG)$ для любой компактной группы Ли G.

В § 3 исследуется вопрос о сильной сходимости спектральной последовательности М. Атья и Ф. Хирцебруха (теоремы 3.4 и 3.4′).

Особое внимание заслуживают когомологические теории, приведенные по модулю p. Из результатов § 3 вытекает, что любую теорию $h(X, \mathbf{Z}_p)$, определенную на категории конечных комплексов, можно продолжить до теории когомологий на категории локально конечных комплексов, положив $h(X, \mathbf{Z}_p) = \lim h(X^n, \mathbf{Z}_p)$, где X^n — конечные подкомплексы, $X = \bigcup X^n$. При этом продолжении переносятся все вычислительные методы, в частности, спектральная последовательность, индуцированная любой фильтрацией, сильно сходится.

В работе Дж. Адамса и Г. Уолкера ([4]) приведен пример двух комплексов X и Y (причем Y — не локально конечный комплекс) и такого отображения $f\colon X \to Y$, что f гомотопно отображению в точку на каждом остове, но не гомотопно отображению в точку на всем комплексе X. Мы приводим примеры такого отображения, когда $Y = BU$. Существование таких отображений в точности означает, что $k(X) \neq \mathcal{K}(X)$.

Эффективным методом вычисления k-функтора расслоенных пространств оказалась спектральная последовательность, индуцированная фильтрацией Милнора, являющейся геометрической реализацией бар-конструкции. Именно, если $E \xrightarrow{F} X$ — локально тривиальное G-расслоение, где $G \approx \Omega X$ — группа Милнора пространства X, то существует мультипликативная спектральная последовательность, сильно сходящаяся к кольцу $k^*(E, \mathbf{Z}_p)$, а член E_2 равен $\operatorname{cotor}_{k^*(G\mathbf{Z}_p)}(k^*(F, \mathbf{Z}_p), k^*(*, \mathbf{Z}_p))$ (теоремы 9.1 и 9.2).

Мы вычисляем k-функтор от комплексов Эйленберга — Маклейна $K(\pi, n)$. Например, $\mathcal{K}^*(k(\mathbf{Z}, n)) = 0$, $n \geqslant 3$, $k^0(K(\mathbf{Z}, 2n+1)) = \hat{\mathbf{Z}}/\mathbf{Z}$, $k^1(K(\mathbf{Z}, 2n+1)) = 0$. Здесь $\hat{\mathbf{Z}}$ — пополнение группы $\mathbf{Z}$ по всем ее подгруппам. Вычисление групп $k^*(K(\mathbf{Z}, n))$ можно проводить по индукции, начиная с $n = 3$. Этот метод приводит к следующей алгебраической задаче (см. § 5): вычислить гомологии коалгебры $A = \mathbf{Z}_p[[t]]$ с диагональю $t \to t \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t$. Трудность вычисления заключается в том, что коалгебра A не имеет естественной градуировки, согласованной с диагональю, и имеет бесконечное число образующих.

Результаты о группах $k^*(K(\pi, n))$ позволяют вычислить k-функтор от убивающих пространств локально конечных комплексов. Например, мы показываем, что естественное отображение $BU(2n, \ldots, \infty) \to BSU$ индуцирует мономорфное отображение $k^*(BSU) \to k^*(BU(2n, \ldots, \infty))$ на всюду плотное подкольцо (см. § 7).

§ 9 посвящен вычислению кольца когомологических операций в k-теории mod p и алгебры стабильных операций.

Результаты § 4, § 8, § 9, а также теоремы 1.1, 3.3, 3.4, 3.4′, 3.5 получены В. М. Бухштабером.

Результаты § 5, § 6 и теорема 3.2 получены А. С. Мищенко.

Основные результаты этой работы опубликованы в тезисах докладов топологической конференции [см. ([28])].

В работе принята независимая нумерация в каждом параграфе, причем теоремы нумеруются отдельно от следствий и лемм.

§ 1. Функтор $[\,,V]$

Обозначим через W категорию локально конечных комплексов и их непрерывных отображений; через W_0 — категорию комплексов с отмеченной точкой и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку.

Произвольное топологическое пространство V определяет на категории W функтор $[\quad, V]$ со значениями в категории множеств, где $[\quad, V]$ — множество гомотопических классов непрерывных отображений. Если в пространстве V отмечена точка, то аналогично определяется функтор $[\quad, V]_0$ на категории W_0.

Как показал Пуппе [([6]), теорема 6.2], для любой пары пространств $Y \subset X$ с отмеченными точками существует последовательность пространств и отображений (с отмеченными точками)

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X \bigcup_i CY \xrightarrow{\delta} S^1Y \to S^1X \to S^1(X \bigcup_i CY) \to \ldots$$

(где CY обозначает приведенный конус над пространством Y), обладающая следующим свойством: функтор $[\quad, V]_0$, где V — произвольное пространство с отмеченной точкой, переводит эту последовательность в точную последовательность множеств. При этом последовательность

$$[S^1Y, V]_0 \leftarrow [S^1X, V]_0 \leftarrow \ldots$$

является точной последовательностью групп. Группа $[S^1Y, V]_0$ естественным образом определяется как группа операторов на множестве $[X \bigcup_i CY, V]_0$. При этом прообразом любого элемента множества $[X, V]_0$ при отображении j^* является некоторая орбита относительно действия группы операторов в множестве $[X \bigcup_i CY, V]_0$ [см. ([6]), § 4, пп. 3, 5]. Как известно, фактор-пространство X/Y также принадлежит категории W_0 [см. ([7]), § 8]. Если пара пространств $(X, Y) \in W_0$, то естественная проекция $X \bigcup_i CY \to X \bigcup_i CY / CY = X / Y$ является гомотопической эквивалентностью [см. ([6]), теорема 2]. Заметим, что если пространство X является группой или кольцом в категории гомотопических типов, то последовательность

$$[Y, V]_0 \leftarrow [X, V]_0 \leftarrow [X/Y, V]_0 \leftarrow \ldots$$

является точной последовательностью групп, колец, соответственно.

В дальнейшем, если специально не будет оговорено, в функторе $[\ \ , V]_0$ комплекс V будет предполагаться группой в категории гомотопических типов.

Любая возрастающая фильтрация подкомплексами $\{X^n\}$ в пространстве X задает в группе $[X, V]_0$ топологию (вообще говоря, неотделимую); именно, окрестностями нуля считаются группы $\operatorname{Ker}\{[X, V]_0 \to [X^n, V]_0\}$. Если отображение комплексов $f: X \to Y$ согласовано с фильтрациями, то оно индуцирует непрерывный гомоморфизм топологических групп f^*: $[Y, V]_0 \to [X, V]_0$.

Положим

$$\lim_{\{X^n\}} [X, V]_0 = \varprojlim [X^n, V]_0;$$

если X^n — n-мерные остовы, то индекс $\{X^n\}$ мы будем опускать. В группе $\lim_{\{X^n\}}[X, V]_0$ аналогичным образом определяется топология (которая уже будет отделимой), причем естественный гомоморфизм π: $[X, V]_0 \to \lim_{\{X^n\}}[X, V]_0$ является непрерывным. Пусть $X = \bigcup X^n$.

ЛЕММА 1.1. *Гомоморфизм π является эпиморфизмом, а* $\operatorname{Ker}\pi$ *равно замыканию нуля.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \lim_{\{X^n\}} [X, V]_0$. Элемент α является последовательностью

$$\{\alpha_n;\ \alpha_n \in [X^n, V]_0, \quad i^*_{n-1}\alpha_n = \alpha_{n-1}\},$$

где i_n: $X^n \subset X^{n+1}$ — вложение. Пусть $\{f_n\}$ — представители элементов α_n, f_n: $X^n \to V$, $f_n \circ i_{n-1}$ гомотопно f_{n-1}. По теореме Борсука [см. (7), § 5 (J)] существует такое отображение g_n: $X^n \to V$, что $g_n \approx f_n$, $g_n \circ i_{n-1} = f_{n-1}$. Применяя индукцию по числу n, строим такое отображение g: $X \to V$, что $\pi([g]) = \alpha$. Второе утверждение очевидно.

Пусть $(V)_n \xrightarrow{f_n} (V)_{n-1}$ — последовательность «убивающих» пространств комплекса V и расслоений со слоем $K(\pi_{n-1}(V), n-2)$ [см. (8)]. Из работы (9) вытекает, что пространства $(V)_n$ являются комплексами, а расслоения локально тривиальны.

ЛЕММА 1.2. *Пусть дана такая последовательность отображений $\{\varphi_n$: $X \to (V)_n\}$, что $\varphi_n \approx f_{n+1} \circ \varphi_{n+1}$. Тогда все отображения φ_n гомотопны отображению в точку.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X фильтрацию по остовам $\{X^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Обозначим через π_i: $X/X^i \to X/X^{i+1}$ естественные проекции. Мы покажем, что для каждого i существует последовательность отображений $\{\varphi_{n,i}$: $X/X^i \to (V)_n\}$ такая, что $\varphi_{n,0} = \varphi_n$, $\varphi_{n,i} \approx f_{n+1} \circ \varphi_{n+1,i}$, $\varphi_{n+i} \approx \varphi_{n,i+1}\pi_i$. Тогда будем иметь:

$$\varphi_n = \varphi_{n,0} \approx \varphi_{n,1} \cdot \pi_1 \approx \varphi_{n,2} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \approx \ldots,$$

а в этом случае легко построить такое отображение g: $CX \to (V)_n$, что $g|X = \varphi_n$.

Построим теперь для каждого i такие последовательности отображений $\{\varphi_{n,i}$: $X/X^i \to (V)_n\}$. Строить мы их будем индукцией по i. Для $i = 0$

такая последовательность уже существует по условию. Построим по последовательности $\{\varphi_{n,i}\}$ последовательность $\{\varphi_{n,i+1}\}$. Рассмотрим отображения $\varphi_{n,i}\colon X/X^i \to (V)_n$ при $n > i+2$. Поскольку $(V)_n$ n-связно, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & (V)_n & \\ X/X^i \arrow[ur, "\varphi_{n,i}"] \arrow[rr] & & X/X^{i+1} \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

По точной последовательности Пуппе для пары $(X^{i+1}/X^i \subset X/X^i)$

$$[X/X^i, (V)_n]_0 \leftarrow [X/X^{i+1}, (V)_n]_0 \leftarrow [SX^{i+1}/X^i, (V)_n]_0$$

заключаем, что с точностью до гомотопии существует только одно такое отображение h, для которого $\varphi_{n,i} \approx h\cdot\pi_i$. Представитель этого гомотопического класса мы и возьмем за $\varphi_{n,i+1}$. Осталось только проверить, что $\varphi_{n,i+1} \approx f_{n+1}\varphi_{n+1,i+1}$. Для этого заметим, что $\varphi_{n,i} \approx f_{n+1}\circ\varphi_{n+1,i}$, но по построению $\varphi_{n+1,i} \approx \varphi_{n+1,i+1}\circ\pi_i$, значит, $\varphi_{n,i} \approx (f_{n+i}\circ\varphi_{n+1,i+1})\circ\pi_i$; следовательно, $f_{n+1}\circ\varphi_{n+1,i+1} \approx \varphi_{n,i+1}$, что и утверждалось.

Итак, мы построили отображения $\varphi_{n,i+1}$ для $n > i+1$. Отображения $\varphi_{n,i+1}$ для меньших n определяются из соотношения $\varphi_{n,i+1} \approx f_{n+1}\circ\circ\varphi_{n+1,i+1}$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть X и V — такие комплексы, что для любого $i > 0$ группа $H^i(X,Q)\otimes\pi_{i+1}(V) = 0$. Тогда гомоморфизм $\pi\colon [X,V]_0 \to \lim [X,V]_0$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Из леммы 1.1 вытекает, что достаточно доказать равенство $\ker\pi = 0$. Пусть $\varphi\colon X \to (V)_n$ — отображение, гомотопное отображению в точку на каждом остове X^k. Докажем, что существует такое отображение $\psi\colon X \to (V)_{n+1}$, что $f_{n+1}\cdot\psi \approx \varphi$, и φ тоже гомотопно отображению в точку на каждом остове X^k.

Рассмотрим расслоение $(V)_{n+1} \xrightarrow{K(\pi_n(V),\, n-1)} (V)_n$. Ясно, что существует поднятие $\chi\colon X \to (V)_{n+1}$, т. е. $f_{n+1}\circ\chi = \varphi$. Как известно, в этом случае всякое другое поднятие однозначно определяется гомотопическим классом отображения пространства X в слой $K(\pi_n(V), n-1)$. В нашей ситуации таких гомотопических классов конечное число. Следовательно, среди этих поднятий имеется хотя бы одно поднятие ψ, гомотопное отображению в точку на каждом остове X^k.

По индукции построим последовательность отображений $\varphi_n\colon X \to (V)_n$, удовлетворяющую условиям леммы 1.2.

§ 2. Функторы $k(X)$, $k(X, Z_p)$

Пусть BU — классифицирующее пространство бесконечномерной унитарной группы. Известно, что BU является клеточным комплексом. Согласно Милнору [см. ([2]), стр. 4] пространство BU является коммутативным кольцом в категории гомотопических типов. Поскольку мы не обладаем изложением этого результата, мы приводим его в дополнении к настоящей работе.

Определение. k-функтором назовем функтор $[\ \ , BU]_0$.

Стандартным образом определяется k-функтор с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}_p$:

$$k(X, \mathbf{Z}_p) = k(X \underset{p}{\#} (S^1 \cup D^2)).$$

Группы $k(X)$ и $k(X, \mathbf{Z}_p)$, как отмечалось в § 1, являются топологическими группами, причем в силу теоремы 1.1 топология в группе $k(X, \mathbf{Z}_p)$ отделима.

Заметим, что для конечных комплексов имеет место изоморфизм $k(X) \approx \tilde{K}(X)$ [см. (2), 1.3], где $\tilde{K}(X)$ — группа Гротендика стабильных векторных U-расслоений над конечным комплексом X. В частности, имеем:

$$k(S^n) = k^{-n}(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{если } n \text{ четное}, \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Обозначим через β образующую группы $k(S^2) = \mathbf{Z}$. Тогда можно определить гомоморфизм Ботта β: $k(X) \to k(S^2X)$ по формуле $\beta(\alpha) = \beta \otimes \alpha$, $\alpha \in k(X)$. Классическая теорема Ботта утверждает, что для любого конечного комплекса гомоморфизм Ботта является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 2.1. *Гомоморфизм Ботта*

$$\beta\colon k(X) \to k(S^2X)$$

является изоморфизмом для любого комплекса.

Доказательство. В кольце $k(BU)$ имеется канонический элемент, соответствующий тождественному отображению пространства BU в себя. Обозначим этот элемент через η. Рассмотрим такое отображение f: $S^2BU \to BU$, при котором $f^*\eta = \beta \otimes \eta$. Пусть X — конечный комплекс и $\alpha \in k(X)$. Рассмотрим композицию отображений $\chi = f \circ g$: $S^2X \to S^2BU \to BU$, где $g = (\mathrm{id}) \otimes \alpha$. Имеем равенства:

$$\chi^*\eta = (\mathrm{id} \otimes \alpha)^*(\beta \otimes \eta) = \beta \otimes \alpha.$$

По классической теореме Ботта отображение $\chi = f \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha)$ гомотопно отображению в точку тогда и только тогда, когда таковым является отображение α. Для любых комплексов X и Y существует взаимно одозначное соответствие между множествами $[S^2X, Y]_0$ и $[X, \Omega^2Y]_0$, причем это соответствие задается правилом: если дано отображение φ: $S^2X \to Y$, то соответствующее ему отображение $p(\varphi)$: $X \to \Omega^2Y$ удовлетворяет равенству $[p(\varphi)(x)](z) = \varphi(x, z)$, где $z \in S^2$, а пространство Ω^2Y рассматривается как пространство отображений с отмеченной точкой сферы S^2 в пространство Y [см., например, (11), § 2]. Обозначим через $\tilde{f}$: $BU \to (\Omega^2BU)_0$ отображение, соответствующее отображению f. Мы видим теперь, что отображение $f \circ g$: $S^2X \to BU$ переходит в композицию $X \xrightarrow{\alpha} BU \to (\Omega^2BU)_0$, т. е. классическая теорема Ботта утверждает, что отображение $\tilde{f}$ является слабой гомотопической эквивалентностью.

Из явного вида формулы

$$p\colon [S^2X, BU] \xrightarrow{\approx} [X, (\Omega^2BU)_0]_0$$

мы видим, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}[X, BU]_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\tilde{f}_0"'] & {[S^2X, BU]_0} \arrow[d, "p"] \\ & {[X, (\Omega^2 BU)_0]_0}\end{tikzcd}$$

уже для любых комплексов. Поскольку отображения $\tilde{f}^*$ и p являются изоморфизмами, то и отображение β тоже является изоморфизмом.

Группы $k^*(X)$ и $k^*(X, \mathbf{Z}_p)$ связаны формулой универсальных коэффициентов:

$$0 \to k^*(X) \otimes \mathbf{Z}_p \to k^*(X, \mathbf{Z}_p) \to \operatorname{Tor}(k^*(X), \mathbf{Z}_p) \to 0. \qquad (*)$$

Точность последовательности $(*)$ можно получить из рассмотрения пары $(X \# (S^1 \cup D^2), X \# S^1)$ [см., например, ([22])].

Из формулы $(*)$ и из того, что топология, в группе $k(X, \mathbf{Z}_p)$ отделима, вытекает

Следствие 2.1. *Всякий элемент* $\alpha \in \overline{\{0\}} \subset k^*(X)$ *делится на любое целое число. В частности, подгруппа* $\overline{\{0\}} \subset k^*(X)$ *имеет бесконечное число образующих.*

Следствие 2.2. *Если* $k^i(X) = \mathcal{K}^i(X)$ *и* $Y \subset X$ *— конечный подкомплекс, то* $k^i(X/Y) = \mathcal{K}^i(X/Y)$, *где* $\mathcal{K}^i(X) = \lim K^i(X^n)$, X^n *— n-мерные остовы комплекса X.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пары (X, Y):

$$\ldots \leftarrow k^i(X) \xleftarrow{j^*} k^i(X/Y) \xleftarrow{\delta} k^{i-1}(Y) \leftarrow \ldots .$$

Имеет место включение $j^*(\overline{\{0\}}) \subset \overline{\{0\}} = 0$, т. е. $\overline{\{0\}} \subset \operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} \delta$. Поскольку $\operatorname{Im} \delta$ — конечно порожденная группа, то в силу следствия 2.1 имеем: $\overline{\{0\}} = 0$.

ЛЕММА 2.3. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непрерывное отображение, и* $f^*\colon k^i(Y, \mathbf{Z}_p) \to k^i(X, \mathbf{Z}_p)$ *— мономорфизмы для всех простых чисел p. Тогда гомоморфизм* $f^*\colon \mathcal{K}^*(X) \to \mathcal{K}^*(Y)$ *является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{K}^*(X)$, $\alpha \neq 0$ и $f^*(\alpha) = 0$. Пусть $\beta \in k^*(X)$ и $\pi(\beta) = \alpha$. Тогда существует такое число N_0, что если $N > N_0$, то уравнение $\alpha = Nx$ неразрешимо. В самом деле, существует остов $X^n \overset{i}{\subset} X$ такой, что $i^*(\alpha) \neq 0$. Поскольку $k^*(X^n)$ — конечно порожденная группа, то найдется такое N_0, что уравнение $i^*(\alpha) = Ny$ неразрешимо в $\mathcal{K}^*(X^n)$ для всех $N > N_0$.

Пусть $p > N_0$ — простое число. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k^*(X) \otimes \mathbf{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & k^*(X, \mathbf{Z}_p) \arrow[d, "f^*"] \\ 0 \arrow[r] & k^*(Y) \otimes \mathbf{Z}_p \arrow[r] & k^*(Y, \mathbf{Z}_p) \end{tikzcd}$$

Поскольку f^* — мономорфизм, то и $\bar{f}$ — мономорфизм. Значит, из равенства $\bar{f}(\alpha \otimes 1) = 0$ вытекает, что $\alpha \equiv 0 \bmod p$, т. е. $\alpha = px$, что невозможно.

Следствие 2.4. *Если* $k^i(X, \mathbf{Z}_p) = 0$ *для всех простых чисел p, то* $\mathcal{K}^i(X) = 0$.

§ 3. Спектральная последовательность и элементы бесконечной фильтрации

1. Согласно общей теории [см. ([10]), гл. 15, § 7] по любой фильтрации X^p в комплексе X можно построить когомологическую спектральную последовательность для любой теории когомологий h.

Именно, следует положить:

$$\begin{aligned} H^n(p, q) &= h^n(X^q, X^p), \\ Z_r^{p,q} &= \operatorname{Im}(H^{p+q}(p, p+r) \to H^{p+q}(p, p+1)), \\ B_r^{p,q} &= \operatorname{Im}(H^{p+q-1}(p-r+1, p) \to H^{p+q}(p, p+1)), \\ E_r^{p,q} &= Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

Из определения видно, что

$$E_1^{p,q} = h^{p+q}(X^{p+1}/X^p).$$

Фильтрацию $\{X^n\}$ назовем надстроечной, если существуют такие комплексы Y^n и отображения i_n: $Y^n \to X^n$, что

$$X^{n+1} = X^n \cup_{i_n} CY^n.$$

Пусть $E \to X$ — локально тривиальное расслоение со слоем F. Тогда если в базе дана надстроечная фильтрация $\{X^n\}$, то член E_1 спектральной последовательности по фильтрации в пространстве E, индуцированной фильтрацией $\{X^n\}$, имеет вид:

$$E_1^{p,q} = h^{p+q}((X^{p+1}/X^p) \times F)/F).$$

Мы будем рассматривать только такие фильтрации в X, у которых X^0 есть точка. В этом случае для любого p существует такое r, что существует естественное вложение $E_{r+1}^p \subset E_r^p$. Тогда положим

$$E_\infty^p = \bigcap_r E_r^p.$$

Введем еще одно обозначение:

$$F^p = \operatorname{Ker}(h(X) \to h(X^p)).$$

ЛЕММА 3.1. *Существует естественное отображение*

$$\psi: F^p/F^{p+1} \to E_\infty^p,$$

являющееся мономорфизмом.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & h(SX^p) \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & & \\
h(X^{p+1}/X^p) \arrow[d, "\varphi_5"'] & h(X^{p+r}/X^p) \arrow[l, "\varphi_4"'] & h(X/X^p) \arrow[l, "\varphi_3"'] \arrow[d, "\varphi_8"] & h(X/X^{p+1}) \arrow[l, "\varphi_7"'] \arrow[dl, "\varphi_9"] \\
h(X^{p+1}) & & h(X) \arrow[ll, "\varphi_6"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

Построим отображение ψ: $F^p/F^{p+1} \to E_\infty^p$. Сначала построим отображения χ_r: $F^p \to E_r^p$ для достаточно больших r. Пусть $x \in F^p$, т. е. $x = \varphi_8(y)$ для некоторого $y \in h(X/X^p)$. Тогда элемент $z = \varphi_4\varphi_3(y)$ принадлежит Z^p_r. Положим $\chi_r(x) = [z] \in E_r{}^p$. Если $\varphi_8(y') = x$, то $\varphi_8(y' - y) = 0$, т. е. $y' - y = \varphi_1(u)$. Значит, $\varphi_4\varphi_3(y) - \varphi_4\varphi_3(y') = \varphi_2(u) \in B^p_r$. Таким образом, отображение χ_r определено корректно.

Итак, для достаточно большого r имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} F^p \arrow[r, "\chi_r"] \arrow[dr, "\chi_{r+1}"'] & E^p_r \\ & E^p_{r+1} \arrow[u] \end{tikzcd},$$

т. е. можно определить отображение $\chi\colon F^p \to E^p_\infty$.

Докажем, что $\operatorname{Ker}\chi = F^{p+1}$. Пусть $\chi(x) = 0$. Тогда при некотором r $\chi_r(x) = 0$. Пусть $\varphi_8(y) = x$, $\varphi_4\varphi_3(y) = \varphi_2(u)$. Это значит, что $\varphi_5\varphi_4\varphi_3(y) = 0$, т. е. $\varphi_6(x) = 0$. Следовательно, $x = \varphi_9(v)$, $v \in h(X, X^{p+1})$, т. е. $x \in F^{p+1}$. Итак, $\operatorname{Ker}\chi \subset F^{p+1}$. Обратно, пусть $x \in F^{p+1}$, т. е. $x = \varphi_9(v)$. Значит, $\varphi_6(x) = 0$. Положим $y = \varphi_7(v)$, $\varphi_8(y) = x$, $z = \varphi_4\varphi_3(y)$. Тогда $\varphi_5(z) = 0$, т. е. $z = \varphi_2(u)$ или $z \in B^p_r$. Таким образом, $F^{p+1} \subset \operatorname{Ker}\chi$. Лемма доказана.

Определение 3.2. Спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$ называется сильно сходящейся, если гомоморфизм

$$\psi\colon F^p/F^{p+1} \to E^p_\infty$$

является изоморфизмом.

Заметим, что если для некоторого числа p имеет место равенство $X^p = X$, т. е. если фильтрация конечна, то спектральная последовательность сильно сходится. Это вытекает из того, что в диаграмме (1) при достаточно большом r гомоморфизм φ_3 становится изоморфизмом.

Если спектральная последовательность сильно сходится, то по определению $E^*_\infty = Gh(X)$, где $Gh(X)$ — градуированная группа, присоединенная к группе $h(X)$ относительно фильтрации F^p. Очевидно, что

$$Gh(X) = G\Big(h(X)/\bigcap_p F^p\Big).$$

Поэтому член E^*_∞ несет информацию только о группе

$$h(X)/\bigcap_p F^p = \varprojlim h(X^p) = \varprojlim_{\{X^p\}} h(X).$$

В связи с этим мы будем говорить, что спектральная последовательность сильно сходится к группе $\varprojlim_{\{X^p\}} h(X)$.

2. Случай $h(X) = k^*(X, \mathbf{Z}_p)$, $p \geqslant 2$.

Определение 3.3. Топологическая абелева группа называется *проконечной*, если она является обратным пределом последовательности конечных групп.

Некоторые свойства проконечных групп изучены в работе ([18]). Перечислим необходимые нам в дальнейшем свойства проконечных групп:

a) Проконечные группы компактны, и топология в них отделима.

b) Обратный предел последовательности проконечных групп является проконечной группой.

c) Категория проконечных групп и непрерывных гомоморфизмов является абелевой категорией в смысле ([19]). Этот факт вытекает из того, что если непрерывный гомоморфизм f: $G_1 \to G_2$, является алгебраическим изоморфизмом, G_1 — проконечная группа, а G_2 — отделимая группа, то f является топологическим изоморфизмом.

d) Функтор обратного предела из категории обратных последовательностей проконечных групп в категорию проконечных групп является точным функтором.

Докажем свойство d). Пусть дана точная последовательность

$$0 \to \{A_n, \pi_n^m\} \to \{B_n, \pi_n^m\} \to \{C_n, \pi_n^m\} \to 0,$$

т. е. система точных последовательностей

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0,$$

коммутирующих с проекциями π_n^m. Положим $A = \lim A_n$, $B = \lim B_n$, $C = \lim C_n$. Требуется доказать точность последовательности

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0.$$

Доказательство точности в члене A тривиально. Пусть $b \in B$, $\psi(b) = 0$, $b_n = \pi_n(b)$. Тогда существуют (причем единственные) такие элементы $a_n \in A_n$, что $\varphi_n(a_n) = b_n$. Легко проверить, что элементы a_n образуют обратную последовательность, т. е. существует такой элемент $a \in A$, что $\varphi(a) = b$.

Пусть теперь $c \in C$, и $c \overline{\in} \operatorname{Im} \psi$. Поскольку B и C — проконечные группы, то группа $\operatorname{Im} \psi$ является замкнутой подгруппой в группе C, т. е. $C \setminus \operatorname{Im} \psi$ — открытое множество. Значит, существуют такое число n и открытое множество $U \subset C_n$, что $\pi^{-1}(U) \neq \varnothing$, а $\pi_n^{-1}(\overline{U}) \cap \operatorname{Im} \psi = \varnothing$, т. е. $\psi^{-1}\pi_n^{-1}(\overline{U}) = \varnothing$. Но

$$\psi^{-1}\pi_n^{-1}(\overline{U}) = \pi_n^{-1}\psi_n^{-1}(\overline{U}).$$

Значит, существует такое число N, что

$$\pi_n^N(B_N) \cap \psi_n^{-1}(\overline{U}) = \varnothing$$

или

$$(\pi_n^N)^{-1}\psi_n^{-1}(\overline{U}) \neq 0.$$

Поскольку $(\pi_n^N)^{-1}\psi_n^{-1}(\overline{U}) = \psi_N^{-1}(\pi_n^N)^{-1}(\overline{U})$, а $(\pi_n^N)^{-1}(\overline{U}) \neq 0$ и ψ_N — эпиморфизм, то мы приходим к противоречию.

Из теоремы 1.1 вытекает, что группа $k(X, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim k(X^n, \mathbf{Z}_p)$, где X^n — n-мерные остовы, и поэтому является проконечной группой. Если X^n — произвольная фильтрация подкомплексами, причем $X = \bigcup_n X^n$, то и в этом случае $k(X, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim k(X^n, \mathbf{Z}_p)$.

Это вытекает из леммы 1.1 и того факта, что фильтрация $\{X^n\}$ мажорирует фильтрацию по остовам.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть X — комплекс, $\{X^n\}_{n\geqslant 0}$ — возрастающая фильтрация подкомплексами, $\bigcup\limits_{n>0} X^n = X$; $\{E_r, d_r\}$ — спектральная последовательность, индуцированная фильтрацией $\{X^n\}$ для теории когомологий $k^*(\ ,\mathbf{Z}_p)$. Тогда эта спектральная последовательность сильно сходится к группе $k^*(X,\mathbf{Z}_p)$.*

Доказательство. Рассмотрим обратную последовательность спектральных последовательностей $\{E_r(X^n), d_r\}$ относительно индуцированных фильтраций. Легко видеть, что $E_1 = \lim\limits_{\longleftarrow} E_1(X^n)$. Значит, в силу свойства (d) имеем равенство

$$E_2 = H(E_1) = \lim_{\longleftarrow} E_2(X^n),$$

и, далее, по индукции

$$E_r = \lim_{\longleftarrow} E_r(X^n),$$
$$E_\infty = \lim_{\longleftarrow} E_\infty(X^n).$$

Поскольку для каждого n спектральная последовательность $\{E_r(X^n), d_r\}$ сильно сходится к $k^*(X^n,\mathbf{Z}_p)$, а $Gk^*(X,\mathbf{Z}_p) = \lim\limits_{\longleftarrow} Gk^*(X^n,\mathbf{Z}_p)$, то $E_\infty = Gk^*(X,\mathbf{Z}_p)$, что и требовалось доказать.

3. Элементы бесконечной фильтрации в группе $k^*(X)$. Пусть X^n — фильтрация по остовам. Следуя работе ([1]), обозначим $\mathscr{K}^*(X) = \lim k^*(X^n)$ (см. стр. 566).

Имеет место естественный эпиморфизм $k^*(X) \to \mathscr{K}^*(X)$ (лемма 1.1). Этот эпиморфизм тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $\overline{\{0\}} = 0$; т. е. нет элементов бесконечной фильтрации в группе $k^*(X)$.

ЛЕММА 3.4. *Если $H^{ev}(X,\mathbf{Z})$ не имеет кручения, то $\mathscr{K}^0(X) = k^0(X)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon X \to BU$ — отображение, тривиальное в целочисленных когомологиях. Построим отображения $\varphi_{2n}\colon X \to BU(2n,\ldots,\infty)$, удовлетворяющие условиям леммы 1.2.

Положим $\varphi_2 = \varphi$. Пусть построены $\varphi_2,\ldots,\varphi_{2n}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & BU(2n+2,\ldots,\infty) \arrow[d, "K(\mathbf{Z},2n-1)"] \\
X \arrow[ur, "\varphi_{2n+2}"] \arrow[r, "\varphi_{2n}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & BU(2n,\ldots,\infty) \arrow[d, "g_{2n}"] \\
 & BU
\end{tikzcd}$$

Препятствие к построению поднятия φ_{2n+2} равно $\varphi_{2n}^*(a)$, где a — образующая группы $H^{2n}(BU(2n,\ldots,\infty),\mathbf{Z})$. Известно, что $g_{2n}^*(c_n) = (n-1)!a$ *. Значит,

$$(n-1)!\varphi_{2n}^*(a) = \varphi_{2n}^* g_{2n}^*(c_n) = \varphi^*(c_n) = 0.$$

Поскольку в группе $H^{ev}(X,\mathbf{Z})$ нет кручения, то $\varphi_{2n}^*(a) = 0$.

Итак, отображение можно построить. Далее применяем лемму 1.2.

Докажем два критерия отсутствия элементов бесконечной фильтрации (теоремы 3.2 и 3.3).

---

* Здесь c_n — n-мерный класс Чженя канонического расслоения над BU.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть X — клеточный комплекс. Для того чтобы $\mathcal{K}^0(X) = k^0(X)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $\alpha \in H^{\mathrm{odd}}(X, Q)$ существовал такой элемент $\eta \in k^1(X)$ и целое число N, что $\mathrm{ch}\,\eta = N\alpha +$ члены большей размерности. Аналогичное условие имеет место для равенства $\mathcal{K}^1(X) = k^1(X)$.*

Доказательство. Нам понадобится следующая вспомогательная

ЛЕММА. *Для клеточного комплекса X, удовлетворяющего условиям теоремы 3.2, существует комплекс Y, обладающий свойствами:*

a) $X \subset Y$;

b) $H^{\mathrm{odd}}(Y, \mathbf{Z}) = 0$;

c) $H^{ev}(Y, \mathbf{Z})$ *не имеет кручения*;

d) *вложение индуцирует эпиморфизм* $H^{ev}(Y, Q) \to H^{ev}(X, Q)$;

e) $k^1(Y) = \mathcal{K}^1(Y) = 0$.

Доказательство леммы. По условию для любого элемента $\alpha \in H^{ev}(X, Q)$ существует такое отображение f_α: $X \to BU$, что $f_\alpha^*\ \mathrm{ch}\,\xi = N\alpha +$ члены большей размерности, где ξ — канонический элемент из $k^0(BU)$, и поэтому такое, что $f_\alpha^*\ (\beta) = \alpha$, где $\beta = \mathrm{ch}_n\ (\xi)\ /\ N$, $\dim\alpha = 2n$. Ясно, что свойству d) можно удовлетворить, рассмотрев прямое произведение отображений f_α по всем α (или хотя бы по некоторой системе образующих). Однако получающийся при этом комплекс не локально конечен. Поэтому конструкцию следует несколько усложнить.

В первую очередь вместо отображений f_α можно рассматривать аналогичные отображения $X \to Y_n = BU\ /\ [BU]^{2n-1}$, а вместо прямого произведения пространств BU — прямой предел Y конечных произведений пространств Y_n. Ясно, что получающийся комплекс Y локально конечен. Для него очевидным образом выполнены условия b), c) и d), а согласно лемме 3.4 и условие e). Наконец, переходя к цилиндру отображения, мы известным образом удовлетворим условию a). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условия теоремы 3.2. Пусть Y — комплекс, построенный в лемме. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} k^1(X) & \xrightarrow{i} & k^0(Y/X) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{K}^1(X) & \to & \mathcal{K}^0(Y/X) \end{array}$$

Верхняя строка этой диаграммы является отрезком точной последовательности пары (Y, X) и поэтому гомоморфизм i является мономорфизмом. Вертикальные отображения π являются эпиморфизмами (лемма 1.1). Более того, правый гомоморфизм π представляет собой изоморфизм. Действительно, из точной когомологической последовательности пары (Y, X) непосредственно вытекает, что $H^{\mathrm{odd}}(Y\ /\ X, Q) = 0$. Поэтому в силу теоремы 1.1 имеет место равенство $\mathcal{K}^0(Y\ /\ X) = k^0(Y\ /\ X)$. Поскольку i мономорфно, а правое π изоморфно, левое π также изоморфно. Достаточность условий теоремы 3.2 тем самым полностью доказана.

Докажем необходимость. Пусть имеется такой элемент $\alpha \in H^{2i}(X, Q)$, что нельзя найти $y \in \mathcal{K}^0(X)$ такой, чтобы $\mathrm{ch}\,y = N\alpha +$ члены большей размерности. Рассмотрим пару (X, X^{2i}), а для нее коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \leftarrow k^1(X) & \overset{\pi^*}{\leftarrow} & k^1(X/X^{2i}) & \overset{\delta^*}{\leftarrow} & k^0(X^{2i}) & \overset{i^*}{\leftarrow} & k^0(X) \leftarrow \ldots \\ & & \downarrow \mathrm{ch} & & \downarrow \mathrm{ch} & & \downarrow \mathrm{ch} \\ & \ldots \leftarrow & H^{\mathrm{odd}}(X/X^{2i}, Q) & \leftarrow & H^{ev}(X^{2i}, Q) & \leftarrow & H^{ev}(X, Q) \leftarrow \ldots \end{array}$$

Ясно, что $i^*(\alpha) \neq 0$. Поскольку X^{2i} — конечный комплекс, то существует такой элемент $y_1 \in \mathcal{K}^0(X^{2i})$, что $\mathrm{ch}\, y_1 = Ni^*(\alpha)$. По условию, $Ny_1 \overline{\in} \mathrm{Im}\, i^*$ ни для какого N. Тогда элемент $z = \delta^*(y_1) \neq 0$ бесконечного порядка и $\mathrm{ch}\, z = 0$. Если бы $\mathcal{K}^1(X) = k^1(X)$, то в силу следствия 2.1 имело бы место равенство $\mathcal{K}^1(X/X^{2i}) = k^1(X/X^{2i})$. Рассмотрим подгруппу $S \subset k^1(X/X^{2i})$, порожденную элементом z. Покажем, что пополнение $\hat{S}$ группы S континуально. Для этого достаточно заметить, что ограничение элемента z на каждый остов X^n/X^{2i}, начиная с некоторого n, не равно нулю и имеет конечный порядок, т. е. группа $\hat{S}$ есть обратный предел нестационарной последовательности конечных групп. Таким образом, множество $\mathrm{Im}\, \delta^* \subset \subset k^1(X/X^{2i})$ незамкнуто (так как $k^0(X^{2i})$ — конечно порожденная группа). Поскольку $\mathrm{Im}\, \delta^* = \mathrm{Ker}\, \pi^*$, то множество $\overline{\{0\}} \in k^1(X)$ незамкнуто, что противоречит предположению.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть X — комплекс. Для того чтобы $\mathcal{K}^0(X) = k^0(X)$, необходимо и достаточно, чтобы в спектральной последовательности, индуцированной фильтрацией по остовам, для каждого q существовало такое $r_0 = r_0(q)$, что $E_{r_0}^{2q+1,0} = E_\infty^{2q+1,0}$. Аналогичное условие имеет место для равенства $\mathcal{K}'(X) = k'(X)$.*

Доказательство необходимости. Пусть $\mathcal{K}^0(X) = k^0(X)$. Рассмотрим две спектральные последовательности $\{{}^KE_r^*, d_r\}$, $\{{}^HE_r^*, d_r\}$, индуцированные фильтрацией по остовам, для теорий когомологий $k^*(\ )$ и $H^*(\ , Q)$, соответственно. Характер Черна индуцирует гомоморфизм

$$\mathrm{ch}\colon {}^KE_r \to {}^HE_r,$$

причем при $r = 2$ группа $\mathrm{Ker}\, ({}^KE_2^q \to {}^HE_2^q)$ конечна [см. (2)]. Поэтому в силу теоремы 3.2 в группе ${}^KE_2^{2q+1}$ существует подгруппа конечного индекса, состоящая из циклов всех дифференциалов, т. е. существует такое число $\mu(q) < \infty$, что группа ${}^KE_{\mu(q)}^{+1,0}$ состоит уже из циклов всех дифференциалов. Если положить теперь $r_0 = \max\, (\mu(q), 2q+1)$, то мы получим требуемое равенство $E_{r_0}^{2q+1,0} = E_\infty^{2q+1,0}$.

Доказательству достаточности условий теоремы предпошлем две леммы.

ЛЕММА 3.5. *В каждом комплексе X существует такая фильтрация конечными подкомплексами X^n, $X = \bigcup X^n$, что $H^q(X, \mathbf{Z}) = H^q(X^n, \mathbf{Z})$ при $q \leqslant n$ и $H^q(X^n, \mathbf{Z}) = 0$ при $q > n$.*

Доказательство леммы вполне очевидно.

Пусть $S(X)$ — подгруппа в $k^0(X)$, равная замыканию нуля (группа элементов бесконечной фильтрации). Очевидно, что соответствие $X \to S(X)$ функториально.

ЛЕММА 3.6. *Пусть* X^n — *подкомплекс, описанный в лемме* 3.5. *Тогда при выполнении условий теоремы* 3.3 *точна следующая последовательность*:

$$0 \leftarrow S(X) \xleftarrow{i^*} S(X / X^n).$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\ldots \leftarrow k^0(X^n) \xleftarrow{i^*} k^0(X) \xleftarrow{j^*} k^0(X / X^n) \xleftarrow{\delta} k'(X^n) \leftarrow \ldots$$

Ясно, что $i^*(S(X)) = 0$. Обозначим через A группу $j^*(S(X))$. Ввиду функториальности $S(\ )$ имеем включение $S(X / X^n) \subset A$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
0 \leftarrow S(X) & \xleftarrow{\quad i^* \quad} & A & \longleftarrow & \operatorname{Im}\delta \leftarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \leftarrow S(X) / i^*(S(X / X^n)) & \leftarrow & A / S(X / X^n) & \leftarrow & \operatorname{Im}\delta / \operatorname{Im}\delta \cap S(X / X^n) \leftarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array} \qquad (2)$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы 3.3 группа $\operatorname{Im}\delta / \operatorname{Im}\delta \cap \cap S(X / X^n)$ конечна. Допустим, что эта группа бесконечна. Заметим, что для любого N ограничение группы $\operatorname{Im}\delta$ на подкомплекс X^N / X^n есть конечная группа. В самом деле, для конечных комплексов Y имеет место изоморфизм $k^0(Y) \otimes Q \approx H^{ev}(Y, Q)$, а гомоморфизм δ: $H^{\mathrm{odd}}(X^n, Q) \to \to H^{ev}(X^N / X^n, Q)$ по условию нулевой. Следовательно, для любого N найдется элемент $z \in k'(X^n)$ такой, что $\delta(z)$ равен нулю на подкомплексе X^N / X^n и не равен нулю на подкомплексе X^{N+1} / X^n. Пусть максимальная фильтрация элемента z равна $s \leqslant n$, s — нечетное. Непосредственно из определения спектральной последовательности можно усмотреть, что элементу z соответствует ненулевой элемент $\bar{z} \in E^s_{N-s}(X)$, элементу $\delta(z)$ соответствует ненулевой элемент $y \in E^N_{N-s}(X)$, причем $d_{N-s}(\bar{z}) = y$. Поскольку $1 \leqslant s \leqslant n$, то при некотором нечетном s для бесконечного числа номеров r дифференциал d_r: $E^r \to E^{s+r}_r$ нетривиален. Это противоречит условиям теоремы 3.3. Таким образом, группа $\operatorname{Im}\delta / \operatorname{Im}\delta \cap S(X / X^n)$ конечна.

Вернемся к диаграмме (2). Группа $P = S(X) / i^*(S(X / X^n))$ состоит из элементов, делящихся на любое число [см. следствие 2.1]. Группа $L = A / S(X / X^n)$ не содержит элементов, делящихся на любое число, так как $A / S(X / X^n) \subset \mathscr{K}^0(X / X^n)$ (см. доказательство леммы 2.3).

Пусть m — такое число, что уравнение $a = mx$ неразрешимо в группе L ни для какого $a \in \operatorname{Im}\delta / \operatorname{Im}\delta \cap S(X / X^n) = R$, т. е. $mL \cap R = 0$. С другой стороны, для любого $x \in P$ существует элемент y, переходящий в x / m, т. е. my переходит в x. Таким образом, группа mL изоморфна группе P, а так как в группе L нет элементов, делящихся на любое число, то $P = mL = 0$. Значит, $S(X) = i^*(S(X / X^n))$. Лемма 3.6 доказана.

Ясно, что если пространство X удовлетворяет условиям теоремы 3.3, то и пространство X / X^n удовлетворяет тем же условиям. Значит, в силу леммы 3.6 для любого отображения f: $X \to BU$, гомотопного отображению в точку на каждом остове, существует отображение $g\colon X/X^n \to BU$ такое, что $f \sim g \circ \pi$, а g тоже гомотопно отображению в точку на каждом остове (где $\pi\colon X \to X/X^n$ — проекция). Применяя индукцию, можно построить продолжение отображения f на конус $CX \to BU$. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.7. *Если X — такой комплекс, что $H^{ev}(X, Q) \neq 0$, $\mathcal{K}^0(X) = 0$, то $k^1(X) \neq 0$.*

Следствие непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и того факта, что на группе $\{\overline{0}\}$ гомоморфизм ch равен нулю.

Следствие 3.8. *Имеет место равенство $k^n(K(\pi, n)) = \mathcal{K}^n(K(\pi, n))$, где π — конечно порожденная абелева группа.*

Следствие непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и того факта, что $H^{n+2k+1}(K(\pi, n), Q) = 0$ для любого $k \geqslant 0$.

Следствие 3.9. *Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, что $f^*\colon H^*(Y, Q) \to H^*(X, Q)$ — эпиморфизм. Тогда из равенства $k^*(Y) = \mathcal{K}^*(Y)$ вытекает равенство $k^*(x) = \mathcal{K}^*(X)$.*

Следствие 3.10. *Пусть X — один из комплексов $BO(n, \ldots, \infty)$, $BU(2n, \ldots, \infty)$. Тогда $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$.*

Доказательство. Как известно, существует каноническое отображение $X \to BU$, индуцирующее эпиморфизм в рациональных когомологиях. Соответствующее равенство для пространства BU вытекает из леммы 3.4.

Следствие 3.11. *Пусть $f\colon \hat{X} \to X$ — регулярное накрытие. Тогда из равенства $k^*(\hat{X}) = \mathcal{K}^*(\hat{X})$ вытекает равенство $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$.*

Следствие 3.12. *Пусть G — компактная группа Ли. Тогда $k^*(BG(n, \ldots, \infty)) = \mathcal{K}^*(BG(n, \ldots, \infty))$.*

Следствия 3.11 и 3.12 доказаны в ([20]).

4. Случай $h(X) = k^*(X)$.

ТЕОРЕМА 3.4. *Если X — такой комплекс, что $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$, то спектральная последовательность, индуцированная фильтрацией по остовам, для теории когомологий $k^*(\;)$ сильно сходится к группе $\mathcal{K}^*(X)$.*

В приложениях бывает полезна следующая эквивалентная в силу теоремы 3.3 формулировка:

ТЕОРЕМА 3.4′. *Если в спектральной последовательности, индуцированной фильтрацией по остовам, для теории когомологий $k^*(\;)$ для каждого номера q существует такое $r = r(q)$, что $E_r^q = E_\infty^q$, то эта спектральная последовательность сильно сходится у группы $\mathcal{K}^*(X)$.*

Теорема 3.4′ является усилением результата Л. Ходжкина [см. ([3]), предложение 2.1], который доказал сильную сходимость спектральной последовательности в случае, когда существует такое r_0, не зависящее от q, что $E_{r_0}^q = E_\infty^q$ для всех q.

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что достаточно доказать эпиморфность отображения

$$\psi\colon F^q/F^{q+1} \to E_\infty.$$

Из теоремы 3.2 вытекает, что при выполнении условий теоремы 3.4 группа $\operatorname{Im}\psi$ является подгруппой конечного индекса в группе E_∞^q. Рассмотрим фильтрацию X^n в комплексе X, описанную в лемме 3.5. Элемент $\xi \in k^*(X^n)$ назовем отмеченным, если существует такая последовательность элементов $\xi_N \in k^*(X^N)$, $N \geqslant n$, что ограничение ξ_N на подкомплекс X^n равно ξ.

ЛЕММА 3.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Тогда если* $\xi \in k^*(X^n)$ — *отмеченный элемент, то существует такой отмеченный элемент* $\eta \in k^*(X^{n+1})$, *что ограничение* η *на подкомплекс* X^n *равно* ξ.

Покажем сначала, что из леммы 3.13 вытекает теорема 3.4. В самом деле, пусть $\alpha \in E^q_\infty$. Рассмотрим соответствующие спектральные последовательности для подкомплексов X^n. Гомоморфизм $E^q_\infty(X) \to E^q_\infty(X^n)$ является мономорфизмом при $q \leqslant n$. Обозначим через $\alpha_n \in E^q_\infty(X^n)$ образ элемента α при этом гомоморфизме. Поскольку для конечных фильтраций спектральная последовательность сильно сходится, то существуют такие элементы $\xi_n \in k^*(X^n)$, $n \geqslant q$, что $\psi[\xi_n] = \alpha_n$. Из диаграммы (1) легко усмотреть, что ограничение ξ_N на подкомплекс X^{q+1} равно ξ_{q+1}, т. е. элемент ξ_{q+1} — отмеченный элемент. По лемме 3.13 существует такая последовательность элементов $\eta_n \in k^*(X^n)$, что $\eta_{q+1} = \xi_{q+1}$, а ограничение η_n на подкомплекс X^{n-1} равно η_{n-1} для любого $n \geqslant q+1$. Тем самым существует такой элемент $\eta \in \mathscr{K}^*(X) = \varprojlim k^*(X^n)$, что $\eta|_{X^{q+1}} = \xi_{q+1}$. Следовательно, в силу функториальности гомоморфизма ψ, имеет место равенство $\psi(\eta) = \alpha$.

Доказательство леммы 3.13. Итак, даны такие элементы $\xi_N \in k^*(X^N)$, что $\xi_N|X^n = \xi_n$. Выберем такое r, чтобы отображение $E^n_\infty(X) \to E^n_\infty(X^r)$ было изоморфизмом. Положим $\eta_N = \xi_N|_{X^r} - \xi_r \in k^*(X^r)$. Ясно, что $\eta_N|_{X^n} = 0$. Значит, $\psi(\eta_N) \in E^q_\infty(X^r)$ для $q \geqslant n$. Если существует такая подпоследовательность η_{N_k}, что $\psi(\eta_{N_k}) \in E^q_\infty(X^r)$ для $q > n$, то элементы $\xi_{N_k}|_{X^{n+1}} \in k^*(X^{n+1})$ равны $\xi_r|_{X^{n+1}}$, т. е. элемент $\xi_r|_{X^{n+1}}$ — отмеченный элемент. Пусть теперь $\psi(\eta_N) \in E^n_\infty(X^r)$ почти для всех N. Не теряя общности, можно считать, что $\psi(\eta_N) \in E^n_\infty(X^r)$ для всех N. Так как $E^n_\infty(X^r)$ — конечно порожденная абелева группа, то $E^n_\infty(X^r) = A \oplus B$, где A — свободная группа, а B — конечная группа. Выберем в группе A базис $a_1, \ldots, a_s$. Тогда существуют числа $M_1, \ldots, M_s$ и такие элементы $\eta_1, \ldots, \eta_s \in k^*(X)$, что $\psi(\eta_i) = M_i a_i$ (см. доказательство теоремы 3.3). Следовательно, существуют элементы $\zeta_N \in k^*(X)$ такие, что

$$\psi(\eta_N + \zeta_N|_{X^0}) = \sum \lambda_i^N a_i + b_N, \qquad b_N \in B,$$

причем $|\lambda_i^N| \leqslant M_i$ для всех N. Значит, последовательность $\psi(\eta_N + \zeta_N|_{X^r})$, $r \leqslant N < \infty$, пробегает конечное множество.

Итак, существует такая подпоследовательность N_k, что

$$\psi(\eta_{N_k} + \zeta_{N_k}|_{X^r}) = c \in E^n_\infty(X^r).$$

Поэтому последовательность элементов $\xi_{N_k} + \zeta_{N_k}|_{X^{N_k}} \in k^*(X^{N_k})$ при ограничении на остов X^{n+1} дает один и тот же, а следовательно, отмеченный элемент $\eta \in k^*(X^{n+1})$. Поскольку $\zeta_{N_k}|_{X^n} = 0$, то $\eta|_{X^n} = \xi$. Лемма доказана.

Заметим, что на самом деле мы доказали больше. А именно, верна следующая

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть X — такой комплекс, что для некоторого конечного подкомплекса Y имеет место изоморфизм $k^*(X/Y) = \mathcal{K}^*(X/Y)$. Тогда спектральная последовательность, индуцированная фильтрацией остовами в комплексе X, для теории когомологий $k^*(\ )$ сильно сходится к группе $\mathcal{K}^*(X)$.*

§ 4. Формула Кюннета

В работе ([12]) показано, что для любых двух конечных комплексов X и Y имеет место точная последовательность

$$0 \to k^*(X) \otimes k^*(Y) \to k^*(X \# Y) \to \mathrm{Tor}(k^*(X), k^*(Y)) \to 0, \tag{1}$$

естественная относительно непрерывных отображений комплексов. Мы обобщим этот результат на случай бесконечных комплексов для функтора $\mathcal{K}^*$.

ЛЕММА 4.1. *Точная последовательность* (1) *расщепляется.*

Следствие 4.1. *Формула универсальных коэффициентов*

$$0 \to k^*(X) \otimes \mathbf{Z}_p \to k^*(X, \mathbf{Z}_p) \to \mathrm{Tor}\,(k^*(X), \mathbf{Z}_p) \to 0$$

расщепляется для всех простых $p \geqslant 2$.

Результат следствия 4.2 впервые был получен в работе ([21]).

Следствие 4.3. *Для любого комплекса X группа $k^*(X, \mathbf{Z}_p)$ является $\mathbf{Z}_p$-модулем.*

Доказательство леммы 4.1. Пусть G — конечно порожденная абелева группа. Обозначим через $n_i^p\,(G)$, $n_\infty(G)$ число образующих порядка p^i, ∞, соответственно, в каноническом разложении группы G в прямую сумму циклических p-примарных групп. Как известно, эти числа являются инвариантами самой группы. Можно доказать, что если в точной последовательности $0 \to G_1 \to G — G_2 \to 0$ имеют место равенства

$$n_i^p\,(G) = n_i^p\,(G_1) + n^p\,(G_2)$$

для всех i и простых p, то эта последовательность расщепляется. Фиксируем некоторое простое число p. Обозначим

$$n_i = n_i^p\,(k^*(X)), \quad n_\infty = n_\infty(k^*(X)),$$
$$m_i = n_i^p\,(k^*(Y)), \quad m_\infty = n_\infty(k^*(Y)),$$

$$d_i = n_i^p\,(k^*(X \# Y)), \quad d_\infty = n_\infty(k^*(X \# Y)) = n_\infty m_\infty.$$

Рассмотрим пространство $X \# Y \# S_{p^r}$. Вычислим порядок конечной группы $G = k^*\,(X \# Y \# S_{p^r})$ из последовательности (1), используя равенство $(X \# Y) \# S_{p^r} = X \# (Y \# S_{p^r})$:

$$0 \to k^*(X \# Y) \otimes \mathbf{Z}_{p^r} \to G \to \mathrm{Tor}(k^*(X \# Y), \mathbf{Z}_{p^r}) \to 0, \tag{2}$$

$$0 \to k^*(X) \otimes k^*(Y \# S_{p^r}) \to G \to \mathrm{Tor}(k^*(X), k^*(Y \# S_{p^r})) \to 0. \tag{3}$$

Докажем сначала, что из расщепляемости последовательности

$$0 \to k^*(Y) \otimes \mathbf{Z}_{p^r} \to k^*(Y \# S_{p^r}) \to \mathrm{Tor}(k^*(Y), \mathbf{Z}_{p^r}) \to 0 \tag{4}$$

для всех p и r вытекает расщепление последовательности (1). В самом деле, из последовательности (4) в этом случае получаем:

$$n_i^p\,(k^*(Y \mathbin{\#} S_{p^r})) = \begin{cases} 2m_i, & \text{если } i < r,\\ 2\,(\Sigma_{k\geqslant r} m_k) + m_\infty, & \text{если } i = r,\\ 0, & \text{если } i > r.\end{cases}$$

Тогда из последовательности (3) имеем:

$$\log_p \operatorname{пор} G =$$

$$= \sum_{i<r} i\left(4n_i m_i + 4n_i \sum_{k>i} m_k + 4m_i \sum_{k>i} n_k + 2n_i m_\infty + 2n_\infty m_i\right) +$$

$$+ r\left(2\sum_{k\geqslant r} n_k + n_\infty\right)\left(2\sum_{k\geqslant r} m_k + m_\infty\right). \tag{5}$$

Положим

$$\alpha_i = 2n_i m_i + 2n_i \sum_{k>i} m_k + 2m_i \sum_{k>i} n_k + n_i m_\infty + n_\infty m_i.$$

Тогда равенство (5) примет вид:

$$\log_p \operatorname{пор} G = 2\sum_{i<r} i\alpha_i + 2r \sum_{k\geqslant r} \alpha_k + r n_\infty m_\infty. \tag{6}$$

С другой стороны, из последовательности (2) имеем:

$$\log_p \operatorname{пор} G = 2\sum_{i<r} i d_i + 2r \sum_{k\geqslant r} d_k + r d_\infty. \tag{7}$$

Обозначив $z_i = \alpha_i - d_i$, из (6) и (7) получаем систему уравнений

$$\sum_{i<r} i z_i + r \sum_{k\geqslant r} z_k = 0, \qquad r \geqslant 1. \tag{8}$$

Поскольку $z_i = 0$, начиная с некоторого номера i, единственным решением системы (8) является тривиальное решение $z_i = 0$, т. е. $\alpha_i = d_i$. Заметим, что

$$\alpha_i = n_i^p\,(k^*(X) \otimes k^*(Y)) + n_i^p\,(\operatorname{Tor}(k^*(X),\ k^*(Y))).$$

Следовательно, последовательность (1) расщепляется.

Чтобы закончить доказательство леммы, заметим, что последовательность (4) для $Y = S_{p^r}$ расщепляется, так как $k^0(S_{p^k}) = \mathbf{Z}_{p^k}$, а $k'(S_{p^k}) = 0$. Значит, лемма уже доказана в случае произвольного X и $Y = S_{p^k}$, т. е. доказана расщепляемость последовательности (4) для любого Y и всех p и r.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть X и Y — два комплекса, $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ — некоторые фильтрации конечными подкомплексами, $X = \bigcup X^n$, $Y = \bigcup Y^n$. Тогда имеет место точная последовательность*:

$$0 \to \varprojlim\,(k^*(X^n) \otimes k^*(Y^n)) \to \mathcal{K}^*(X \mathbin{\#} Y) \to \varprojlim \operatorname{Tor}(k^*(X^n),\ k^*(Y^n)) \to 0. \tag{9}$$

Доказательство основано на следующей лемме.

ЛЕММА 4.2. *Пусть задана обратная последовательность точных последовательностей*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0, \tag{10n}$$

причем группы C_n конечные, а B_n — тривиальные расширения групп A_n.

Тогда предельная последовательность

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

точна.

Доказательство. Так как функтор $\varprojlim$ полуточен слева, то достаточно доказать точность в члене $\varprojlim C_n$. Пусть $c \in \varprojlim C_n$. Элемент конечного порядка $b_n \in B_n$ назовем отмеченным, если $\psi_n(b_n) = c_n = \pi_n(c)$ и для любого $k > n$ существует такой элемент конечного порядка $d_k \in B_k$, что $\pi_n^k(d_k) = b_n$, $\psi_k(d_k) = c_k$. Если $b_n \in B_n$ — отмеченный элемент, то существует такой отмеченный элемент b_{n+1}, что $\pi_n^{n+1}(b_{n+1}) = b_n$. В самом деле, множество элементов $\{\pi_{n+1}^k(d_k)\}$ конечно, следовательно, для бесконечного числа номеров k элемент $\pi_{n+1}^k(d_k)$ один и тот же и, значит, является отмеченным элементом. Обозначим его через b_{n+1}. Очевидно, $\pi_n^{n+1}(b_{n+1}) = b_n$.

Используя расщепление последовательностей $(10n)$, легко увидеть, что существуют такие элементы конечного порядка $d_k \in B_k$, что $\psi_k(d_k) = c_k$.

Вышеприведенное рассуждение показывает, что существует хотя бы один отмеченный элемент $b_1 \in B_1$. Значит, существует последовательность $b_n \in B_n$ такая, что

$$\pi_n^{n+1}(b_{n+1}) = b_n, \quad \psi_n(b_n) = c_n.$$

Таким образом, $\{b_n\}$ является обратной последовательностью, т. е. определяет элемент $b \in B$, причем, $\psi(b) = c$. Лемма доказана.

В случае, когда $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$, $k^*(Y) = \mathcal{K}^*(Y)$, группы $\varprojlim (k^*(X^n) \otimes k^*(Y^n))$ и $\varprojlim \operatorname{Tor}(k^*(X^n), k^*(Y^n))$ из последовательности (9) можно вычислять следующим образом. Из результатов § 3 вытекает, что в случае $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$ обратная последовательность групп $\{k^*(X^n)\}$ удовлетворяет «условию Миттаг — Лефлера», а именно, для любого номера n существует такой номер $m > n$, что

$$\operatorname{Im}(k^*(X^r) \to k^*(X^n)) \approx \operatorname{Im}(k^*(X^m) \to k^*(X^n))$$

для любого $r \geqslant m$. Поскольку последовательность $\{k^*(X^n) \otimes k^*(Y)\}$ также удовлетворяет условию Миттаг — Лефлера, то

$$\varprojlim (k^*(X^n) \otimes k^*(Y^n)) \approx \mathcal{K}^*(X) \hat{\otimes} K^*(Y),$$

где $\hat{\otimes}$ обозначает пополненное тензорное произведение. Для полных топологических групп с топологией, порожденнсй последовательностью подгрупп, можно определить также функтор $\operatorname{Tor}^\wedge$ следующим образом: если A и B — две топологические группы, A_n, B_n — системы окрестностей в A и B, соответственно, то положим

$$\operatorname{Tor}^\wedge(A, B) = \varprojlim \operatorname{Tor}(A/A_n, B/B_n).$$

Тогда имеем равенство:

$$\varprojlim \operatorname{Tor}(k^*(X^n), k^*(Y^n)) = \operatorname{Tor}^\wedge(\mathcal{K}^*(X), \mathcal{K}^*(Y)).$$

Таким образом, если $k^*(X) \approx \mathcal{K}^*(X)$, $k^*(Y) \approx \mathcal{K}^*(Y)$, то последовательность (9) принимает следующий вид:

$$0 \to \mathcal{K}^*(X) \hat{\otimes} \mathcal{K}^*(Y) \to \mathcal{K}^*(X \# Y) \to \operatorname{Tor}^\wedge(\mathcal{K}^*(X), \mathcal{K}^*(Y)) \to 0. \quad (11)$$

В общем случае последовательность (11) не точна, как показывает пример в работе ([20]).

ЛЕММА 4.3. *Если* X — *конечный комплекс, а* $k^*(Y)=\mathcal{K}^*(Y)$, *то естественные гомоморфизмы*

$$k^*(X)\otimes k^*(Y)\to k^*(X)\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y),$$
$$\operatorname{Tor}(k^*(X),k^*(Y))\to \operatorname{Tor}^{\wedge}(k^*(X),k^*(Y))$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Рассмотрим свободную резольвенту конечно порожденной абелевой группы $k^*(X)$:

$$0\to G_1\to G_2\to k^*(X)\to 0.$$

Умножая тензорно на группу $k^*(Y^n)$, получаем точную последовательность

$$0\to\operatorname{Tor}(k^*(X),\ k^*(Y^n))\to G_1\otimes k^*(Y^n)\to G_2\otimes k^*(Y^n)\to$$
$$\to k^*(X)\otimes k^*(Y^n)\to 0.$$

При условии леммы последовательности групп $\operatorname{Tor}(k^*(X),k^*(Y^n))$ и $G_1\otimes k^*(Y^n)$ удовлетворяют «условию Миттаг — Лефлера». Следовательно [см. ([26]), 13. 2.2], точна следующая последовательность:

$$0\to\operatorname{Tor}^{\wedge}(k^*(X),\ k^*(Y))\to G_1\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y)\to G_2\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y)\to k^*(X)\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y)\to 0.$$

Поскольку для свободных групп G_i, $i=1,2$, имеет место естественный изоморфизм $G_i\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y)\leftarrow G_i\otimes k^*(Y)$, то, используя естественную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to\operatorname{Tor}^{\wedge}(k^*(X),k^*(Y)) & \to & G_1\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y) & \to & G_2\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y) & \to & k^*(X)\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y) & \to & 0\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0\to\operatorname{Tor}^{\wedge}(k^*(X),k^*(Y) & \to & G_1\otimes k^*(Y) & \to & G_2\otimes k^*(Y) & \to & k^*(X)\otimes k^*(Y) & \to & 0,
\end{array}$$

получаем утверждение леммы.

Следствие 4.4. *Если* $k^*(X,\mathbf{Z}_p)=0$, *то для любого комплекса* Y *имеет место равенство* $k^*(X\#Y,\mathbf{Z}_p)=0$.

Доказательство. Пусть Y^n — остовы комплекса Y. Тогда (см. § 2)

$$k^*(X\#Y,\mathbf{Z}_p)=\varprojlim k^*(X\#Y^n,\mathbf{Z}_p).$$

Из последовательности (11) получаем:

$$0\to k^*(X,\mathbf{Z}_p)\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y^n)\to k^*(X\#Y^n,\mathbf{Z}_p)\to\operatorname{Tor}^{\wedge}(k^*(X,\mathbf{Z}_p),k^*(Y^n))\to 0.$$

Поскольку $k^*(X,\ \mathbf{Z}_p)=0$, то $k^*(X\#Y^n,\ \mathbf{Z}_p)=0$. Значит, $k^*(X\#\#Y,\mathbf{Z}_p)=0$.

В работах ([21]), ([27]) доказано, что в группе $k^*(X,\ \mathbf{Z}_p)$, $p\geqslant 2$, можно ввести естественное умножение и что это умножение коммутативно для $p>2$ и ассоциативно для всех p.

ЛЕММА 4.5. *Естественный гомоморфизм*

$$k^*(X,\mathbf{Z}_p)\mathbin{\hat{\otimes}} k^*(Y,\mathbf{Z}_p)\xrightarrow{\mu_p} k^*(X\#Y,\mathbf{Z}_p),$$

индуцированный умножением, является изоморфизмом для всех $p\geqslant 2$.

Доказательство. Пусть X и Y — сначала конечные комплексы. Поскольку гомоморфизм μ_p согласован с фильтрацией по остовам, то он индуцирует спаривание спектральных последовательностей, связанных с этой фильтрацией [см. ([23])]:

$$E_r(X) \otimes E_r(Y) \xrightarrow{\mu_p{}^r} E_r(X \# Y).$$

Так как $E_2^{p,q}(X) \approx H^p(X, k^q(*, \mathbf{Z}_p))$, то $\mu_p{}^2$ является изоморфизмом. Дифференциалы d_r удовлетворяют формуле Лейбница. Значит, гомоморфизм μ_p^r является изоморфизмом. Таким образом, $E_\infty(X) \otimes E_\infty(Y)$ изоморфно $E_\infty(X \# Y)$. Значит, и $k^*(X, \mathbf{Z}_p) \otimes k^*(Y, \mathbf{Z}_p)$ изоморфно $k^*(X \quad Y, \mathbf{Z}_p)$. Чтобы получить утверждение для бесконечных комплексов, надо перейти к пределу по остовам.

§ 5. Один результат из гомологической алгебры

Этот параграф посвящен вычислению когомологий некоторых алгебр C_p, определение которых дано ниже.

Пусть C_p^* обозначает кольцо формальных рядов от одной переменной t над полем $\mathbf{Z}_p$. Кольцо C_p^* является полным кольцом в топологии, порожденной идеалом всех рядов без свободного члена [см. ([14]), стр. 161]. Рассмотрим непрерывный кольцевой гомоморфизм $\Delta\colon C_p^* \to C_p^* \hat{\otimes} C_p^*$ такой, что $\Delta(t) = t \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t$. Легко проверить, что C_p^* становится ассоциативной коммутативной коалгеброй [см. [15], стр. 24].

Пусть C_p — группа всех непрерывных гомоморфизмов группы C_p^* в группу $\mathbf{Z}_p$ с дискретной топологией. Диагональное отображение Δ индуцирует в группе C_p кольцевую структуру. Легко проверить, что $\operatorname{Hom}(C_p, \mathbf{Z}_p) \approx C^*$.

Нас будут интересовать когомологии алгебры C_p, т. е. группы $\operatorname{Ext}_{C_p}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$, где $\mathbf{Z}_p$ рассматривается как модуль над алгеброй C_p, действие алгебры в котором индуцировано отображением группы $\mathbf{Z}_p$ на ряды нулевой размерности в C_p^* . Существует стандартная ациклическая свободная над C_p резольвента L_p модуля $\mathbf{Z}_p$ [см. ([10]), стр. 220 и 229], причем

$$L_p{}^* = \operatorname{Hom}_{C_p}(L_p, \mathbf{Z}_p) \approx \sum_{n=0} \underbrace{I(C_p^*) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} I(C_p^*)}_{n \text{ раз}},$$

а дифференциал d переводит элемент $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ в элемент $\Sigma(-1)^{i-1} x_1 \otimes \ldots \otimes \Delta x_i \otimes \ldots \otimes x_n$. $I(C_{*p})$ обозначает подкольцо формальных рядов без свободного члена, изоморфное группе $C_p^* / \mathbf{Z}_p$.

Рассмотрим гомоморфизмы φ и ψ коалгебры C в себя, определяемые формулами:

$$\varphi(x) = x^p, \quad \psi(t^{kp}) = t^k, \quad \psi(t^{kp+q}) = 0, \quad 0 < q < p.$$

Легко проверить, что это действительно гомоморфизм коалгебр. Гомоморфизмы φ и ψ индуцируют гомоморфизмы кольца C_p в себя: $\varphi^*\colon C_p \to C_p$, $\psi^*\colon C_p \to C_p$. Выберем в алгебре C_p аддитивный базис b_i, определяемый равенствами:

$$b_i(t^k) = \delta_i{}^k.$$

Формулы умножения имеют вид:

$$b_i b_j = \sum_{\max(i,\,j)\leqslant k\leqslant i+j} \frac{k!}{(k-i)!\,(i+j-k)!\,(k-j)!}\, b_k. \qquad (*)$$

Пусть A_p — подгруппа в C_p, порожденная элементами $b_0, \ldots, b_{p-1}$. Формулы $(*)$ показывают, что группа A_p является подалгеброй. Пусть B_p — подгруппа в C_p, порожденная элементами $\{b_{kp}\}_k$. Легко видеть, что группа B_p является образом гомоморфизма ψ^*. Значит, группа B_p тоже является подалгеброй. Рассмотрим отображение алгебр $f\colon A_p \otimes B_p \to C_p$, определяемое формулами:

$$f(b_i \otimes b_{kp}) = b_i b_{kp}, \qquad 0 \leqslant i < p, \qquad 0 \leqslant k < \infty.$$

При фиксированном индексе k элементы $b_i b_{kp}$ выражаются по формулам $(*)$ через базисные элементы $b_{kp}, \ldots, b_{(k+1)p-1}$ с помощью треугольной матрицы с ненулевыми элементами по диагонали. Значит, гомоморфизм f является изоморфизмом. Итак, верна следующая

ЛЕММА 5.1. *Имеются такие подалгебры A_p^n, B_p^n алгебры C_p, что $A_p^n \subset B_p^{n-1}$, $B_p^n \approx A_p^{n+1} \otimes B_p^{n+1}$. Все алгебры B_p^n изоморфны алгебре C_p, а алгебры A изоморфны алгебре A_p. Пусть $M_p^n(N_p^n)$ — ациклическая стандартная резольвента модуля $\mathbf{Z}_p$ над алгеброй $A_p^n(B_p^n)$,*

$$M_{p*}^n = M_p^n \otimes_{A_p^n} \mathbf{Z}_p, \qquad N_{p*}^n = N_p^n \otimes_{B_p^n} \mathbf{Z}_p, \qquad L_{p*} = L_p \otimes_{C_p} \mathbf{Z}_p.$$

Тогда $L_{p*} = M_{p*}^1 \otimes \ldots \otimes M_{p*}^n \otimes N_{p*}^n$. Для любого элемента $x \in L_{p*}$ существует такой номер n, что

$$x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes 1, \qquad x_i = M_{p*}^i, \qquad 1 \in N_{p*}^n.$$

Доказательство. Поскольку композиция $\varphi^*\psi^*\colon C_p \to C_p$ является изоморфизмом, то $\psi^*\colon C_p \to C_p$ — тоже изоморфизм. Положим $A_p^1 = A_p$, $B_p^1 = B_p$. Поскольку B_p изоморфна C_p, то $B_p^1 \approx A_p^2 \otimes B_p^2$ и т. д. Остальные утверждения очевидны.

ЛЕММА 5.2. *Алгебра A_p изоморфна фактор-алгебре $\mathbf{Z}_p[t]\,/\,(t^p - t)$.*

Доказательство. Пусть D_p — фактор-алгебра $\mathbf{Z}_p[t]\,/\,(t^p - t)$. Введем в D_p диагональный гомоморфизм по формуле $t \to 1 \otimes t + t \otimes 1$. Докажем, что $D_p^* = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(D_p, \mathbf{Z}_p)$ изоморфна алгебре $\mathbf{Z}_p[t]/(t^p)$ с диагональным гомоморфизмом $t \to 1 \otimes t + t \otimes t + t \otimes 1$, т. е. изоморфна алгебре $A_p^* = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(A_p, \mathbf{Z}_p)$. Определим в D_p^* аддитивный базис ζ_k, двойственный к $\{t^k\}$, т. е.

$$(\xi_k, t^j) = \delta_k^j.$$

Легко видеть, что $\xi_k \xi_l = C_{k+l} \xi_{k+l}$, т. е.

$$\xi_1^k = k!\, \xi_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p-1.$$

Значит, элементы $\{\xi_1^k\}$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, образуют аддитивный базис алгебры D_p, а $\xi_{p*}^1 = 0$ — единственное соотношение. Диагональ в алгебре D_p^* вычисляем по формуле

$$\Delta(\xi_k) = \sum_{i+j\equiv k (\mathrm{mod}\, p)} \xi_i \otimes \xi_j.$$

Таким образом, если $\xi = \sum_{k=1}^{p-1} \xi_k$, то $\Delta\xi = \xi \otimes 1 + \xi \otimes \xi + 1 \otimes \xi$. Легко видеть, что элемент ξ является полиномиальной образующей в алгебре D_p^* с единственным соотношением $\xi^p = 0$.

ЛЕММА 5.3. $H_0(A_p) = \mathbf{Z}_p$, $H_i(A_p) = 0$, $i > 0$.

Доказательство. Построим минимальную резольвенту для модуля $\mathbf{Z}_p$:

$$\mathbf{Z}_p \xleftarrow{\varepsilon} L^0 \xleftarrow{d_1} L^1 \xleftarrow{d_2} L^2 \leftarrow \ldots,$$

где L^i — свободные модули с одной образующей u_i,

$$d_{2i+1}(u_{2i+1}) = tu_{2i}, \quad d_{2i}(u_{2i}) = (t^{p-1} - 1)u_{2i-1}.$$

Легко видеть, что указанный комплекс ацикличен. Вычислить гомологии теперь не представляет труда.

Из лемм 5.1 и 5.3 и теоремы 8.1 из книги ([10]) (стр. 96) вытекает

ТЕОРЕМА 5.1.

$$H_0(L_p^*) = \mathbf{Z}_p, \quad H_i(L_p^*) = 0, \quad i > 0.$$

§ 6. Вычисление групп $k(K(\mathbf{Z}, n))$

В работе ([9]) было показано, что если π — конечно порожденная абелева группа, то существует топологическая абелева группа (клеточный комплекс) гомотопического типа $K(\pi, n)$. Мы ее так и будем обозначать. В работе ([5]) вводится в пространстве X каноническая фильтрация $X^n \subset X^{n-1} \subset \ldots \subset X$, $n \geqslant 0$, причем

$$X^{n+1}/X^n = S^{n+1} \underbrace{(G \# G \# \ldots \# G)}_{n+1 \text{ раз}},$$

где G — группа гомотопического типа ΩX. Следовательно, в спектральной последовательности относительно этой фильтрации, сходящейся к группе $k^*(X, \mathbf{Z}_p)$, имеет место равенство

$$E_1^{n+1, q} = k^{n+1+q}(X^{n+1}/X^n, \mathbf{Z}_p).$$

Дифференциал d_1: $E_1^{n, q} \to E_1^{n+1, q-1}$ индуцирован отображением f: $G \times G \to G$, задающим операцию умножения в группе G. Более точным образом, по формуле Кюннета имеем:

$$k^*(X^{n+1}, X^n, \mathbf{Z}_p) \approx \hat{\bigotimes}_{i=1}^{n+1} \overline{k^*(G, \mathbf{Z}_p)},$$

где $\overline{k^*(G, \mathbf{Z}_p)}$ — ядро аугментации, порожденной вложением точки в G.

Тогда

$$d_1(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_1 \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes f^* x_i \otimes \ldots \otimes x_n.$$

Применим все эти результаты к случаю, когда группа $G = K(\mathbf{Z}, 2) = CP^\infty$, $X = K(\mathbf{Z}, 3)$. Как известно, $k^*(CP^\infty, \mathbf{Z}_p) \approx \mathbf{Z}_p[[t]]$, а диагональный гомоморфизм

$$\mathbf{Z}_p[[t]] \to \mathbf{Z}_p[[t]] \hat{\otimes} \mathbf{Z}_p[[t]]$$

порожден соответствием $t \to 1 \otimes t + t \otimes t + t \otimes 1$ [см., например, (3)].

Таким образом, в этом случае член $E_1^{n,*}$ является резольвентой коалгебры $C_p{}^*$, рассмотренной в § 5. Поэтому в силу теоремы 5.1 член $E_2^{n,*}$ рассматриваемой спектральной последовательности равен нулю при $n \geqslant 1$ и потому $E_\infty^{n,*} = E_2^{n,*} = 0$ при $n \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Для пространств* $K(\mathbf{Z}, 3)$ *имеют место равенства*:

a) $k^*(K(\mathbf{Z}, 3), \mathbf{Z}_p) = 0$, *для всех* $p \geqslant 2$,

b) $\mathcal{K}^*(K(\mathbf{Z}, 3)) = 0$,

c) $k^1(K(\mathbf{Z}, 3)) = 0$,

d) $k^0(K(\mathbf{Z}, 3)) = \hat{\mathbf{Z}} / \mathbf{Z}$, *где* $\hat{\mathbf{Z}}$ — *пополнение группы* $\mathbf{Z}$ *по всем подгруппам.*

Доказательство. Утверждение a) вытекает из равенства $E_\infty^{n,*} = E_2^{n,*} = 0$, $n \geqslant 1$, в силу теоремы 3.1. Утверждение b) вытекает из следствия 2.4. Утверждение c) вытекает из b) и теоремы 3.2. Для доказательства утверждения d) рассмотрим точную последовательность пары $(K(\mathbf{Z}, 3), S^3)$:

$$0 \leftarrow k^0(K(\mathbf{Z}, 3)) \xleftarrow{\psi} k^0(K(\mathbf{Z}, 3) / S^3) \xleftarrow{\varphi} k^0(S^4) \leftarrow 0.$$

Из теоремы 3.2 вытекает, что топология в группе $k^0(K(\mathbf{Z}, 3) / S^3)$ отделима. Поскольку $\mathcal{K}^0(K(\mathbf{Z}, 3)) = 0$, то $k^0(K(\mathbf{Z}, 3)) = \overline{\{0\}}$, значит, группа $\operatorname{Im} \varphi = \mathbf{Z}$ всюду плотна в группе $k^0(K(\mathbf{Z}, 3) / S^3)$, т. е. $k^0(K(\mathbf{Z}, 3) / S^3) = \widehat{\operatorname{Im} \varphi}$. Докажем, что топология в группе $\operatorname{Im} \varphi$ порождена всеми подгруппами. Рассмотрим точную последовательность для любого простого $p \geqslant 2$:

$$0 \leftarrow k^0(K(\mathbf{Z}, 3) \# L_p^\infty) \leftarrow k^0(K(\mathbf{Z}, 3)/S^3 \# L_p^\infty) \leftarrow k^0(S^4 L_p^\infty) \leftarrow 0,$$

где L_p^∞ — стандартная бесконечномерная p-линза. Из теоремы 3,2, следствия 2.4 и следствия 4.3 вытекает, что $k^0(K(\mathbf{Z}, 3) \# L_p^\infty) = 0$.

Пусть $\eta \in k^0(L_p^\infty)$ — канонический элемент. Тогда тензорное умножение на элемент η дает коммутативную диаграмму непрерывных отображений

$$\begin{array}{ccccc} k^0(K(\mathbf{Z}, 3)/S^3 \# L_p^\infty) & & \xleftarrow{\bar{\varphi}} & & k^0(S^4 L_p^\infty) \\ \uparrow \otimes\eta & & \nwarrow & & \uparrow \otimes\eta \\ k^0(K(\mathbf{Z}, 3)/S^3) & \leftarrow & \operatorname{Im} \varphi & \leftarrow & k^0(S^4). \end{array}$$

Гомоморфизм $\overline{\varphi}$ является топологическим изоморфизмом, поскольку группы $k^0(K(\mathbf{Z}, 3)) / S^3 \# L_p{}^\infty)$ и $k^0(S^4L_p{}^\infty)$ проконечны. Так как $k^0(S^4L^\infty) \approx \approx \bigoplus_{i=1}^{p-1} Q_p$, где Q_p — кольцо целых p-адитических чисел [см. (1)], то в группе $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{Z}$ подгруппы $p^s\mathbf{Z}$ являются окрестностями нуля.

ТЕОРЕМА 6.2. *При $n \geqslant 3$ имеют место равенства:*

a) $k^*(K(\mathbf{Z}, n), \mathbf{Z}_p) = 0$ *для всех $p \geqslant 2$;*

b) $\mathcal{K}^*(K(\mathbf{Z}, n)) = 0$;

c) $k^n(K(\mathbf{Z}, n)) = 0$;

d) $$k^{n+1}(K(\mathbf{Z}, n)) = \begin{cases} \hat{\mathbf{Z}}/\mathbf{Z}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \hat{\mathbf{Z}}[[t]]/\mathbf{Z}[[t]], & \text{если } n \text{ четно}, \end{cases}$$

где $\hat{\mathbf{Z}}$, как и выше,— пополнение группы $\mathbf{Z}$ по всем подгруппам.

Доказательство. Ясно, что утверждения b) и c) вытекают из утверждения a). Доказательство утверждения a) мы проведем по индукции по числу n. При $n = 3$ оно уже доказано. Пусть оно верно для $(n-1)$. Рассмотрим в пространстве $K(\mathbf{Z}, n)$ фильтрацию Милнора и соответствующую спектральную последовательность. По определению

$$E_1^{q,*} = k^*(\underbrace{K(\mathbf{Z}, n-1) \# \ldots \# K(\mathbf{Z}, n-1)}_{q \text{ множителей}}, \mathbf{Z}_p)$$

и потому согласно следствию 4.4 в силу предположения индукции $E_1^{q,*} = 0$ при $q \geqslant 1$. Следовательно, $E_\infty^{q,*} = 0$ при $q \geqslant 1$ и, значит, в силу теоремы 3.1, $k^*(K(\mathbf{Z}, n), \mathbf{Z}_p) = 0$.

Докажем утверждение d). Пусть n нечетно. В силу теоремы 6.1 достаточно доказать, что каноническое отображение

$$f\colon\ S^{2k-2}K(\mathbf{Z}, 3) \to K(\mathbf{Z}, 2k+1)$$

индуцирует изоморфизм

$$f^*\colon\ k^*(K(\mathbf{Z}, 2k+1) \to k^*(S^{2k-2}K(\mathbf{Z}, 3)).$$

Для простоты будем считать отображение f вложением. Из точной последовательности пары $(K(\mathbf{Z}, 2k+1),\ S^{2k-2}K(\mathbf{Z}, 3))$ и уже доказанного утверждения a) теоремы 6.2 непосредственно вытекает, что

$$k^*(Y, \mathbf{Z}_p) = 0, \quad Y = K(\mathbf{Z}, 2k+1) / S^{2k-2}K(\mathbf{Z}, 3).$$

Поскольку $H^*(Y, Q) = 0$, отсюда в силу теоремы 3.2 и следствия 2.4 вытекает, что $k^*(Y) = 0$ и потому отображение f^* изоморфно.

Пусть теперь $n = 2k$. Рассмотрим отображение

$$f\colon\ \Omega S^{2k+1} \to K(\mathbf{Z}, 2k),$$

соответствующее образующей группы $H^{2k}(\Omega S^{2k+1}, \mathbf{Z})$. Снова считая это отображение вложением, рассмотрим точную последовательность пары $(K(\mathbf{Z}, 2k),\ \Omega S^{2k+1})$. В силу уже доказанного утверждения c) эта последовательность имеет вид

$$0 \leftarrow k^1(K(\mathbf{Z}, 2k)) \leftarrow k^1(Y) \xleftarrow{\varphi} k^0(\Omega S^{2k+1}) \leftarrow 0,$$

где $Y = K(\mathbf{Z},\ 2k) / \Omega S^{2k+1}$. Известно (и легко видеть), что группа $k^0(\Omega S^{2k+1})$ аддитивно изоморфна группе формальных рядов $\mathbf{Z}[[t]]$. С другой стороны, так как $\mathcal{K}^1(K(\mathbf{Z},\ 2k)) = 0$, то $k^1(K(\mathbf{Z},\ 2k)) = \overline{\{0\}}$ и потому группа $\operatorname{Im}\varphi$ всюду плотна в группе $k^1(Y)$ (ибо последняя группа отделима, т. е. совпадает с группой $\mathcal{K}^1(Y)$). Таким образом, группа $k'(Y)$ является пополнением группы $\mathbf{Z}[[t]]$ по некоторой топологии, более слабой, чем стандартная топология группы формальных рядов. Повторяя почти дословно рассуждения, проведенные в соответствующем месте при доказательстве теоремы 6.1, можно без труда убедиться, что $k^1(Y) = \hat{\mathbf{Z}}[[t]]$. Следовательно,

$$k^1(K(\mathbf{Z}, 2k)) = \hat{\mathbf{Z}}[[t]] / \mathbf{Z}[[t]].$$

§ 7. k-функтор «убивающих» пространств клеточных комплексов

Непосредственным следствием результатов предыдущих параграфов является следующая

ТЕОРЕМА 7,1. *Пусть $E \to K(\pi,\ n)$, $n \geqslant 4$,— расслоение со слоем F, пространства E, F и E — клеточные комплексы и π — конечно порожденная абелева группа. Тогда вложение слоя i: $F \to E$ индуцирует изоморфизмы i^*: $k^*(E, \mathbf{Z}_p) \to k^*(F, \mathbf{Z}_p)$ для всех простых $p \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть сначала $\pi = \mathbf{Z}$. Рассмотрим в базе фильтрацию Милнора $\{X^n\}$. Как отмечалось в § 6, пространство X^0 есть одна точка, а пространство $X^n = X^{n-1} \cup CS^{n-1}(K(\pi, n-1) \# \dots \# K(\pi, n-1))$. В пространстве E возьмем индуцированную фильтрацию $\{f^{-1}(X^n)\}$. Поскольку фильтрация Милнора является надстроечной, то, как указано в § 3,

$$E_1^{l,q} = k^{l+q}(f^{-1}(X^l), f^{-1}(X^{l-1}), \mathbf{Z}_p) = k^{l+q}(S^l(K(\pi, n-1)\#\dots\#K(\pi, n-1)) \times \\ \times F,\ F,\ \mathbf{Z}_p).$$

Так как $k^*(K(\pi,\ n-1),\ \mathbf{Z}_p) = 0$, $n \geqslant 4$, то, используя формулу Кюннета, получаем:

$$E_1^{l,q} = 0, \quad l > 0, \quad E_1^{0,q} = k^q(F, \mathbf{Z}_p).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{i_1} & K(\pi,n) \end{array}$$

получаем утверждение теоремы.

Пусть $\pi \neq \mathbf{Z}$. Тогда, как известно, существует расслоение с базой $\prod_{i=1}^{\alpha-r} K_i(\mathbf{Z}, n+1)$ и слоем $\prod_{j=1}^{\alpha} K_j(\mathbf{Z}, n)$, где α — число образующих группы π, а r — ее ранг. Применяя теорему 7.1 в уже доказанном случае, получаем, что $k^*(K(\pi,\ n),\ \mathbf{Z}_p) = 0$, $n \geqslant 3$, для всех простых p. Этим доказательство теоремы завершено.

Из определения «убивающих» пространств $(X)_n$ [см. ([8])] и теоремы 7.1 получаем

Следствие 7.1. *Для любого комплекса естественное отображение* f_{n+1}: $(X)_{n+1} \to (X)_n$ *при* $n \geqslant 4$ *индуцирует изоморфизм*

$$f_{n+1}^* : k^*((X)_n, \mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\approx} k^*((X)_{n+1} \mathbf{Z}_p) \quad \text{для всех простых } p.$$

Из следствия 7.1 вытекает

Следствие 7.2. *Если четырехсвязный комплекс имеет конечную систему Постникова* [*см.* ([16])], *то* $k^*(X, \mathbf{Z}_p) = 0$ *для всех целых простых* p *и* $\mathcal{K}^*(X) = 0$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть* X — *одно из пространств* $BU(2n, \ldots, \infty)$, $n \geqslant 2$, *соответственно,* $BO(n, \ldots, \infty)$, $n \geqslant 3$, *а* Y — *пространство* BSU, *соответственно,* $B\mathrm{Spin}$, *и пусть* g — *естественная проекция пространства* X *на* Y. *Тогда верны следующие утверждения:*

a) *гомоморфизм* g^*: $k^*(Y, \mathbf{Z}_p) \to k^*(X, \mathbf{Z}_p)$ *является изоморфизмом*;

b) $k^*(X) = \mathcal{K}^*(X)$;

c) $k'(X) = 0$;

d) *гомоморфизм* g^*: $\mathcal{K}^*(Y) \to \mathcal{K}^*(X)$ *является мономорфизмом*;

e) *группа* $g^*(\mathcal{K}^*(Y))$ *плотна в группе* $\mathcal{K}^*(X)$.

Доказательство. Утверждение a) вытекает из следствия 7.1. Утверждение b) доказано в § 3 (следствие 3.10). Утверждение c) вытекает из a) и b) и того факта, что $\mathcal{K}'(Y) = \varprojlim \mathcal{K}'(Y^n)$, где $Y^n = BSU(n)$, соответственно, $B\mathrm{Spin}\,(n)$, а $\mathcal{K}'(Y^n) = 0$ [см. ([2])]. Утверждение d) вытекает из a) и следствия 2.4. Для доказательства утверждения e) рассмотрим последовательность

$$0 \leftarrow k'(Y/X) \xleftarrow{\varphi} k^0(X) \xleftarrow{\psi} k^0(Y) \leftarrow 0. \tag{1}$$

Поскольку $k^*(Y/X, \mathbf{Z}_p) = 0$ для любого p, то группа $k^*(Y/X) = \overline{\{0\}}$ и, значит, последовательность (1) точна, а группа $\mathrm{Im}\,\psi$ плотна к $k^0(X)$.

§ 8. k-функтор «убивающих» пространств комплекса BU и характер Черна

Мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.1. *Кольца* $\mathcal{K}^*(BU(2n, \ldots, \infty))$ *свободны от кручений. Более того, для любого ненулевого элемента* $\alpha \in \mathcal{K}^*(BU(2n, \ldots, \infty))$, $n \geqslant 1$, *элемент* $\mathrm{ch}\,\alpha \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$f_n\colon BU \mathbin{\#} CP^\infty \to BU\,(2n, \ldots, \infty),$$

при котором $f_n^*(\eta_n) = \eta_1 \otimes \xi^{n-1}$, где η_n — канонический элемент в группе $k^0(BU(2n, \ldots, \infty))$, ξ — мультипликативный образующий элемент в кольце $k^0(CP^\infty)$. Докажем, что отображение f_n индуцирует мономорфизм

$$f_n^* \mathcal{K}^*(BU\,(2n, \ldots, \infty)) \to \mathcal{K}^*(BU \mathbin{\#} CP^\infty).$$

Легко видеть, что этим доказательство теоремы будет закончено, поскольку кольцо $\mathcal{K}^*(BU \# CP^\infty)$ не имеет кручений и для любого ненулевого элемента $\alpha \in \mathcal{K}^*(BU \# CP^\infty)$ элемент $\mathrm{ch}\,\alpha \neq 0$.

ЛЕММА 8.1. *Естественное отображение* g_{2n}: $BU(2n, \ldots, \infty) \to BSU$ *индуцирует изоморфизм*

$$(g_{2n} \otimes id)^*: \mathcal{K}^*(BSU \# L_p^\infty) \to \mathcal{K}^*(BU(2n, \ldots, \infty) \# L_p^\infty)$$

для любого n *и простого* $p \geqslant 2$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\leftarrow k^*(BU(2n, \ldots, \infty) \# L_p^\infty) \leftarrow k^*(BSU \# L_p^\infty) \leftarrow k^*(Y \# L_p^\infty) \leftarrow \ldots,$$

где $Y = BSU / g_{2n}BU(2n, \ldots, \infty)$. По теореме 7.2 а), имеет место равенство $k^*(Y, \mathbf{Z}_q) = 0$. Тогда из следствия 4.4 вытекает, что $k^*(Y \# L_p^\infty, \mathbf{Z}_q) = 0$ для любого простого q. В силу следствия 2.4 и теоремы 3.2, $k^*(Y \# L_p^\infty) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. *Пусть* f: $X \to Y$ — *такое отображение, что гомоморфизм*

$$g^*: \mathcal{K}^*(Y \# L_p^\infty) \to \mathcal{K}^*(X \# L_p^\infty)$$

является мономорфизмом для любого простого p. *Тогда гомоморфизм* f^*: $\mathcal{K}^*(Y) \to \mathcal{K}^*(X)$ *является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{K}^*(Y)$ и Y^n — такой остов, что $\alpha|_{Y^n} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что порядок элемента $\alpha|_{Y^n} \in \mathcal{K}^*(Y^n)$ есть простое число p или бесконечность. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^*(Y^n) \otimes \mathcal{K}^*(L_p^\infty) & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{K}^*(Y^n \# L_p^\infty) \\
\uparrow i_n^* & & \uparrow \\
\mathcal{K}^*(Y) \otimes \mathcal{K}^*(L_p^\infty) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{K}^*(Y \# L_p^\infty) \\
\downarrow \bar{f}^* & & \downarrow g^* \\
\mathcal{K}^*(X) \otimes \mathcal{K}^*(L_p^\infty) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{K}^*(X \# L_p^\infty)
\end{array}$$

Пусть $\eta \in \mathcal{K}^*(L_p^\infty)$ — канонический элемент. В силу леммы 4.3 и последовательности (11) § 4, гомоморфизм φ_n является мономорфизмом. Значит, $\varphi(\alpha \otimes \eta) \neq 0$, так как $i_n^*(\alpha) \otimes \eta \neq 0$. Поскольку $g^*\varphi(\alpha \otimes \eta) = \psi\bar{f}^*(\alpha \otimes \eta) = \psi(f^*(\alpha) \otimes \eta)$ и g^* — мономорфизм, то $f^*(\alpha) \neq 0$. Лемма 8.2 доказана.

Обозначим через γ^i элемент из $k^0(BU)$, равный $\sigma_i(\eta_j - 1)$, где $(\eta_j - 1)$ — образующие $Bу$ в k-теории и σ_i — элементарные симметрические полиномы, а $\Phi^i = \sum_j (-1)^{i+1}(\eta_j - 1)^i$. Тогда группу $k^*(BU \# L_p^\infty) \approx k^*(BU) \hat{\otimes} k^*(L_p^\infty)$ можно рассматривать как $k^*(L_p^\infty)$-модуль, являющийся пополнением свободной $k^*(L_p^\infty)$-алгебры, порожденной элементами γ^i.

ЛЕММА 8.3. *Пусть* f: $S^2BU \to BU$ — *отображение, переводящее канонический элемент* η *в* $\eta \otimes (\xi - 1)$, *где* $(\xi - 1)$ — *образующий в* $k^0(S^2)$. *Тогда* $f^*(\gamma^i) = (\Phi^i - \Phi^{i-1}) \otimes (\xi - 1)$, *а* $f^*(\Phi^i) = i(\Phi^i - \Phi^{i-1}) \otimes (\xi - 1)$.

Доказательство. Пусть $\gamma^t(\alpha) = \Sigma t^i \gamma^i(\alpha)$ (свойства операций γ^i см. в ([17])). Вычислим

$$\gamma^t(\eta \otimes (\xi - 1)) = \gamma^t(\eta \otimes \xi) / \gamma^t(\eta). \tag{1}$$

Заметим, что

$$\eta \otimes \xi = \sum_i (\eta_i - 1) \otimes \xi = \sum_i ((\eta_i \xi - 1) - (\xi - 1)).$$

Поэтому имеют место следующие равенства:

$$\gamma^t(\eta \otimes \xi) = \prod_i \gamma^t(\eta_i \xi - 1) / \gamma^t(\xi - 1) =$$
$$= \prod_i (1 + t(\eta_i \xi - 1)) / (1 + t(\xi - 1)) =$$
$$= \prod_i (1 + t(\eta_i - 1)\xi + t(\xi - 1)) / (1 + t(\xi - 1)) =$$
$$= \prod_i (1 + ((t / (1 + t(\xi - 1)))(\eta_i - 1)) = \gamma^s(\eta),$$

где $s = t\xi / (1 + t(\xi - 1))$. Поскольку $(\xi - 1)^2 = 0$, то

$$s = t\xi(1 - t(\xi - 1)) = t(\xi - 1)(1 - t(\xi - 1)) + t(1 - t(\xi - 1)) =$$
$$= t + (t - t^2)(\xi - 1).$$

Аналогичным образом находим степени

$$s^k = (t + (t - t^2)(\xi - 1))^k = t^k + kt^k(1 - t)(\xi - 1).$$

Следовательно, выражение (1) принимает вид

$$\frac{\gamma^t(\eta \otimes \xi)}{\gamma^t(\eta)} = 1 + \frac{t(1 - t) \sum \gamma^k(\eta) k t^{k-1}}{\gamma^t(\eta)} (\xi - 1) =$$
$$= 1 + t(1 - t) \frac{d}{dt} \log(\gamma^t(\eta))(\xi - 1).$$

Поскольку формальный ряд $\frac{d}{dt} \log(\gamma^t(\eta))$ является аддитивной функцией пучка, то, проверяя на одномерном пучке, получаем равенство:

$$\frac{d}{dt} \log(1 + t(\eta - 1)) = \frac{\eta - 1}{1 + t(\eta - 1)} = \sum (-1)^k t^k (\eta - 1)^{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{k+1}(\eta) t^k.$$

Таким образом, выражение (1) можно представить в виде

$$\gamma^t(\eta \otimes (\xi - 1)) = 1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1 - t) \Phi^{k+1}(\eta) t^{k+1} \right) (\xi - 1) =$$
$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - t) \Phi^k(\eta) t^k \right) (\xi - 1).$$

Сравнивая коэффициенты при t^i, находим:

$$\gamma^i(\eta \otimes (\xi - 1)) = (\Phi^i - \Phi^{i-1})(\eta) \otimes (\xi - 1).$$

Так как $\Phi^i(\eta) = i\gamma^i(\eta) +$ разложимые элементы, то $f^*(\Phi^i) = if^*\gamma^i(\eta)$. Лемма доказана.

Обозначим через V пополнение свободного $k^*(L_p^\infty)$-модуля, порожденного элементами γ^i, $1 \leqslant i < \infty$, через W — пополнение свободного $k^*(L_p^\infty)$-модуля, порожденного элементами Φ^i, $1 \leqslant i < \infty$. Тогда f^* определяет гомоморфизм g: $V \to W$ по формуле $g(\gamma^i) = \Phi^i - \Phi^{i-1}$ и гомоморфизма h: $W \to W$ по формуле $h(\Phi^i) = i(\Phi^i - \Phi^{i-1})$.

ЛЕММА 8.4. *Ядро гомоморфизма g порождено элементом*

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum \mu_i\gamma^i$, $\mu_i \in k^*(L_p^\infty)$,— такой формальный ряд, что $g(\alpha) = 0$; тогда

$$g(\alpha) = \sum \mu_i(\Phi^i - \Phi^{i-1}) = \sum (\mu_i - \mu_{i+1})\Phi^i,$$

т. е. $\mu_i = \mu_{i+1}$.

ЛЕММА 8.5. *Ядро гомоморфизма h равно нулю.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\Phi^i$ — такой элемент из W, что $h(\alpha) = 0$. Тогда

$$h(\alpha) = \sum \mu_i \cdot i(\Phi^i - \Phi^{i-1}) = \sum (i\mu_i - (i+1)\mu_{i+1})\Phi^i = 0.$$

Так как модуль W свободный, то получаем равенство $i\mu_i = (i+1)\mu_{i+1} = \mu_1$. Поскольку $k^*(L_p^\infty) = \mathcal{K}^*(L_p^\infty)$, уравнение $ix = \mu_1$ не может иметь решений для всех i. Таким образом, $\mu_1 = 0$. Так как $k^*(L_p^\infty)$ не имеет кручения, то $\mu_i = 0$.

ЛЕММА 8.6. *Рассмотрим замкнутый подмодуль $V' \subset V$, порожденный элементами $\gamma^2, \gamma^3, \ldots, \gamma^i, \ldots$. Пусть f: $S^{2N}BU \to BU$ — такое отображение, что $f^*(\eta) = \eta \otimes (\xi - 1)^N$. Тогда ограничение $\bar{f}^*|_{V'}$ является мономорфизмом, где*

$$\bar{f}^*: k^*(BU \# L_p^\infty) \to k^*(S^{2N}BU \# L_p^\infty).$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией. Случай $N = 1$ доказан в лемме 8.4. Пусть утверждение верно для N. Докажем его для $N + 1$. Рассмотрим последовательность отображений

$$S^{2N+2}BU \xrightarrow{h_1} S^{2N}BU \xrightarrow{f_N} BU,$$

где h_1 — $2N$-кратная надстройка над f_1. Ясно, что отображение f_N порождает отображение $V \to W$ (как и в замечании перед леммой 8.4), а h_1 порождает отображение h: $W \to W$. Поскольку h является мономорфизмом, по лемме 8.5, то лемма 8.6 доказана.

ЛЕММА 8.7. *Гомоморфизм колец* g: $k^*(L_p^\infty)[[\gamma^i]] \to k^*(L_p^\infty)[[\Phi^i]]$, *заданный формулой* $g(\gamma^i) = \Phi^i - \Phi^{i-1}$, *является эпиморфизмом, а ядро является идеалом, порожденным элементом* $\gamma = \Sigma\gamma^i$.

Доказательство. Сделаем замену переменных:

$$x_1 = \gamma, \quad x_i = \gamma^i, \quad i \geqslant 2,$$

$$y_i = \Phi^i - \Phi^{i-1}, \quad i \geqslant 2.$$

Легко заметить, что имеют место изоморфизмы

$$k^*(L_p^\infty)[[\gamma^i]] \approx k^*(L_p^\infty)[[x_i]],$$
$$k^*(L_p^\infty)[[\Phi^i]] \approx k^*(L_p^\infty)[[y_i]],$$

а гомоморфизм g определяется соответствиями

$$x_1 \to 0, \quad x_i \to y_i, \quad i \geqslant 2.$$

ЛЕММА 8.8. *Гомоморфизм колец* h: $k^*(L_p^\infty)[[\Phi^i]] \to k^*(L_p^\infty)[[\Phi^i]]$, *заданный формулой* $h(\Phi^i) = i(\Phi^i - \Phi^{i-1})$, *является мономорфизмом.*

Доказательство. Сделаем замену переменных в области значений, а именно, положим $y_i = \Phi^i - \Phi^{i-1}$, $i \geqslant 2$. Тогда имеет место изоморфизм

$$k^*(L_p^\infty)[[\Phi^i]] \approx k^*(L_p^\infty)[[y_i]]$$

и гомоморфизм h задается формулой

$$\Phi^1 \longrightarrow \sum y_i, \quad \Phi^i \to iy_i, \quad i \geqslant 2.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что, если x — ряд, состоящий из мономов длины N, и $h(x) = 0$, то $x = 0$.

Представим элемент x в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N} (\Phi')^k \Big(\sum_{I_{N-k}} \Phi^{I_{N-k}} \lambda_{k, I_{N-k}} \Big),$$

где $I_{N-k} = \{i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{N-k}\}$ — набор целых чисел $\geqslant 2$; одновременно через I_{N-k} будем обозначать произведение $i_1 \ldots i_{N-k}$. Тогда имеем равенство

$$h(x) = \sum_{k=0}^{N} \Big(\sum y_i \Big)^k \Big(\sum_{I_{N-k}} y_{I_{N-k}} \cdot \lambda_{k, I_{N-k}} \cdot I_{N-k} \Big).$$

Допустим, что $h(x) = 0$. Раскроем скобки и приравняем нулю коэффициент при элементе y_{I_N}:

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{B \subset N, |B| = N-k} C_B \cdot \lambda_{k, I_{B-k}} \cdot I_B = 0, \qquad (*)$$

где C_B — некоторые биномиальные целые коэффициенты, не равные нулю, B — подмножества в целых числах $[l, \ldots, N]$ и I_B — ограничение набора I_N на B. Сумму $(*)$ можно разбить на две части:

$$\sum_{B \subset N-1} C_B \cdot \lambda_{k, I_B} \cdot I_B + \sum_{B'} C_{B'} \cdot \lambda_{k, I_{B'}} \cdot I_{B'} = 0,$$

где B' пробегает все подмножества, содержащие индекс i_N. Первое слагаемое не зависит от выбора i_N, а второе делится на число i_N. Значит,

$$\sum_{B\subset N-1} C_B\cdot\lambda_{k,\,I_B} I_B = 0.$$

Далее, по индукции получаем, что

$$\sum_{B\subset N-s} C_B\cdot\lambda_{k,\,I_B}\cdot I_B = 0 \qquad (**)$$

для любого $s \leqslant N$. Следовательно, при $s = N$ равенство $(**)$ имеет вид $\lambda_{k,\Phi} = 0$. Допустим, что $\lambda_{k,\,I_s} = 0$ для всех I_s, $s \leqslant n$. Докажем, что $\boldsymbol{\lambda_{k,\,I_{n+1}}} = 0$. Продолжим набор I_{n+1} до некоторого набора I_N. Тогда

$$\sum_{B\subset N-(N-n-1)} C_B\lambda_{k,\,I_B} I_B = 0$$

в силу равенства $(**)$. Заметим, что по предположению $\lambda_{k,\,I_B} = 0$, если $|B| \leqslant n$. Остается одно слагаемое, а именно, $B = N - (N-n-1)$; таким образом,

$$C_{N-(N-n-1)}\,\lambda_{k,\,I_{n+1}}\cdot I_{n+1} = 0.$$

Так как в кольце $k^*(L_p^\infty)$ нет элементов конечного порядка, то $\lambda_{k,\,I_{n+1}} = 0$. Лемма 8.8 доказана.

ЛЕММА 8.9. *Пусть* $f\colon BU \# (CP^\infty/CP^{N-1}) \to BU$ *— такое отображение, что*

$$f^*(\eta) = \eta \otimes (\xi - 1)^N.$$

Тогда $\operatorname{Ker} g^*$ *есть идеал, порожденный элементом* $\gamma = \Sigma\gamma^i$, *где* $g^*\colon k^*(BU \# L_p^\infty) \to k^*(BU \# CP^\infty/CP^{N-1} \# L_p^\infty)$ *— индуцированное отображение.*

Доказательство. Представим модуль $k^*(BU \# L_p^\infty)$ в виде прямой суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, где V_n — подмодуль, порожденный мономами от γ^i длины n. Легко видеть, что если $x \in V_n$, то

$$g^*(x) = h^{N-1}\circ g(x) \otimes (\xi-1)^{nN} + y \otimes (\xi-1)^{Nn} + z(\xi-1)^{Nn+1},$$

где $y \in \sum\limits_{k\geqslant n+1} V_k$ и g и h — гомоморфизмы, описанные в леммах 8.7 и 8.8. Ясно, что если $g^*(a) = 0$, то $h^{N-1}\circ g(x) \otimes (\xi-1)^{nN} = 0$. Значит, в силу лемм 8.7 и 8.8, элемент x принадлежит указанному идеалу.

Вернемся теперь к гомоморфизму

$$f_n^*\colon \mathcal{K}^*(BU(2n, \ldots, \infty)) \to \mathcal{K}^*(BU \# CP^\infty).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & BU(2n, \ldots, \infty) \arrow[d, "\pi"] \\ BU \# CP^\infty/CP^{n-1} \arrow[ur, "f_n"] \arrow[dr, "f"'] & BSU \arrow[d, "\omega"] \\ & BU \end{tikzcd}$$

Ей соответствует следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & k^*(BU(2n, \ldots, \infty) \# L_p^\infty) \arrow[dl, "f_n^*"'] \\ k^*(BU \# CP^\infty/CP^{n-1} \# L_p^\infty) & k^*(BSU \# L_p^\infty) \arrow[u, "\pi^*"'] \\ & k^*(BU \# L_p^\infty) \arrow[ul, "f^*"] \arrow[u, "\omega^*"'] \end{tikzcd}$$

В силу леммы 8.1 гомоморфизм π^* является изоморфизмом. По лемме 8.9 $\operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Ker} \omega^*$, значит, $f_n{}^*$ является мономорфизмом. Применяя, наконец, лемму 8.2, получаем, что гомоморфизм

$$f_n^*\colon \mathscr{K}^*(BU(2n, \ldots, \infty)) \to \mathscr{K}^*(BU \# CP^8)$$

является мономорфизмом. Таким образом, теорема 8.1 доказана.

§ 9. Когомологические операции в K-теории по модулю p

1. Обозначим через K_p пространство всех непрерывных отображений в компактно открытой топологии p-сферы $S' \bigcup\limits_p D^2$ в комплекс BSU. Согласно Милнору ([24]), пространство K_p является клеточным комплексом. Из равенства

$$[X \# (S' \bigcup_p D^2), BU] = [X \# (S' \bigcup_p D^2), BSU] = [X, K_p],$$

где X — связный комплекс [см., например, ([11])], вытекает, что комплекс K_p является представляющим пространством для функтора $k\ (\ ,\mathbf{Z}_p)$, т. е. $k(X, \mathbf{Z}_p) = [X, K_p]_0$. Таким образом, задача вычисления когомологических операций в K-теории $\operatorname{mod} p$ сводится к вычислению группы $k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)$.

Рассмотрим расслоение

$$\psi : K_p \xrightarrow{BU} SU, \tag{1}$$

соответствующее корасслоению

$$S' \to S' \bigcup_p D^2 \to S^2.$$

Здесь мы, как обычно, отождествили BU и $\Omega^2 BSU$, SU и ΩBSU. Из класса пространств, гомотопически эквивалентных пространству BU, выберем следующее пространство. Согласно Милнору существует топологическая группа G и главное универсальное локально тривиальное расслоение со слоем G и базой SU. Группа G гомотопически эквивалентна пространству $\Omega SU \approx BU$. В дальнейшем группу G мы будем обозначать по-прежнему через BU, а $k^*(BU)$ будем рассматривать как коалгебру, диагональ в которой индуцирована групповой структурой в G.

Докажем, что канонический элемент $\eta \in k^*(BU)$ является примитивным элементом относительно вышеуказанной диагонали. Для этого рассмотрим спектральную последовательность относительно фильтрации Милнора в пространстве SU. Первый член фильтрации $X_1 = SBU \subset SU$, причем если $\xi \in k'(SU)$ — канонический элемент, то $i^*(\xi) = \eta$. Следовательно, $[\eta] \in E_1^{1,1} = k'(SBU)$ является циклом всех дифференциалов. В частности, η является примитивным элементом, т. е. $\Delta\eta = \eta \otimes 1 + 1 \otimes \eta$. Этим полностью определяется диагональ в коалгебре $k^*(BU)$. Именно, справедлива

ЛЕММА 9.1. *Пусть* $\gamma^i \in k^*(BU)$ — *канонические мультипликативные образующие кольца* $k^*(BU)$ (см. § 8). *Тогда*

$$\Delta(\gamma^i) = \sum_{\alpha+\beta=i} \gamma^\alpha \otimes \gamma^\beta.$$

ЛЕММА 9.2. *Существует главное локально тривиальное расслоение*

$$\tilde{K}_p \xrightarrow{BU} SU,$$

индуцированное из универсального расслоения таким гомоморфизмом φ: $BU \to BU$, *что* $\varphi^*(\eta) = p\eta$ *и* $\tilde{K}_p$-*гомотопически эквивалентно пространству* K_p.

Доказательство. Существование требуемого гомоморфизма вытекает из того факта, что если f: $X \to Y$ — произвольное отображение, то индуцированное отображение групп Милнора φ: $G(X) \to G(Y)$ является гомоморфизмом. Рассмотрим такое отображение f: $SU \to SU$, что $f^*(\xi) = p\xi$. Тогда, согласно Милнору, следующая диаграмма расслоений коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d, "BU"'] & \tilde{K}_p \arrow[r] \arrow[d, "BU"'] & * \arrow[d, "BU"] \\
SU \arrow[r, equal] & SU \arrow[r, "f"] & SU
\end{tikzcd} \qquad BU \xrightarrow{\varphi} BU = BU \tag{2}$$

Вернемся теперь к расслоению (1). Отождествляя пространства SU и ΩBSU, можно считать, что отображение f индуцировано отображением сферы S' на себя степени p. Следовательно, композиция $f \circ \psi$ гомотопна отображению в точку. Значит, существует такое отображение χ: $K_p \to \tilde{K}_p$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{K}_p \arrow[d] \\
K_p \arrow[ur, "\chi"] \arrow[r, "\varphi"'] & SU
\end{tikzcd} \tag{3}$$

коммутативна. Из диаграмм (2) и (3) стандартными гомотопическими методами можно доказать, что χ индуцирует изоморфизм гомотопических групп и, следовательно, является гомотопической эквивалентностью. Лемма доказана.

Нам понадобятся некоторые общие факты о спектральной последовательности, индуцированной фильтрацией Милнора.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть* $E \xrightarrow{G'} X$ — *главное локально тривиальное расслоение, индуцированное гомоморфизмом* φ: $G \to G'$, *где* G — *группа Милнора базы* X. *Тогда существует спектральная последовательность, сильно сходящаяся к* $k^*(E, \mathbf{Z}_p)$, *член* E_2 *которой равен* $\operatorname{Cotor}_{k^*(G, \mathbf{Z}_p)}(k^*(G', \mathbf{Z}_p), k^*(*, \mathbf{Z}_p))$, *причем структура комодуля* $k^*(G', Z_p)$ *над коалгеброй* $k^*(G, \mathbf{Z}_p)$ *индуцируется гомоморфизмом* φ.

Доказательство. Согласно работе ([25]) фильтрация Y^n в пространстве E, индуцированная фильтрацией Милнора в базе X, имеет вид:

$$Y^n/Y^{n-1} \approx S^n(G' \# \underbrace{G \# \ldots \# G}_{n \text{ раз}}).$$

Следовательно,

$$E_1^{n-1} = k^*(Y^n/Y^{n-1}, \mathbf{Z}_p) = k^*(G', \mathbf{Z}_p) \hat{\otimes} k^*(G, \mathbf{Z}_p) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} k^*(G, \mathbf{Z}_p),$$

а дифференциал d_1: $E_1^{n-1} \to E_1^n$ действует по формуле:

$$d_1(a' \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \Delta a' \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n +$$
$$+ \sum_i (-1)^i a' \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes \Delta a_i \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Сильная сходимость вытекает из теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 9.2. *Спектральная последовательность, описанная в теореме* 9.1, *является мультипликативной. Умножение в члене* E_2 *совпадает с алгебраическим умножением в кольце* Cotor*. *Умножение в члене* E_∞ *присоединено к умножению в* $k^*(E, \mathbf{Z}_p)$.

Доказательство. Пусть Z — пространство универсального главного G-расслоения над X. n-ый член фильтрации Милнора в пространстве Z имеет вид $G \circ \ldots \circ G$ [см. ([5])], а n-й член индуцированной фильтрации в пространстве E имеет вид $Y^n = (G' \times (G \circ \ldots \circ G)) / G$. Тогда по каждой перестановке τ натурального ряда чисел однозначно определяется естественный гомеоморфизм A_τ: $E \to E$. Обозначим через τ_n перестановку $(n, n-1, \ldots, 1, 0, n+1, \ldots)$. Существует такая гомотопия диагонали $\Delta_{t,n}$, что

$$\Delta_{0,n} = \Delta, \quad \Delta_{1,n}(Y^n) \subset \bigcup_{\alpha+\beta=n} Y^\alpha \times Y'^\beta,$$

где $Y'^\beta = A_{\tau_n}(Y^\beta)$. Этот факт вытекает из существования двух таких деформаций a_t, b_t стандартного симплекса $[0, 1, \ldots, n]$, сохраняющих все грани, что если $a_1(x) \in [0, 1, \ldots, k]$, то $b_1(x) \in [k, k+1, \ldots, n]$, и обратно. При помощи стандартных рассуждений [см., например, ([23]), § 15] можно показать, что если X^n, Y^n — фильтрации в X и Y, а $Z^n = \bigcup_{\alpha+\beta=n} X^\alpha \times Y^\beta$ — фильтрация в $Z = X \times Y$, то

$$E_r(Z) = E_r(X) \otimes E_r(Y)$$

и дифференциал d_r удовлетворяет формуле Лейбница. Применяя это утверждение к нашему случаю, можно построить спаривание спектральных последовательностей

$$E_r(Y^n) \otimes E_r'(Y^n) \to E_r(Y^n),$$

где члены $E_r'(Y^n)$ индуцированы фильтрацией $A_{\tau_n}(Y^k) \subset Y^n = A_{\tau_n}(Y^n)$. Непосредственно из определения вытекает, что

$$E_2'(E) = A^{\bullet}_{\tau_n}(E_2(E)) = E_2(E).$$

Следовательно, мы получим спаривание

$$E_r(E) \otimes E_r(E) \to E_r(E), \quad r \geqslant 2,$$

индуцированное диагональным вложением $E \to E \times E$. Совпадение построенного нами умножения в члене E_2 и алгебраического умножения проверяется сравнением двух фильтраций в пространстве $E \times E$, а именно, фильтрации, n-ый член которой имеет вид $W_n = \sum_{\alpha+\beta=n} Y^\alpha \times Y^\beta$, и фильтрации Милнора $\{V_n\}$, соответствующей группе $G \times G$. Теорема доказана.

Перейдем к вычислению кольца $k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)$. Вложение ρ: $BU \to K_p$ в расслоении (1) соответствует приведению группы $k(X)$ по модулю p, а проекция ψ: $K_p \to SU$ соответствует гомоморфизму Бокштейна.

ТЕОРЕМА 9.3. *Для всех простых* $p \geqslant 2$ *образ* $\rho^*(k^*(K_p\mathbf{Z}_p)) \subset \subset k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$ *есть подкольцо, мультипликативно порожденное элементами* $\Phi^k \bmod p$. *Образ* $\psi^*(k^*(SU, \mathbf{Z}_p)) \subset k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)$ *изоморфен внешней алгебре* $k^*(SU, \mathbf{Z}_p)\,/\,I$, *где* I *— идеал, порожденный элементами* $\{S\Phi^{kp}\}_{k\geqslant 1}$. *Последовательность*

$$0 \leftarrow \rho^*(k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)) \leftarrow k^*(K_p, \mathbf{Z}_p) \leftarrow k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)\cdot\psi^*(k^*(SU, \mathbf{Z}_p)) \leftarrow 0$$

точна. Если $p \geqslant 3$, *то*

$$k^*(K_p, \mathbf{Z}_p) \approx \rho^*(k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)) \mathbin{\hat{\otimes}} \psi^*(k^*(SU, \mathbf{Z}_p)) = \mathbf{Z}_p[\Phi_p^k] \mathbin{\hat{\otimes}} \Lambda[\omega_p^k],$$

где $\rho^*(\Phi_p^k) = \Phi^k \bmod p$, $\omega_p{}^k = \psi_*(S\Phi^k)$, k *взаимно просто с* p.

Элементы $\Phi_p{}^k$ *можно выбрать так, что композиция* $\Phi_p{}^k\Phi_p{}^s$ *совпадет по модулю разложимых элементов с композицией* $\Phi^k\Phi^s \bmod p$. *Элемент* ω_p' *определяет гомоморфизм Бокштейна. Элементы* $\omega_p{}^k$ *и* $\Phi_p{}^k$ *связаны равенствами*:

$$\omega_p^k = \omega_p' \Phi_p^k = \Phi_p^k \omega_p'.$$

Доказательство. Вычислим кольцо $\mathrm{Cotor}_A(M, \mathbf{Z}_p)$, где $M = k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$ — комодуль над коалгеброй $A = k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$, структура которого индуцирована гомоморфизмом φ: $BU \to BU$.

Определим кольцо $k_*(X, \mathbf{Z}_p)$ как множество непрерывных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(k^*(X, \mathbf{Z}_p), \mathbf{Z}_p)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{Cotor}_A(M, Z_p) = \mathrm{Hom}_{Z_p}(\mathrm{Tor}_{A^*}(M^*, Z_p), Z_p),$$

где $M^* = \mathrm{Hom}_{Z_p}(M, \mathbf{Z}_p)$. Опишем структуру модуля M^* над алгеброй $A^* = k_*(BU, \mathbf{Z}_p)$. Алгебра A^* есть кольцо полиномов $Z_p[\theta_i^*]$. Модуль M^* есть также кольцо полиномов $\mathbf{Z}_p[\xi_i^*]$, а структура модуля определяется гомоморфизмом колец φ_*: $A^* \to M^*$.

Введем в группах M и A канонические аддитивные базисы θ_ω, γ_ω, где ω — произвольные разбиения целых чисел. Пусть θ_ω^*, ξ_ω^* — двойственные базисы в группах M^* и A^*. Поскольку $\varphi^*(\eta) = p\eta$, где $\eta \in k^*(BU)$ — канонический элемент, то гомоморфизм φ^*: $M \to A$ определяется формулами

$$\varphi^*(\theta_\omega) = \begin{cases} (\gamma_{\omega_1})^p, & \text{если } \omega = \underbrace{(\omega_1, \ldots, \omega_1)}_{p \text{ раз}}, \\ 0\ , & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По двойственности получаем формулы:

$$\varphi_*(\xi^*_{(i)}) = \begin{cases} \theta^*_{(k,\ldots,k)} = (\theta^*_{(k)})^p, & \text{если } i = kp, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, модуль M^* является прямой суммой модулей M_ω^* с одной образующей θ_ω^*, где ω — разбиение, не содержащее больше, чем p, одинаковых чисел.

Вычислим группу $\mathrm{Tor}_{A^*}(M_\omega^*, \mathbf{Z}_p)$. Рассмотрим в алгебре A^* подалгебру B, порожденную всеми элементами $\xi^*_{(i)}$, для которых $i \neq kp$. Ясно, что алгебра A^* является свободным модулем над подалгеброй B. Поэтому имеем равенства:

$$\mathrm{Tor}_{A^*}(M_\omega^* \mathbf{Z}_p) \approx \mathrm{Tor}_B(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p) = \Lambda[\omega_i^*], \quad i \neq kp, \quad \omega_i^* \in \mathrm{Tor}^1.$$

Возвращаясь к исходной ситуации, получаем, что

$$\mathrm{Cotor}_A(M, \mathbf{Z}_p) \approx V \hat{\otimes} \Lambda[[\omega_i]], \quad V \subset \mathrm{Cotor}^0, \quad \omega_i \in \mathrm{Cotor}',$$

где V — подгруппа в группе M, порожденная элементами θ_ω, а ω — разбиение, содержащее не больше, чем p — 1, одинаковых чисел.

Можно показать, что V является подкольцом в кольце M, причем $V = \mathbf{Z}_p[[\theta_k]]$, где k не делится на p. Нетрудно также проверить, что кольцевая структура в группе $V \hat{\otimes} \Lambda[[\omega_i]]$ совпадает с кольцевой структурой в группе $\mathrm{Cotor}_A(M, \mathbf{Z}_p)$.

Таким образом, член E_2^* спектральной последовательности изоморфен кольцу $\mathbf{Z}_p[[\theta_k]] \hat{\otimes} \Lambda[[\omega_i]]$, где k и i не делятся на p.

Покажем теперь, что $E_2^* = E_{\infty^*}$. Рассмотрим сначала отображение ψ: $K_p \to SU$ и индуцированный им гомоморфизм спектральных последовательностей относительно фильтрации Милнора в пространстве SU. Член $E_2^*(SU)$ изоморфен кольцу $\Lambda[[S\Phi^i]]$, причем $\psi^*(S\Phi^i) = \omega_i$, если $i \neq kp$, и $\psi^*(S\Phi^i) = 0$ в остальных случаях. Используя характер Черна, можно показать, что $E_2(SU) = E_\infty^*(SU)$. Отсюда вытекает, что все ω_i являются циклами всех дифференциалов. Докажем теперь, что $\theta_{(k)}$ являются циклами всех дифференциалов. Для этого изучим отображение

$$\rho\colon \ BU \to K_p.$$

Рассмотрим отображения

$$BU \# S_p \xrightarrow{\rho \# \mathrm{id}} K_p \# S_p \xrightarrow{\alpha} BU,$$

где α — каноническое отображение, соответствующее тождественному отображению $K_p \to K_p$. Легко видеть, что композиции $f = \alpha \circ (\rho \# \mathrm{id})$ соответствует коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} BU \# S_p \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & & BU \\ & BU \# S^2 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

причем $g^*(\eta) = \eta \otimes \sigma$. Из леммы 8.3 вытекает, что существуют такие элементы $d_i \in k^*(BU)$, что $g^*(d_i) = \Phi^i \otimes \sigma$. Тогда отображение $d_i \circ f$ определяет элемент $[\Phi^i]_p \in k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$. Пусть $\Phi_p{}^i \in k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)$ — элементы, определенные отображениями $d_i \circ \alpha$. Тогда $\rho^*(\Phi^i_p) = [\Phi^i]_p$. Рассматривая элементы $[\Phi^i]_p$ как элементы из группы $E_1^{00}(K_p)$, получаем, что элементы $[\Phi^i]_p$ являются циклами всех дифференциалов. Поскольку в члене E_2^* элементы $[\Phi^i]_p$ соответствуют элементам $\theta_{(i)}$, то этим утверждение доказано.

Применяя теперь теорему 9.2, получаем, что $E_2{}^* = E_\infty{}^*$.

Для вычисления композиции $\Phi^k_p \Phi$ достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} BU \arrow[r, "\Phi^k"] \arrow[d, "\rho"] & BU \arrow[r, "\Phi^s"] \arrow[d, "\rho"] & BU \arrow[d, "\rho"] \\ K_p \arrow[r, "\Phi_p{}^k"] & K_p \arrow[r, "\Phi_p{}^s"] & K_p \end{tikzcd}$$

Равенство $\omega_p{}^k = \Phi_p{}^k \omega_p{}'$ вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & & K_p \arrow[r, "\Phi^k_p"] & K_p \\ S(K_p) \arrow[urr, "\omega^1_p"] \arrow[r] & S(SU) \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & BU \arrow[u, "\rho"] \arrow[r] & BU \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

Равенство $\omega_p{}'\Phi^k_p = \Phi^k_p \omega_p{}'$ легко получить из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} K_p \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Phi_p{}^k"'] & SU \arrow[d, "\Phi^k"] \\ K_p \arrow[r, "\psi"] & SU \end{tikzcd}$$

2. Стабильные операции в K-теории $\mathrm{mod}\, p$. Последовательность элементов $a_n \in k^*(K_p, \mathbf{Z}_p)$ будем называть стабильной операцией, если для любого $n \geqslant 1$ выполняется равенство:

$$a_n(x \otimes \sigma) = a_{n-1}(x) \otimes \sigma,$$

где $\sigma \in k^0(S^2, \mathbf{Z}_p)$ — образующий элемент.

ТЕОРЕМА 9.4. *Естественная проекция*

$$K_p(2n, \ldots, \infty) \to K_p(2n-2, \ldots, \infty), \qquad n \geqslant 2,$$

индуцирует изоморфизм

$$k^*(K_p(2n-2,\ldots,\infty),\ \mathbf{Z}_p) \to k^*(K_p(2n,\ldots,\infty),\ \mathbf{Z}_p).$$

Доказательство. Для $n \geqslant 3$ утверждение теоремы вытекает из следствия 7.1.

Докажем утверждение для $n=2$. Рассмотрим локально тривиальное расслоение

$$K_p \xrightarrow{K_p(4,\ldots,\infty)} K(\mathbf{Z}_p, 2),$$

индуцированное каноническим действием группы L_p^∞ на пространстве $K_p(4,\ldots,\infty)$. (Напомним, что $K_p(4,\ldots,\infty)$ можно считать пространством главного L_p^∞ — расслоения с базой K_p.)

ЛЕММА 9.3. *Группа* $k^*(K_p(4,\ldots,\infty),\ \mathbf{Z}_p)$ *является тривиальным комодулем над коалгеброй* $k^*(L_p^\infty, \mathbf{Z}_p)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что гомоморфизм

$$i^*\colon\ k^*(K_p(4,\ldots,\infty),\ \mathbf{Z}_p) \to k^*(L_p^\infty,\ \mathbf{Z}_p),$$

где $i\colon\ L_p^\infty \to K_p(4,\ldots,\infty)$ — вложение слоя, тривиален. (Пространство $K_p(4,\ldots,\infty)$ можно считать топологической группой, а вложение слоя $L_p^\infty \overset{i}{\subset} K_p(4,\ldots,\infty)$ — гомоморфизмом.)

Превратим отображение i в расслоение со слоем ΩK_p и докажем, что гомоморфизм

$$j_*\colon\ k^*(L_p,\ \mathbf{Z}_p) \to k^*(\Omega K_p,\ \mathbf{Z}_p)$$

является мономорфизмом. (Заметим, что последовательность

$$k^*(K_p(4,\ldots,\infty),\ Z_p) \xrightarrow{i^*} k^*(L_p\ ,Z_p) \xrightarrow{j^*} k^*(\Omega K_p, Z_p)$$

является полуточной.)

Рассмотрим коммутативную диаграмму расслоений:

$$\begin{array}{ccccc} U & \to & \Omega K_p & \to & BU \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \to & L_p^\infty & \to & CP^\infty \end{array}$$

и соответствующие спектральные последовательности для когомологий $\operatorname{mod} p$, индуцированные фильтрацией Милнора в пространствах BU и CP^∞.

Вычисления показывают, что

$$E_2(\Omega K_p) = \Lambda[\sigma c_i] \otimes \mathbf{Z}_p[c_i],\quad 1 \leqslant i < \infty,$$

$$\sigma c_i \in E_2^{0,2i-1},\qquad c_i \in E_2^{1,2i-1},$$

$$E_2(L_p^\infty) = \Lambda(\sigma u) \otimes \mathbf{Z}_p[u],\quad \sigma u \in E_2^{0,1},\quad u \in E_2^{1,1}.$$

При этом отображение j индуцирует следующий кольцевой гомоморфизм членов E_2 спектральных последовательностей:

$$j^*(\sigma u) = \sigma c_1,\quad j^*(u) = c_1.$$

Поскольку кольцо когомологий $H^*(L_p^\infty,\ \mathbf{Z}_p)$ известно, то из соображений размерности вытекает, что $E_2(L_p^\infty) = E_\infty(L_p^\infty)$. Следовательно, элементы σc_1 и c_1 являются циклами всех дифференциалов.

Покажем, что элементы $c_1^k \in E_2^{k,k}$ при $k \leqslant p-1$ не являются границей никакого дифференциала. Для этого достаточно доказать, что элементы σc_i, $i \leqslant p-1$, и c_i, $i \leqslant p-1$, являются циклами всех дифференциалов.

Тот факт, что c_i являются циклами всех дифференциалов, вытекает из сравнения спектральных последовательностей для пространств ΩK_p и BU относительно фильтраций, индуцированных фильтрацией Милнора в пространстве BU.

Для доказательства того, что элементы σc_i являются циклами всех дифференциалов, рассмотрим отображения

$$U \# S_p \xrightarrow{\bar\rho} \Omega K_p \# S_p \xrightarrow{\bar\alpha} SU,$$

где $\bar\alpha$ индуцировано тождественным отображением

$$\Omega K_p \to \Omega K_p = \{S_p,\ SU\}.$$

Поскольку $\bar\rho^*\bar\alpha^*(\eta) = \eta \otimes \sigma$, то легко видеть, что существуют такие элементы $d_i \in H^{2i+1}(SU, \mathbf{Z})$, $i \leqslant p-1$, что

$$\bar\rho^*\bar\alpha^*(d_i) = \sigma c_i \otimes v, \quad v \in H^2(S_p, \mathrm{Z}).$$

Значит, существуют такие элементы $\bar d_i \in H^{2i-1}(\Omega K_p \mathbf{Z}_p)$, что

$$\bar\rho^*(\bar d_i) = \sigma c_i, \quad i \leqslant p-1.$$

Таким образом, элементы σc_i, $i \leqslant p-1$, являются циклами всех дифференциалов.

Итак, гомоморфизм j^*: $H^q(L_p^\infty, \mathbf{Z}_p) \to H^q(\Omega K_p, \mathbf{Z}_p)$ является мономорфизмом в размерностях $q \leqslant 2p-2$.

Рассмотрим теперь спектральную последовательность Атья — Хирцебруха для пространств L_p^∞ и ΩK_p, члены E_2 которых равны когомологии этих пространств $\operatorname{mod} p$. Поскольку первый нетривиальный дифференциал есть d_{2p-1} и $d_{2p-1}(\sigma u) = u^p$, то j^*: $E_\infty(L_p^\infty) \to E_\infty(\Omega K_p)$ является мономорфизмом. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, вычислим группу

$$\operatorname{Cotor}_{k^*(L_p^\infty \mathbf{Z}_p)}(k^*(K_p(4, \ldots, \infty), \mathbf{Z}_p), \mathbf{Z}_p).$$

В силу леммы 9.3

$$\operatorname{Cotor}_{k^*(L_p^\infty,\ \mathrm{Z}_p)}(k^*(K_p(4, \ldots, \infty),\ \mathrm{Z}_p),\ \mathrm{Z}_p) \approx \operatorname{Cotor}_{k^*(L_p^\infty,\ \mathrm{Z}_p)}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p) \hat\otimes$$
$$\hat\otimes\, k^*(K_p(4, \ldots, \infty), \mathbf{Z}_p).$$

Коалгебра $k^*(L_p^\infty, \mathbf{Z}_p)$ изоморфна коалгебре $A_p{}^*$ из § 5. По лемме 5.3 имеем:

$$\operatorname{Cotor}^i_{k^*(L_p^\infty, \mathbf{Z}_p)}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p) = \begin{cases} \mathbf{Z}_p, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Следовательно, член E_2 спектральной последовательности относительно фильтрации в K_p, индуцированной фильтрацией Милнора в пространстве $K(\mathbf{Z}_p, 2)$, имеет вид:

$$E_2^0 = k^*(K_p(4, \ldots, \infty), \mathbf{Z}_p), \qquad E_2^q = 0, \quad q > 0.$$

Значит, $E_2 = E_\infty$ и вложение l: $K_p(4, \ldots, \infty) \to K_p$ индуцирует изоморфизм

$$l^*\colon\ k^*(K_p, \mathbf{Z}_p) \to k^*(K_p(4, \ldots, \infty), \mathbf{Z}_p).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 9.4 вытекает, что группа стабильных операций совпадает с группой $\varprojlim k^*(K_p(2n,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p)$, где проекция $k^*(K_p(2n,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p) \to k^*(K_p(2n-2,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p)$ задается каноническим отображением $S^2K_p(2n-2,\ldots,\infty) \to K_p(2n,\ldots,\infty)$.

ТЕОРЕМА 9.5. *Алгебра стабильных операций* Θ *изоморфна алгебре* $\mathbf{Z}_p[[\Theta_q]] \hat{\otimes} \Lambda(\beta)$, *где* q — *простые числа, не равные* p. *Операция* β *есть оператор Бокштейна* $\{\omega_p'\}$. *Мультипликативные образующие* Θ_q *выражаются по формуле*

$$\Theta_q = \left\{\frac{1}{s^n}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j C_s^j \Phi_p^{q-j}\right\},$$

где $q = kp + s$, $0 < s < p$.

Доказательство. Заметим, что если $X_n \subset K_p(2n,\ldots,\infty)$ — подкомплекс, гомотопически эквивалентный $K_p(2n,\ldots,\infty)$ в размерностях $\leqslant m_n + 2n$, $m_n \to \infty$, то группа $\varprojlim k^*(X_n, \mathbf{Z}_p)$ изоморфна группе $\varprojlim k^*(K_p(2n,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p)$. Рассмотрим расслоение

$$K_p(2n,\ldots,\infty) \xrightarrow{BU(2n,\ldots,\infty)} U(2n+1,\ldots,\infty), \tag{2}$$

аналогичное расслоению (1). Выберем в слое, пространстве расслоения и базе такие подкомплексы X_n, Y_n, Z_n, чтобы последовательность $X_n \to Y_n \to Z_n$ являлась корасслоением, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} BU(2n,\ldots,\infty) & \to & K_p(2n,\ldots,\infty) & \to & U(2n+1,\ldots,\infty) \\ \uparrow i_n & & \uparrow i_n & & \uparrow i_n \\ X_n & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Z_n \end{array} \tag{3}$$

была коммутативной, а отображения i_n были гомотопической эквивалентностью до размерности $m_n + 2n$, $m_n \to \infty$, и последовательность диаграммы (3) образовывала обратную систему. Это можно сделать, используя стандартную гомотопическую технику [см., например ([13])].

Так как функтор обратного предела точен на категории проконечных групп [см. § 3], то из диаграммы (3) получаем точную последовательность

$$\cdots \xleftarrow{\delta} \Phi^* \xleftarrow{\rho} \Theta^* \xleftarrow{\psi} S\Phi^* \xleftarrow{\delta} \cdots,$$

где

$$\Phi^m = \varprojlim_n k^m(BU(2n,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p),$$

$$\Theta^m = \varprojlim_n k^m(K_p(2n,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p),$$

$$S\Phi^m = \varprojlim_n k^m(U(2n+1,\ldots,\infty), \mathbf{Z}_p).$$

Из геометрического смысла гомоморфизма δ следует, что он является нулевым гомоморфизмом. Поскольку $\Phi' = S\Phi^0 = 0$, то $\Theta^0 = \Phi^0$, $\Theta' = S\Phi'$. Задача сводится к вычислению кольца Φ^0.

Рассмотрим оператор A: $k^*(BU, \mathbf{Z}_p) \to k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$, порожденный отображением $S^2BU \to BU$. Ясно, что последовательность $a_n \in k^*(BU, \mathbf{Z}_p)$ является стабильной операцией, если $Aa_n = a_{n-1}$. Значит, если $\{a_{n-1}\}$ — стабильная операция, то $a_n \in \operatorname{Im} A$. Из леммы 8.3 вытекает, что группа $\operatorname{Im} A = V$ порождена элементами Φ^k. Рассмотрим ограничение оператора A на пространство V. Элементы

$$\Xi^{k,s} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i \Phi_{pk+s-i}, \quad 0 \leqslant s \leqslant p-1,$$

являются собственными векторами оператора A с собственными значениями, равными s, и образуют аддитивный базис группы V. Значит, группа Φ^0 аддитивно порождена элементами

$$\Theta^{kp+s} = \left\{\frac{1}{s^n} \Xi^{k,s}\right\}, \quad k \geqslant 0, \quad 0 < s \leqslant p-1.$$

Из формулы Лейбница для оператора Бокштейна вытекает, что последовательность $\beta = \{\omega_p{}'\}$ является стабильной операцией. Из теоремы 9.3 следует, что гомоморфизм β: $\Phi^0 \to S\Phi'$ является изоморфизмом.

Формула композиции для операций $\Phi^k \in k^0(BU, \mathbf{Z}_p)$ имеет вид:

$$\Phi^k\Phi^s = \sum_{i<ks} \lambda_i \Phi^i + \Phi^{ks}.$$

Следовательно,

$$\Theta^k\Theta^s = \sum_{i<ks} \mu_i \Theta^i + \Theta^{ks},$$

т. е. операции Θ^k при k простом, не равном p, образуют мультипликативный базис алгебры Θ.

Доказательство теоремы 9.5 закончено.

Дополнение

ТЕОРЕМА. *Классифицирующее пространство BU является коммутативным кольцом в категории гомотопических типов.*

Доказательство. Мы построим три таких отображения

$$\begin{aligned} &\varphi\colon BU \times BU \to BU && \text{(сложение)},\\ &\psi\colon BU \times BU \to BU && \text{(умножение)},\\ &\chi\colon BU \to BU, && \end{aligned}$$

что будут выполнены аксиомы:

(1) $\varphi \circ (id \times \varphi) \approx \varphi \circ (\varphi \times id)$ (ассоциативность сложения);

(2) $\varphi \approx \varphi \circ T$, где T — перестановка координат (коммутативность сложения);

(3) отображения $\varphi(\ \ , *)$: $BU \to BU$ и $\varphi(*, \ \ )$: $BU \to BU$ гомотопны тождественному отображению (существование нейтрального элемента);

(4) отображение $\varphi(x, \chi(x))$: $BU \to BU$ гомотопно отображению в точку;

(5) $\psi \circ (id \times \psi) \approx \psi \circ (\psi \times id)$ (ассоциативность умножения);

(6) $\psi \approx \psi \circ T$ (коммутативность умножения);

(7) отображения $\psi(x, \varphi(y, z))$ и $\varphi(\psi(x, y), \psi(x, z))$ гомотопны (дистрибутивность).

Пусть i_n: $X^n \subset BU$ — n-мерные остовы пространства BU. Тогда отображение i_n определяет элемент $[i_n] \in K^0(X^n)$, причем если $i_{n,m}$: $X^n \subset X^m$, то $i^*_{n,m}([i_m]) = [i_n]$. Пусть $\varphi_{n,m}$: $X^n \times X^m \to BU$ — такие отображения, что $[\varphi_{n,m}] = [i_n] \otimes 1 + 1 \otimes [i_m] \in K^0(X^n \times X^m)$. Пусть, далее, $\psi_{n,m}$: $X^n \times X^m \to BU$ — такие отображения, что $[\psi_{n,m}] = [i_n] \otimes [i_m] \in K^0(X^n \times X^m)$. Наконец, пусть χ_n: $X^n \to BU$ — такие отображения, что $(\chi_n) = -[i_n]$. Заметим, что

$$[\varphi_{n,m}] = (i_{n,n'} \times i_{m,m'})^*([\varphi_{n',m'}])$$

при $n' \geqslant n$, $m' \geqslant m$. Аналогичные равенства имеют место и для отображений $\psi_{n,m}$ и χ_n. Значит, в силу теоремы Борсука [см. (7)] существуют такие отображения

$$\varphi\colon BU \times BU \to BU,$$
$$\psi\colon BU \times BU \to BU,$$
$$\chi\colon BU \to BU,$$

что

$$\varphi_{n,m} \approx \varphi \circ (i_n \times i_m),$$
$$\psi_{n,m} \approx \psi \circ (i_n \times i_m),$$
$$\chi_n \approx \chi \circ i_n.$$

Для доказательства свойств (1)—(7) нам потребуется следующая

ЛЕММА. *Пусть f, g: $X \to BU$ — такие два отображения, что $f \approx g$ на каждом остове X^n. Тогда если $K^0(SX^n) = 0$, то $f \approx g$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $X \times I$ и подпространства $X^n \times I$. Нам даны такие отображения

$$F_n\colon (X^n \times I) \cup (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \to BU,$$

что $F_n(x, 0) = f(x)$, $F_n(x, 1) = g(x)$.

Докажем, что F_n гомотопно F_{n+1} на подкомплексе $(X^n \times I) \cup (X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \times \{1\})$ неподвижным образом на $(X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \times \{1\})$. Отображения F_n и F_{n+1} совпадают на подкомплексе $(X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \times \{1\})$ и поэтому определяют [см. (17)] элемент

$$[F_n, F_{n+1}] \in K^0((X^n \times I) \cup (X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \cup \{1\}),$$
$$(X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \cup \{1\})) = K^0(SX^n) = 0.$$

Значит, F_n гомотопно F_{n+1} неподвижно на подкомплексе $(X^{n+1} \times \{0\}) \cup (X^{n+1} \times \{1\})$. По теореме Борсука отображение F_n можно продолжить до отображения комплекса $(X^{n+1} \times I) \cup (X^{n+2} \times \{0\}) \cup (X^{n+2} \times \{1\})$, гомотопного отображению F_{n+1}. Далее применяем индукцию и получаем отображение F: $X \times I \to BU$, причем $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

Доказательство всех свойств (1)—(7) проводится совершенно идентично. Докажем, например, свойство (7).

Итак, нужно доказать гомотопическую коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} BU \times BU \times BU \arrow[d, "\Delta\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}\times\varphi"] & & BU \times BU \arrow[dd, "\psi"] \\ BU\times BU\times BU\times BU \arrow[d, "\mathrm{id}\times T\times\mathrm{id}"] & & \\ BU\times BU\times BU\times BU \arrow[r, "\psi\times\psi"] & BU\times BU \arrow[r] & BU \end{tikzcd}$$

В силу леммы достаточно доказать, что два отображения

$$\psi \circ (\mathrm{id} \times \varphi) \text{ и } \varphi_0(\psi \times \psi) \circ (\mathrm{id} \times T \times \mathrm{id}) \circ (\Delta \times \mathrm{id} \times \mathrm{id})$$

гомотопны на каждом остове $X^n \times X^m \times X^k$. Гомотопический класс ограничения первого отображения есть элемент

$$[i_n] \otimes ([i_m] \otimes 1 + 1 \otimes [i_k]) \in K^0(X^n \times X^m \times X^k).$$

Гомотопический класс ограничения второго отображения есть элемент

$$[i_n] \otimes [i_m] \otimes 1 + [i_n] \otimes 1 \otimes [i_k] \in K^0(X^n \times X^m \times X^k).$$

Но эти два элемента равны. Значит, отображения гомотопны на каждом остове.

Поступило
15.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes, 9 (1961), 23—64.

[2] Атия М. Ф. и Хирцебрух Ф., Векторные расслоения и однородные пространства, Сб. «Математика», 6 : 2 (1962), 3—39.

[3] Hodgkin L., On the *K*-theory of Lie groups, Univ. of Warwick, Coventry (мимеографическое издание).

[4] Адамс Дж. и Уолкер Г., Один пример из теории гомотопий, Сб. «Математика», 9 : 1 (1965), 51—53.

[5] Milnor I. W., Construction of universal bundles. II, Ann. Math. 63 (1956), 430—436.

[6] Puppe D., Homotopienmengen und ihre induzierten Abbildungen. I, Math. Z., 69 (1958), 299—344.

[7] Whitehead I. H. C., Combinatorial homotopy, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 213—245.

[8] Серр Ж.-П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, Сб. «Расслоенные пространства», М., 1958.

[9] Milnor I. W., The geometric realization of a semi-simplicial complex, Ann. Math., Ser. 2, v. 65, № 2 (1957), 357—362.

[10] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., 1960.

[11] Фукс Д. В., Двойственность Экмана — Хилтона и теория функторов в категории топологических пространств, Успехи матем. наук, т. 21, вып. 2 (128) (1966), 3—40.

[12] Atiyah M. F., Vector bundles and the Kunneth formula, Topology, 1 (1962), 245—248.

[13] Adams J. F., On the structure and application of the Steenrod algebra, Comm. Math. Helv., 32, № 3 (1958), 180—214.

[14] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 2, М., 1963.

[15] Манин Ю. И., Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики, Успехи матем. наук, т. 18, вып. 6 (1963), 3—90.

[16] Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 46, 1955.

[17] Atiyah M. F., K-theory, Notes by D. W. Anderson, Harvard, 1964 (готовится русский перевод).

[18] Serre J.— P., Cohomologie galoisienne, Cours on collège de France, 1962—1963, Berlin, 1964.

[19] Маклейн С., Гомология, М., 1966.

[20] Бухштабер В. М. и Мищенко А. С., Элементы бесконечной фильтрации в K-теории, Докл. АН СССР, т. 178, № 6 (1968).

[21] Araki S., Toda H., Multiplicative' structures in mod q cohomology theory. I, Osaka J. Math., v. 2, № 1 (1965), 71—115.

[22] Maunder C. R. F., Mod p cohomology theories and the Bockstein spectral sequence. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 63, № 1 (1967), 23—43.

[23] Dold A., Halbexakte Homotopiefunktoren, Berlin, Springer Verlag 1966 (готовится русский перевод).

[24] Milnor I., On space having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc., v. 90, № 2 (1959), 272—280.

[25] Stashef I. A classification theorem for fibre spaces, Topology, v. 2, № 3 (1963).

[26] Grothendick A., Éléments de géometrie algébrique. III, Pub. Math. Inst. des Houtes Etudes, Paris, № 11 (1961).

[27] Araki S., Toda H., Multiplicativ structures in mod q cohomology theory. II, Osaka J. Math. v. 3, № 1 (1966), 81—120.

[28] Бухштабер В. М., Мищенко А. С. K-теория на категории CW-комплексов, Тезисы докладов пятой Всесоюзной топологической конференции, Новосибирск (1967), 7—10.