1963 г. сентябрь—октябрь *т. XVIII, вып. 5 (113)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ПРИМЕР НЕПРИВОДИМОГО СОВЕРШЕННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НЕНОРМАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА НА НОРМАЛЬНОЕ

А. С. Мищенко

Вопрос о существовании таких отображений был поставлен П. С. Александровым в связи с известной теоремой В. И. Пономарёва о том, что всякое вполне регулярное пространство Y есть неприводимый совершенный [1]) образ вполне регулярного пространства X, того же веса, нульмерного в смысле $\operatorname{ind} X = 0$. В этой заметке будет построено даже такое неприводимое замкнутое непрерывное отображение f ненормального хаусдорфова нульмерного в смысле $\dim$ пространства X на нормальное пространство Y, при котором прообразы $f^{-1}y$ всех точек $y \in Y$ являются множествами, состоящими не более чем из двух точек. Пусть α_0 — какое-нибудь порядковое число; обозначим через $TW(\alpha_0)$ пространство всех порядковых чисел $\alpha < \alpha_0$ в обычной (порядковой) топологии. Положим $X = TW(\omega_1 + 1) \times TW(\omega_1)$.

1. Пространство X, очевидно, хаусдорфово; оно не нормально. В самом деле, пусть $F_1 = \{(x, y) : x = \omega_1\}$, $F_2 = \{(x, y) : x = y\}$. Множества F_1 и F_2 замкнуты и дизъюнктны. Пусть $G_1 \supseteq F_1$ и $G_2 \supseteq F_2$ — произвольные окрестности множеств F_1 и F_2. Пусть $z = (x, x)$ — произвольная точка множества F_2. Тогда существует такое $y_x < x$, что окрестность $(y_x, x] \times (y_x, x] \subseteq G_2$. Можно найти такое y_0, что неравенство $y_x < y_0$ имеет место для несчетного множества $M \subseteq F_2$. Так как точка $(\omega_1, y_0) \in F_1$, то существуют такие y_0^* и x_0, что окрестность $(x_0 \omega_1] \times (y_0^*, y_0] \subseteq G_1$, откуда и вытекает, что $G_1 \cap G_2 \neq \Lambda$. Ненормальность пространства X этим доказана.

2. Рассмотрим следующее разбиение $\{A\}$ пространства X: если $x < \omega_1$ — предельная точка, то множество, состоящее из двух точек $\{(x, x), (\omega_1, x)\}$, объявляется элементом разбиения. Все остальные элементы разбиения состоят из одной точки. Это разбиение непрерывно.

Для доказательства рассмотрим четыре случая.

1°. Точка $z = (x, y) \in X \setminus (F_1 \cup F_2)$. Множество $X \setminus (F_1 \cup F_2)$ открыто и является объединением одноточечных элементов разбиения. Тогда любая окрестность $O_z \subset X \setminus (F_1 \cup F_2)$ является отмеченной.

[1]) Отображение $f : X \to Y$ называется совершенным, если оно непрерывно, замкнуто и бикомпактно в том смысле, что прообразы $f^{-1}y$ всех точек $y \in Y$ суть бикомпактные подпространства пространства X. Отображение f пространства X на пространство Y называется неприводимым, если X не содержит никакого замкнутого $A \neq X$, для которого было бы $fA = Y$.

2°. $z=(\omega_1, x)$ и x не предельная точка. Для любой окрестности Oz существует такое $x^* > x$, что $Vz=(x^*, \omega_1] \times \{x\} \subset Oz$ есть отмеченная окрестность.

3°. $z=(x, x)$ и x не предельная точка. Тогда точка является открытым множеством и, следовательно, отмеченной окрестностью.

4°. Пусть x — предельная точка, $A=\{(x, x), (\omega_1, x)\}$ и OA — окрестность элемента разбиения A. Тогда существуют такие $x' > x$, $x'' > x$, что $VA = (x', x] \times (x', x) \bigcup (x'', \omega_1] \times (x', x] \subseteq OA$ — отмеченная окрестность.

3. Обозначим через φ естественное отображение пространства X на пространство φX разбиения $\{A\}$. Это замкнутое непрерывное отображение. Покажем, что отображение φ неприводимо. Для этого достаточно показать, что любое непустое открытое множество G содержит непустое отмеченное множество. Пусть $z=(x, y) \in G$. Существуют такие x^*, y^*, что $(x^*, x] \times (y^*, y] \subseteq G$. Возьмем такие непредельные x_0, y_0, что $(x_0, y_0) \in G$. Тогда множество, состоящее из единственной точки (x_0, y_0), является открытым отмеченным множеством, лежащим в G.

4. Покажем, наконец, что пространство φX нормально. Пусть Φ_1 и Φ_2 — замкнутые непересекающиеся множества пространства φX. Через F_1 и F_2 обозначим прообразы множеств Φ_1 и Φ_2: $F_1=\varphi^{-1}\Phi_1$, $F_2=\varphi^{-1}\Phi_2$. Покажем, что существует такое $x_0 < \omega_1$, что множество $(x_0, \omega_1] \times (x_0, \infty)$ не пересекается с одним из множеств $F_i \, (i=1, 2)$. Допустим, что это не так. Это означает, что для любого $x < \omega_1$ существуют такие $x' > x$ и $x'' > x$, что $(x', x') \in F_1$, $(x'', x'') \in F_2$. Обозначим через y большее из x' и x''. Число y есть функция от x: $y=y(x)$. Положим $y_1=y(1)$, $y_n=y(y_{n-1})$. Пусть число y_0 есть предельное для последовательности $\{y_n\}$. По определению числа y_n существуют такие x_n' и x_n'', что $y_{n-1} < x_n' \leqslant y_n$, $y_{n-1} < x_n'' \leqslant y_n$ и $(x_n', x_n') \in F_1$, $(x_n'', x_n'') \in F_2$. Последовательности точек $\{(x_n', x_n)\}$ и $\{(x_n'', x_n'')\}$ стремятся к точке (y_0, y_0). Так как F_1 и F_2 замкнуты, то $(y_0, y_0) \in F_1 \bigcap F_2$, что противоречит предположению. Пусть, например, F_1 не пересекается с множеством $(x_0, \omega_1] \times (x_0, \infty)$. Пространство X можно представить в виде объединения открыто-замкнутых множеств $X=[1, \omega_1] \times [1, x_0] \bigcup [1, x_0] \times (x_0, \infty) \bigcup (x_0, \omega_1] \times (x_0, \infty) = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$. Все три слагаемые суть отмеченные множества, первые два — нормальные пространства, а последнее пересекается, быть может, только с одним множеством F_2. Поэтому существуют непересекающиеся окрестности $G_1 \supseteq F_1$ и $G_2 \supseteq F_2$. Так как разбиение $\{A\}$ непрерывно, то существуют отмеченные непересекающиеся окрестности G_1' и G_2' множеств F_1 и F_2, так что $G_1 \supseteq G_1' \supseteq F_1$ и $G_2 \supseteq G_2' \supseteq F_2$. При отображении φ множества G_1' и G_2' переходят в непересекающиеся окрестности множеств Φ_1 и Φ_2, чем нормальность пространства φX доказана.

В заключение приношу благодарность руководителю П. С. Александрову.

Поступило в редакцию 27 апреля 1962 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Пономарёв, Нормальные пространства как образы нульмерных, ДАН 132, № 6 (1960), 1269—1272.