МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 1, № 3 (1967), 339—346

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ТИПА АДАМСА

А. С. Мищенко

§ 1. Общие замечания. Мы будем рассматривать категорию стабильных спектров топологических пространств, в дальнейшем именуемых просто *спектрами* (см., например, [1]). Пусть задана последовательность морфизмов

$$\ldots \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \ldots$$

и спектр Z. Тогда естественным образом определяется гомологическая спектральная последовательность (см. [3], стр. 400—403), r-й член которой равен

$$E_r^p = \operatorname{Im}([S^*Z,\ X_p/X_{p+r}] \to [S^*Z,\ X_p/X_{p+1}])/$$
$$/\operatorname{Im}([S^*Z,\ X_{p-r+1}/X_p] \to [S^*Z,\ X_p/X_{p+1}]).$$

Двойственным образом определяется и когомологическая спектральная последовательность.

Интересен случай, когда последовательность

$$[X_0,\ S^*W] \leftarrow [S^{-1}X_0/X_1,\ S^*W] \leftarrow [S^{-2}X_1/X_2,\ S^*W] \leftarrow \ldots$$

является свободной резольвентой $[W,\ S^*W]$-модуля $[X_0,\ S^*W]$. Легко видеть, что член E_2 равен $\operatorname{Ext}_{[W,\,S^*W]}([X_0,\ S^*W],\ [Z,\ S^*W])$ и поэтому поддается вычислению исходя только из знания алгебры $[W,\ S^*W]$ и модулей $[X_0,\ S^*W]$ и $[Z,\ S^*W]$.

Естественно ожидать, что вышеуказанная спектральная последовательность сходится к группе, присоединенной к группе $[S^*Z,\ X_0]$ (или к группе $[X,\ S^*Z]$ в двойственной ситуации). В случае $W = K[Z_p]$ Адамс [2] доказал сходимость когомологической спектральной последовательности к указанным группам. Мы рассмотрим другие спектральные последовательности, построенные по спектрам S^0, MU и некоторым другим.

§ 2. Основные конструкции. Дадим следующее определение. Последовательность спектров

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots \tag{1}$$

назовем *когомологической* W-резольвентой спектра X, если последовательность

$$[X_0/X_1, S^*W] \leftarrow [X_1/X_2, S^{*-1}W] \leftarrow \ldots \leftarrow [X_n/X_{n+1}, S^{*+n}W] \leftarrow \ldots \tag{2}$$

является свободной резольвентой $[W, S^*W]$-модуля $[X_0, S^*W]$, а спектры X_n/X_{n+1} являются суммами спектров S^kW.

Если отбросить первое условие, то последовательность (1) называется свободной последовательностью; если же последовательность (2) точна, то последовательность (1) называется ациклической последовательностью.

Пусть спектр W удовлетворяет условию самоизображаемости, а спектр X — условию нетеровости относительно спектра W.

Предложение 1*). *Для спектров W и X и любого n существуют реализации гомологической и когомологической W-резольвенты спектра X в размерностях $\leqslant n$.*

Предложение 2. *Пусть заданы W-свободная последовательность X_i спектра X, W-ациклическая последовательность Y_i спектра Y и морфизм $Y \to X$ в случае когомологических и $X \to Y$ в случае гомологических последовательностей. Тогда существуют морфизмы $Y_i \to X_i$ $(X_i \to Y_i)$, коммутирующие с исходными морфизмами последовательностей.*

Доказательство. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X/X_1 & & X \arrow[ll] \\
& Y \arrow[ul, "\bar{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

где $X/X_1 = \bigvee S^{n_i}W$. Тогда можно записать равенство $\bar{f} = \Sigma \bar{f}_i$, где $\bar{f}_i$: $Y \to S^{n_i}W$ — проекция на слагаемое. Поскольку отображение $[Y, S^*W] \leftarrow [Y/Y_1, S^*W]$ является эпиморфизмом, то существуют отображения $\bar{g}_i$: $Y/Y_1 \to S^{n_i}W$,

*) Этот результат доказан С. П. Новиковым.

причем $\varphi g_i = f_i$. Значит, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X / X_1 & \xleftarrow{\chi} & X & \xleftarrow{\varkappa} & X_1 \\ {\scriptstyle \bar{g}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ Y / Y_1 & \xleftarrow{\varphi} & Y & \xleftarrow{\psi} & Y_1 \end{array}$$

Поэтому $\bar{g}\varphi\psi = 0 = \chi f\psi$; следовательно, существует такое отображение f_1: $Y_1 \to X_1$, что $\varkappa f_1 = f\psi$. Далее доказательство проводится по индукции.

Предложение 3. *Пусть дан такой спектр* Z, *что* $\bigcap\limits_n \operatorname{Im}([S^*Z, X_n] \to [S^*Z, X_m]) = 0$. *Тогда гомологическая спектральная последовательность сходится к группе, присоединенной к* $[S^*Z, X_0]$. (См., например, [3], предложение 2.1 на стр. 385 и дальше.)

Это предложение можно обобщить следующим образом. Рассмотрим в категории абелевых групп два класса групп C_0 и C_1. Пусть выполнены условия: если $G_0 \in C_0$, $G_1 \in C_1$ и f: $G_1 \to G_0$ — гомоморфизм, то f — обязательно нулевой гомоморфизм; для любой группы G существует наибольшая подгруппа $(G)_0 \in G$, $(G)_0 \in C_0$; наконец, класс G удовлетворяет аксиоме 1 из работы [4] (стр. 125).

Предложение 4. *Пусть в условиях предложения* 3 *дано, что* $[S^*Z, X_m / X_{m+1}] \in C_1$ *и*

$$\bigcap_n \operatorname{Im}([S^*Z, X_n] \to [S^*Z, X_m]) = ([S^*Z, X_m])_0 \in C_0.$$

Тогда гомологическая спектральная последовательность сходится к группе, присоединенной к $[S^* Z, X_0]/(S^*Z, X_0)_0$.

Доказательство. В силу § 2 гл. XV книги [3] (стр. 384) надо доказать, что $Z^p_\infty = \bigcap\limits_r Z^p_r$, где

$$Z^p_\infty = \operatorname{Im}([S^*Z, X_p] \xrightarrow{\varphi} [S^*Z, X_p / X_{p+1}]),$$

$$Z^p_r = \operatorname{Im}([S^*Z, X_p / X_{p+r}] \xrightarrow{\varphi_r} [S^*Z, X_p / X_{p+1}]).$$

Ясно, что $Z^p_\infty \subset Z^p_r$. Пусть $0 \neq \alpha \in Z^p_r$; существует такой элемент $\beta \in [S^*Z, X_p / X_{p+1}]$, что $\varphi_r(\beta) = \alpha$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} {[S^*Z, X_p]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, "h"] & {[S^*Z, X_p / X_{p+1}]} \\ {[S^*Z, X_p / X_{p+r+s}]} \arrow[r, "l"] \arrow[d] & {[S^*Z, X_p / X_{p+r}]} \arrow[u, "\varphi_r"'] \arrow[d, "k"] \\ {[S^*Z, SX_{p+r+s}]} \arrow[r] & {[S^*Z, SX_{p+r}]} \end{tikzcd}$$

Если $\beta \overline{\in} \operatorname{Im} h$, то $k(\beta) \neq 0$. Более того, поскольку $[S^*Z, X_p/X_{p+r}] \in C_1$, то $k(\beta) \overline{\in} ([S^*Z, SX_{p+r}])_0$. Тогда существует такое число s, что $\beta \overline{\in} \operatorname{Im} l$. Далее уже ясно, что $\alpha \overline{\in} Z^p_{r+s}$. Вторая часть доказательства тривиальна.

Дадим следующее определение. Пусть задана W-свободная последовательность спектров $X \leftarrow \ldots \leftarrow \leftarrow X_n \leftarrow \ldots \leftarrow X_0$. Если для любого спектра Z имеем равенство $\bigcap\limits_n \operatorname{Ker}([X, S^* Z] \to [X_n, S^*Z]) = 0$, то спектр X назовем *W-комплексом*, а последовательность $\{X_n\}$ назовем *W-разбиением* спектра X. Например, всякий CW-комплекс является S^0-комплексом. Если задана W-свободная последовательность спектров $\ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots \leftarrow X_1 \leftarrow X_0$, причем X является топологическим прямым пределом последовательности $\{X_n\}$, то спектр X является W-комплексом.

§ 3. Алгебра стабильных гомотопических групп. Рассмотрим спектр $S^0_p = S^0 /_{f_p} S^0$, где f_p есть «умножение» на простое число p. Обозначим через Γ алгебру $[S^*S^0, S^0]$, а через Γ_p алгебру $[S^*S^0_p, S^0_p]$. Легко видеть, что группа Γ_p является p-примарной, значит, и любая группа $[S^*S^0_p, X]$ тоже является p-примарной.

Замечание в конце § 2 показывает, что верна

ТЕОРЕМА 1. *Для CW-комплекса X и спектра Y спектральная последовательность с членом*

$$E_2 = \operatorname{Ext}_\Gamma([S^*S^0, X], [S^*S^0, X])$$

сходится к группе, присоединенной к $[X, S^*Y]$.

Предложение 5. *Пусть целочисленные когомологии CW-комплекса X p-примарны. Тогда комплекс X является S^0_p-комплексом.*

Доказательство. Пусть $H^n(X) \neq 0$ и n минимально; тогда $H_{n-1}(X) \approx H^n(X)$. Итак, группа $\pi_{n-1}(X)$ является p-примарной. Рассмотрим подгруппу $G \subset \pi_{n-1}(X)$, состоящую из элементов порядка p. Существует базис в этой группе и, следовательно, отображение $\bigvee S^{n-1}_p \to X$, дающее в когомологиях эпиморфизм в размерности n. Порядок группы $H^n(X/\bigvee S^{n-1}_p)$ строго меньше порядка группы $H^n(X)$. Повторяя этот процесс, за конечное число шагов «убьем» группу H^n и перейдем к размерности $n+1$. Итак, построена последовательность $X \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots \leftarrow X_0$, у которой $\lim X_n \subset X$, и имеется изоморфизм в когомологиях $H^*(X) \approx H^*(\lim X_n)$. Значит, эти пространства слабо гомотопически эквивалентны.

Предложение 6. *Пусть X — некоторый CW-комплекс, Z—спектр, $\varphi\colon X \to Z$ — отображение, порядок которого равен p^S, $1 \leqslant S \leqslant +\infty$. Тогда существуют S_p^0-комплекс X' и такой морфизм $\psi\colon X' \to X$, что $\varphi\psi \neq 0$.*

Доказательство. Пусть f — такое число, что уравнение $p^f x = \varphi$ является неразрешимым. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ X & \xleftarrow{p^f} & X & \xleftarrow{\psi} & \overline{S}'(X/_{p^f}X) \end{array}$$

Ясно, что $\varphi\psi \neq 0$. Значит, спектр $X' = \overline{S}'(X/_{p^f}X)$ является искомым. Тот факт, что спектр X' является S_p^0-комплексом, вытекает из предложения 5. Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА 2. *Для CW-комплекса X и спектра Y спектральная последовательность с членом*

$$E_2 = \mathrm{Ext}_{\Gamma_p}([S^*S_p^0, X], [S^*S_p^0, Y])$$

сходится к группе, присоединенной к группе $[X, S^*Y]$, профакторизованной по подгруппе всех элементов, порядок которых взаимно прост с числом p.

Воспользуемся знанием алгебры Γ в малых размерностях для вычисления второго члена спектральной последовательности, сходящейся к алгебре целочисленных когомологий и когомологий mod 2. Алгебра Γ имеет следующие образующие и соотношения: в размерности 1 одна образующая h_1, $2h_1 = 0$; следующая образующая h_2 в размерности 3, $4h_2 = h_1^3$, $8h_2 = 0$. Далее, в размерности 7 образующая h_3, $16h_3 = 0$. В размерности 8 появляется новая образующая m, $2m = 0$. В размерности 9 стоят элементы $h_1 m$, $h_1^2 h_3 = h_2^3$; δ, $2\delta = 0$. Далее $h_1^2 m = 0$, $h_1\delta \neq 0$. И, наконец, в размерности 11 имеется образующая x, $h_1^2\delta = 4x \neq 0$.

Вычисления $E_2 = \mathrm{Ext}_\Gamma(Z, Z)$ дают следующие результаты (мы пишем только члены, отличные от нуля):

$$\begin{array}{ll} E_2^{2,1} = \{Sq^3\}, & E_2^{2,3} = \{{}^1/_2\, Sq^5\}, \\ E_2^{3,4} = \{Sq^7,\ Sq^5Sq^2\}, & E_2^{4,2} = \{(Sq^3)^2\}, \\ E_2^{4,4} = \{{}^1/_2\, Sq^5Sq^3\}, & E_2^{6,3} = \{(Sq^3)^3\}, \\ E_2^{6,5} = \{{}^1/_2\, Sq^5(Sq^3)^2\}, & E_2^{8,4} = \{(Sq^3)^4\}. \end{array}$$

Легко заметить, что дифференциал d_2 переводит элемент $^1/_2\, Sq^5$ в элемент Sq^3Sq^3, Sq^3 — в 0 и т. д. Это дает основание предполагать (см. [5]), что имеется вторичная когомологическая операция Φ такая, что $2\Phi = Sq^5$. Существуют также элементы, исчезающие только при третьем дифференциале, например элемент из члена $E_3^{2,7}$.

Рассмотрим теперь $\mathrm{Ext}_\Gamma(Z_2, Z_2)$. Вычисления дают следующие результаты. В группе Ext' стоят элементы, двойственные неразложимым элементам алгебры Γ, т. е. h_0, h_1, h_2, h_3, m, δ, x; первые четыре представляют операции Sq^1, Sq^2, Sq^4, Sq^8. В группах Ext^i, $i > 1$, стоят их композиции и произведения Масси. В частности, в группе $\mathrm{Ext}^{2,3}$ имеется элемент X, двойственный элементу $h_1 \otimes h_1^2 + h_1^2 \otimes h_1$. Поскольку операция $Sq^1Sq^4 + Sq^4Sq^1$ разложима на три сомножителя, то в группе $\mathrm{Ext}^{2,3}$ имеем соотношения $Sq^1Sq^4 = Sq^4Sq^1$. Дифференциал d_2 переводит элемент X в элемент $Sq^1Sq^2Sq^1Sq^2 + Sq^2Sq^1 \times \times Sq^2Sq^1$, элемент $Sq^1X = XSq^1$ — в элемент $Sq^1Sq^2Sq^1Sq^2Sq^1$ и т. д. Возникает вопрос: какую фильтрацию имеют операции Sq^{2^i}? Можно показать, что операция Sq^{16} имеет фильтрацию 2 (см., например, [6]) и двойственна элементу $h_3 \otimes 2h_3$. Можно также показать, что операция Sq^{32} имеет фильтрацию $\geqslant 3$.

§ 4. Сходимость спектральной последовательности для алгебры операций U-кобордизмов. Рассмотрим спектр $MU = \{MU(k)\}$, где $MU(k)$ — комплексы Тома канонических пучков над пространством $BU(k)$, см. [7]. Мы будем изучать гомологическую спектральную последовательность, т. е. спектральную последовательность, связанную со свободной MU-резольвентой спектра X.

Предложение 7. *Пусть целочисленные когомологии спектра X не имеют кручения и $[S^nS_0, X]$ — отличная от нуля группа минимальной размерности n. Пусть φ: $S^nS_0 \to X$, $\varphi \neq 0$. Тогда существует такое отображение f: $X \to S^nMU$, что $f\varphi \neq 0$.*

Для доказательства надо рассмотреть систему Постникова для спектра S^nMU. Все препятствия имеют конечный порядок. Значит, такое отображение существует.

Предложение 8. *Если целочисленные когомологии n-связного спектра X не имеют кручения, то спектр X является MU-комплексом.*

Доказательство. Пусть n_0 — такое наименьшее число, что $[S^{n_0}S^0, X] \neq 0$. Это свободная абелева группа. Выберем ее базис $x_1, \ldots, x_s$. Отобразим спектр X на $\bigvee\limits_{i=1}^{s} (S^{n_0}MU)_i$ так, чтобы образующая x_i перешла в образующую i-й компоненты группы $[S^{n_0}S^0, \bigvee S^{n_0}MU]$. Имеем точную последовательность

$$\ldots \to [S^{n_0}S^0, X_1] \to [S^{n_0}S^0, X] \to [S^{n_0}S^0, \bigvee S^{n_0}MU] \to 0,$$

причем φ является изоморфизмом. Значит, $[S^{n_0}S^0, X_1] = 0$. Может оказаться, что спектр X_1 уже будет иметь кручения в когомологиях. Выпишем точную последовательность в когомологиях:

$$0 \leftarrow H^{n_0+2}(X_1) \leftarrow H^{n_0+2}(X) \leftarrow H^{n_0+2}(\bigvee S^{n_0}MU) \leftarrow$$
$$\leftarrow H^{n_0+1}(X_1) \leftarrow H^{n_0+1}(X) \leftarrow H^{n_0+1}(\bigvee S^{n_0}MU) = 0.$$

Итак, если бы отображение $H^{n_0+2k}(\bigvee S^{n_0}MU) \to H^{n_0+2k}(X)$ было эпиморфизмом, то когомологии спектра X_1 были бы без кручения. Поскольку у спектральной последовательности, член E_2 которой равен $H^*(X, U^*(X))$, все дифференциалы тривиальны, то существует такое отображение $X \to \bigvee S^{n_0}MU \bigvee S^{n_i}MU$, где $n_i > n_0 + 1$, что указанный выше гомоморфизм будет эпиморфизмом. Далее строим последовательность по индукции.

Предложение 9. *Если у CW-комплекса X периодическая часть группы $H^*(X)$ находится только в конечном числе размерностей, то существует такая MU-свободная последовательность $X \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots$, что*

$$\bigcap_n \operatorname{Im}([S^*S^0, X_n] \to [S^*S^0, X]) = 0.$$

Доказательство. Достаточно построить такую последовательность, что для некоторого члена X_n его когомологии не имеют кручения. Пусть n_0 — такое наибольшее число, что $H^{n_0}(X)$ имеет кручение. Пусть X^{n_0-1} есть $(n_0 - 1)$-мерный остов пространства X. Рассмотрим отображение $X \to X/X^{n_0-1}$, причем пространство X/X^{n_0-1} уже не имеет кручения, а отображение $H^i(X) \leftarrow H^i(X/X^{n_0-1})$

является эпиморфизмом для $i \geqslant n_0$. Далее, существует отображение $X/X^{n_0-1} \to \bigvee MU$, эпиморфное в когомологиях. Итак, имеем отображение $X \to \bigvee MU$, причем в когомологиях оно эпиморфно в размерностях $i \geqslant n_0$. Пусть X_1 — «ядро» этого отображения. Имеем точную последовательность

$$\leftarrow H^{n_0+1}(\bigvee MU) \leftarrow H^{n_0}(X_1) \leftarrow H^{n_0}(X) \leftarrow H^{n_0}(\bigvee MU) \leftarrow .$$

Значит, группы $H^i(X_1)$ не имеют кручения для $i \geqslant n_0$. Через n_0 шагов мы получаем комплекс X_{n_0} без кручения в когомологиях.

Поскольку для любого спектра X и числа n существует отображение $f\colon X \to Y$, являющееся гомотопической эквивалентностью в размерностях $\leqslant n$, и когомологии Y не имеют кручения в размерностях $\geqslant n'$, то нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для любого CW-комплекса X существует спектральная последовательность, член E_2 которой равен* $\mathrm{Ext}_{[MU,\, S^*MU]}([X, S^*MU], [Y, S^*MU])$ *и которая сходится к группе, присоединенной к группе* $[S^*Y, X]$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 8.XII.1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Lima E. L., The Spanier — Whitehead duality in new homotopy categories, Summa brasil. math., 4 (1959), 91—148.
[2] Adams J. F., On the structure and application of the Steenrod algebra, Comment. math. helv., 32, № 3 (1958), 180—214.
[3] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., 1960.
[4] Серр Ж.-П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, сб. «Расслоенные пространства», М., 1958, стр. 124—159.
[5] Maunder C. R. F., Cohomology operations of the Nth kind, Proc. London Math. Soc. (3), 13 № 49 (1963), 125—154.
[6] Toda H., Composition methods in homotopy groups of spheres, Prinston, 1962.
[7] Новиков С. П., Гомотопические свойства комплекса Тома, Матем. сб., 57, № 4 (1962), 407—442.