Научная школа по некоммутативной геометрии и топологии.

А.С.Мищенко

12 ноября 2004 г.

1 Область научных исследований

Во второй половине прошлого столетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это название группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулирования топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций.

Хотя эта идея очень старая (восходит к ключевой теореме Гельфанда–Наймарка о взаимно однозначном соответствии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^*-алгебр) и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном, так и в некоммутативном случае, в более или менее явной форме она была провозглашена в виде программы действия А.Коном в его книге "Некоммутативная геометрия"[23].

Идея рассматривать, наряду с коммутативными C^*-алгебрами (которые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах ее максимальных идеалов), также и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем «некоммутативном» пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила соединить воедино многообразие представлений и методов из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе и взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Одна из классических задач в гладкой топологии, заключающаяся в описании топологических и гомотопических свойств характеристических классов гладких и кусочно-линейных многообразий, за это время приобрела практически завершенный вид исключительно благодаря тому, что к ней были применены разнообразные методы функционального анализа. И, наоборот, попытки осмыслить и решить классические топологические задачи привели к обогащению методов функционального анализа. Как это типично происходит, решение одних частных задач привело к открытию новых горизонтов в развитии математических методов и открытию новых свойств классических математических объектов.

2 История становления и развития научной школы

2.1 От двойственности Пуанкаре до формулы Хирцебруха.

Характеристические классы Понтрягина не являясь гомотопическими инвариантами, тесно связаны с задачей описания гладких структур данного гомотопического типа. Поэтому задача отыскания всех гомотопически инвариантных характеристических классов Понтрягина рассматривалась как актуальная задача. В действительности более естественной оказалась другая задача. Характеристические классы Понтрягина, разумеется, являются инвариантами гладкой структуры на многообразии. С точки зрения классификации гладких структур и ее методов наиболее подходящим отношением эквивалентности между многообразиями является не гладкая структура, а так называемые внутренние гомологии многообразий, или в современных терминах бордизмы многообразий.

Еще Л.С.Понтрягин предположил [?], что внутренние гомологии описываются некоторыми алгебраическими выражениями от характеристических классов Понтрягина — чисел Понтрягина, и, установил, что по крайней мере характеристические числа Понтрягина являются инвариантами внутренних гомологий [?, теорема 3] . С помощью теории перестроек гладких многообразий (В.Браудер, С.П.Новиков) было доказано, что единственным гомотопическим инвариантом является характеристическое число Понтрягина, совпадающее с сигнатурой ориентированного компактного многообразия, построенной по двойственности Пуанкаре.

Формула, которая осуществляет совпадение сигнатуры многообразия с определенным характеристическим числом Понтрягина, известна сейчас как формула Хирцебруха [?], хотя некоторый ее частный случай был получен еще В.А.Рохлиным [?] годом ранее. Изучение двойственности Пуанкаре и формулы Хирцебруха, отражающей ее свойства, имеет длинную историю, которая отчасти связана со становлением некоммутативной геометрии и работами Московской топологической школы второй половины 20-го столетия.

Начало этой истории было положено еще в знаменитой работе А.Пуанкаре 1895 г. [?], где, в частности, впервые сформулирована теорема, известная теперь как двойственность Пуанкаре для замкнутых ориентированных многообразий. И хотя завершенная формулировка и полное доказательство двойственности Пуанкаре были представлены намного позднее, вне всякого сомнения можно считать, что Пуанкаре был родоначальником разветвленной теории, в которой двойственность Пуанкаре играет ключевую роль.

Конечно, под двойственностью Пуанкаре понимал более упрощенное утверждение. Он говорил о совпадении чисел Бетти, "равноотстоящих от концов" [?, с. 490], однако под числами Бетти P_k понимал (см. там же, **S**6, с. 470-471) число линейно независимых подмногообразий размерности k. Если понимать слова Пуанкаре буквально, то независимость подмногообразий $v_1, v_2, \ldots, v_p$ предполагает, что эти подмногообразия попарно не пересекаются. Более того, по–видимому, они должны иметь нормальное расслоение с нулевым Эйлеровым классом, по крайней мере в том случае, когда целочисленный коэффициент в линейной комбинации $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p$ отличается от ± 1, поскольку Пуанкаре требует, чтобы каждое подмногообразие v_j мало отличалось от k_j компонент полной границы другого подмногообразия на единицу большей размерности. В любом случае понятие чисел Бетти требовало уточнения, которое и сделал сам Пуанкаре в своих последующих дополнениях [?].

В том же томе приведена речь П.С.Александрова, произнесенная им на торжественном выездном заседании Международного математического конгресса, посвященном столетию со дня рождения Пуанкаре (Амстердам, 1954). П.С.Александров исключительно точно охарактеризовал роль Пуанкаре в создании теории гомологий, так что не остается ничего другого, как просто привести его слова: "Вернемся к введенному Пуанкаре понятию гомологии. Как уже было упомянуто, это понятие было введено в первом топологическом мемуаре Пуанкаре - в знаменитом "Analysis situs"интуитивным образом. Однако в данном случае этот недостаточно строгий подход имел, так сказать, и фактические последствия, послужившие поводом к обоснованной критике норвежского математика Хегора (Heegard). Дело в том, что в своем первом мемуаре Пуанкаре не обратил должного внимания на феномен кручения, ограничившись в основном числами Бетти. Но он блестяще восполнил допущенный пробел в своих последующих публикациях по топологии (в "Дополнениях к Analysis situs"). При этом Пуанкаре стал на комбинаторную точку зрения, введя понятие симплициального разбиения (триангуляции) многообразия, т. е. понятие симплициального комплекса, и создал таким образом основной метод комбинаторной топологии"[?, с. 813].

Конечно, в дальнейшем потребовалось открыть группы гомологий (Э.Нетер, 1925), группы когомологий (Дж.Александер, А.Н.Колмогоров, 1934), двойственность между ними (Л.С.Понтрягин). Но, пожалуй, самым значительным событием в изучении топологических инвариантов многообразий явилось открытие характеристических классов (Штиффель, Уитни (1935); Понтрягин (1947); Черн (1948)). Все было подготовлено, таким образом, к тому, чтобы связать воедино инварианты, выражающие двойственность Пуанкаре, и интегральные инварианты характеристических классов.

Эта связь известна сейчас как формула Хирцебруха. Формула Хирцебруха дает прекрасный пример применения категорного метода — одного из основных инструментов в алгебраической и дифференциальной топологии. В самом деле, Пуанкаре, кажется, уже сказал все, доказав совпадение чисел Бетти многообразия, равноотстоящих от концов. После того, как было введено понятие групп гомологий, двойственность Пуанкаре стала звучать как совпадение рангов соответствующих групп гомологий. При этом для чисел Бетти не имело значения, какие группы гомологий рассматривались — целочисленные или рациональные, поскольку ранг целочисленных групп гомологий совпадает с размерностью групп гомологий над полем рациональных чисел. Однако понятие групп гомологий позволило обогатить двойственность Пуанкаре и рассмотрением групп гомологий с коэффициентами в конечных полях. По существу это уже знал и сам Пуанкаре, который исследовал кручения в гомологиях многообразия.

Таким образом, совпадение чисел Бетти можно интерпретировать как изоморфность групп гомологий с рациональными коэффициентами. Учет кручений тоже должен был дать изоморфность некоторых групп. Но это не группы гомологий, поскольку кручения совпадают, но не в тех размерностях, что числа Бетти. Это кажущееся несоответствие было понято только после того, как были открыты группы когомологий и их дуальность к группам гомологий. Таким образом, окончательно двойственность Пуанкаре стала звучать как изоморфность между группами гомологий и группами когомологий дополнительной размерности

$$H_k(M;Z) = H^{n-k}(M;Z). \tag{1}$$

Ключевым соображением в этом изоморфизме является то, что это не просто абстрактный изоморфизм групп, а изоморфизм, порождаемый естественными операциями в категории многообразий, точнее, в категории топологических пространств. Например, в одном частном случае, когда рассматриваются гомологии в средней размерности четномерного многообразия ($\dim M = n = 2m$) с рациональными коэффициентами, условие (1) становится тривиальным, поскольку

$$H^m(M;Q) = \mathbf{Hom}(H_m(M;Q), Q) \equiv H_m(M;Q). \tag{2}$$

Однако в равенстве (2) изоморфизм между группами гомологий и группами когомологий выбирается не однозначно. Двойственность же Пуанкаре гласит, что существует вполне определенный гомоморфизм, так называемый гомоморфизм пересечения с циклом $[M]$

$$\cap_{[M]} : H^{n-k}(M;Q) \longrightarrow H_k(M;Q),$$

который и задает изоморфизм двойственности Пуанкаре. Это значит, что с многообразием M можно связать невырожденную квадратичную форму, обладающую дополнительным инвариантом — сигнатурой квадратичной формы, которая играет во многих проблемах дифференциальной топологии ключевую роль.

Именно с исследованием сигнатуры многообразий и формулы Хирцебруха, описывающей ее в терминах характеристических классов Понтрягина, связано большое научное направление, которое развивалось в Московской топологической школе во второй половине прошлого столетия и которое послужило одним из источником развития некоммутативной геометрии и топологии. Руководителем этой школы является профессор А.С.Мищенко, который на протяжении 40 лет собрал большой коллектив ученых, развивающих некоммутативную геометрию и топологию. Среди этого коллектива следует отметить его учеников профессоров Соловьева Ю.П., Е.В.Троицкого, В.М.Мануйлова, занимающих ведущие позиции в исследованиях, и их учеников.

2.2 Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.

Эта группа вопросов посвящена нахождению по возможности наиболее полной системы инвариантов гладких многообразий без учета каких либо дополнительных структур, оснащающих многообразие. Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффициентов и определяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий бесспорно является наиболее существенным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий, в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а также потому, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом по модулю конечного числа возможностей.

Однако, система характеристических классов является, в некотором смысле, переопределённой системой данных. Более строго, это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому, одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса, т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразии. Наиболее часто встречающимися в топологии отношениями эквивалентности между многообразиями являются кусочно-линейные гомеоморфизмы, непрерывные гомеоморфизмы, гомотопические эквивалентности. Для этих отношений эквивалентностей проблема формулируется следующим образом: какие характеристические классы являются: а) комбинаторно инвариантными, б) топологически инвариантными, в) гомотопически инвариантными?

Ограничиваясь характеристическими рациональными классами Понтрягина, отметим, что в 1965 г. С.П.Новиков доказал, что все рациональные классы Понтрягина являются топологическим инвариантами. В случае же гомотопической инвариантности характеристических классов Понтрягина эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время. С другой стороны, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов представляется достаточно важной проблемой в силу того, что гомотопический тип многообразия представляется более доступным для классификации, по сравнению с его топологическим типом. Более того, существующие методы классификации гладких структур на многообразии сводят эту проблему к описанию гомотопического типа многообразия и к его гомологическим инвариантам.

Таким образом, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов в различных математических школах представлялась как одна из существенных проблем в дифференциальной топологии. Проблема гомотопической инвариантности рациональных классов Понтрягина оказалась наиболее интересной (и, возможно, наиболее трудной) с точки зрения взаимосвязей. Важность этой проблемы вытекает, в частности, из того, что в задаче классификации гладких структур на многообразии с помощью метода перестроек Морса необходимо иметь описание всех гомотопически инвариантных классов Понтрягина.

В случае односвязных многообразий еще Новиковым и Браудером на основании формулы Хирцебруха было доказано, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что является следствием гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером методом перестроек Морса, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является только классическая сигнатура многообразия. Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью решена в классических работах 60-х годов.

Для неодносвязных многообразий задача об описании гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина, отвечающих за препятствия к перестройке нормальных отображений до гомотопической эквивалентности, оказалась намного труднее, поскольку существенную роль здесь играет структура фундаментальной группы многообразия. Это обстоятельство наряду с тем, что описание и распознавание фундаментальной группы в конечных терминах, как известно, невозможно, в отличие от других топологических проблем вызывает дополнительный интерес к этой проблеме. Для некоторых простых случаев, когда фундаментальная группа является свободной абелевой задачу можно было решить чисто дифференциально-геометрическими методами, используя технику так называемых внутренних перестроек. Такое решение тоже было представлено в Московской топологической школе Г.Г.Каспаровым.

В общем же случае оказалось, что задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина может быть сведена к проверке того, что так называемые высшие сигнатуры являются гомотопически инвариантными. Точная формулировка этой проблемы известна под названием гипотезы Новикова. Положительное ее решение позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии. Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\mathrm{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$– отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, – является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\mathrm{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\mathrm{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M.

Ситуация с неодносвязыми многообразиями оказывается совершенно отличная от случая односвязных многообразий, несмотря на то, что Уолл построил неодносвязный аналог теории перестроек Морса. Однако препятствия к таким перестройкам не имеют достаточно эффективного описания. Один из способов обойти эту трудность заключается в том, чтобы выяснить, какие из рациональных характеристических классов неодносвязных многообразий являются гомотопическими инвариантами. В 1970 А.С.Мищенко установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры.

Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. Это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению нормальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом кольце $Q\pi$.

Проблема описания гомотопически инвариантных характеристических классов является одой из наиболее интересных проблем в дифференциальной топологии на протяжении последних 25 лет. Попытки решения этой проблемы породили многочисленные исследования, приведшие к открытию глубоких результатов как в самой топологии, так и в смежных математических дисциплинах, таких как теория представлений, K-теория, банаховы алгебры и модули, теория эллиптических операторов, и к созданию самостоятельного направления под названием некоммутативная геометрия.

2.3 Алгебраические комплексы Пуанкаре.

Первая трудность, которую необходимо было преодолеть при изучении неодносвязных перестроек многообразий, заключалась в том, что когомологии неодносвязных многообразий с универсальной локальной системой коэффициентов не обладают двойственностью Пуанкаре, точнее двойственность Пуанкаре не имеет вида невырожденной квадратичной формы. Причина этого заключается в том, что модули гомологий неодносвязного многообразия не являются вообще говоря проективными. Еще в 1970 году в ([5],[6]) А.С.Мищенко преодолел эту алгебраическую трудность и нашел универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемую симметрическую сигнатуру $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры.

Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что симметрическая сигнатура является гомотопическим инвариантом и инвариантом бордизмов многообразий, сохраняющих фундаментальную группу. Там же было показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. В частности это означает, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению нормальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом кольце $Q\pi$.

На основании развитой им алгебраической техники так называемых алгебраических комплексов Пуанкаре А.С.Мищенко показал ([7]), что теория перестроек гладких многообразий по существу зависит не столько от гладкости многообразия, сколько от гомотопической структуры пространства. Он доказал, что препятствие к перестройке нормального отображения до гомотопической эквивалентности гладких многообразий обобщаются до категории геометрических комплексов Пуанкаре. Таким образом А.С.Мищенко были найдены формулы для описания препятствия к перестройке в виде некоторого характеристического числа со значением в когомологиях многообразия с универсальной локальной системой коэффициентов, порожденной естественным вложением фундаментальной группы в ее групповое кольцо. Однако полученные формулы были еще далеки от эффективности, поскольку кольцо коэффициентов могло быть выражено лишь в терминах эрмитовой K-теории.

2.4 Фредгольмовы представления.

В 1974–1975 гг. ([8],[9]) А.С.Мищенко применил метод теории фредгольмовых представлений, позволивший ему установить гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. Применение теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном векторном пространстве. Однако запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений слишком беден, и для многих фундаментальных групп сводится только к классической сигнатуре.

Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, которые, с одной стороны, расширили запас представлений, а, с другой, сохраняли естественные свойства конечномерных представлений. Этот бесконечномерный аналог представлений заключается в новой теоретико-функциональной конструкции в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмова оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*-алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертова пространства H, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов.

Существенным шагом было построение канонического векторного расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$ с помомощью фредгольмова представления группы π. Для применения фредгольмовых представлений к формулам Хирцебруха А.С.Мищенко ([9]) потребовалось установить возможность переходить от семейства фредгольмовых представлений к единичному представлению с тем же самым характером Чженя. Теория фредгольмовых представлений позволила доказывать гипотезу Новикова не только для указанного класса фундаментальных групп. Ученик А.С.Мищенко Ю.П.Соловьев применил разработанную технику фредгольмовых представлений для дискретных подгрупп алгебраических групп с помощью комплексов Брюа–Титса ([24]).

Теория фредгольмовых представлений в 1995 году была распространена А.С.Мищенко ([15]) на случай непрерывных семейств, контролируемых на бесконечности, что позволило применить аналогичную технику и для таких фундаментальных групп, классифицирующие пространства которых не обязательно компактны. Более того им ([16]) была предложена общая схема метрического подхода к построению фредгольмовых представлений фундаментальной группы, которая сводит задачу к построению специального пополнения классифицирующего пространства и решению уже чисто гомотопической задачи на последнем.

Теория фредгольмовых представлений, построенная в работах А.С.Мищенко, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*-алгебр в виде некоторого варианта топологической K-теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. А.С.Мищенко совместно с Ю.П.Соловьевым ([17]) разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуканкаре. Таким образом, с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не действует.

Многие результаты, полученные в школе, носят принципиальный концептуальный характер, которые определили направление развития некоммутативной геометрии и топологии. Наиболее значимые понятия, введенные и разработанные в Московской школе достаточно подробно отражены в книге А.Кона [23]. Во-первых это так называемые алгебраические комплексы Пуанкаре и симметрическая сигнатура неодносвязных многообразий, строящаяся на их базе.

А.Кон в своей книге по этому поводу пишет [23][стр. 9]: "В 1970 году Мищенко построил эквивариантную сигнатуру неодносвязных многообразий как элемент группы Уолла группового кольца. . . .

Следуя этой (Люстига) линии и при помощи ключевого использования C^*–алгебр, Мищенко удалось доказать гомотопическую инвариантность высших сигнатур в предположении, что классифицирующее пространство $B\Gamma$ фундаментальной группы Γ является компактным многообразием с римановой метрикой неположительной кривизны. Причина, почему C^*–алгебры здесь играют ключевую роль, заключается в следующем. Группы Уолла инволютивной алгебры (такие, как групповые кольца) классифицируют эрмитовы квадратичные формы над такими алгебрами, и их вычисление более трудное по сравнению с K группами конечных проективных модулей. Однако, как было показано Гельфандом и Мищенко, эти группы совпадают, когда инволютивная алгебра является C^*–алгеброй. Это равенство не имеет места для произвольных банаховых инволютивных алгебр. Но поскольку групповое кольцо дискретной группы может быть канонически пополнено до C^*–алгебры, то можно получить эквивариантную сигнатуру неодносвязного многообразия как элемент K группы этой C^*–алгебры".

Во-вторых, это открытие фредгольмовых представлений. Спустя пол века было понято, что класс фредгольмовых представлений является частным случаем представлений групп и, более общим образом, алгебр в некоторые C^*–алгебры. Но специфика фредгольмовых представлений до настоящего времени сохраняется и состоит в том, что эти представления обладают естественными числовыми инвариантами, аналогичными инвариантам конечномерных представлений компактных групп. А.Кон ([23][стр. 10]) пишет: "Мищенко пошел дальше и использовал двойственную теорию (именно, K–гомологии) в образе фредгольмовых представлений фундаментальной группы, чтобы получить числовые инварианты при помощи спаривания с K– теорией.

Таким образом K–теория крайне некоммутативной C^*–алгебры фундаментальной группы играет ключевую роль в решении классических задач в теории неодносвязных многообразий.

K–теория C^*–алгебр. теория расширения Брауна, Дугласа и Филмора, L–теория Атья и фредгольмова представления Мищенко — все они являются частными случаями биинвариантной KK–теории Каспарова ... "И далее (стр. 84): "Имеется одно ключевое свойство K–теории C^*–алгебр, которое существенно отличается от случая общих банаховых алгебр. Это отличие было открыто Мищенко ([**?**][1979])

Далее, ключевую роль в геометрических конструкциях играет линейное универсальное расслоение для произвольной дискретной группы. У Кона написано (стр. 97): "Наиболее простое описание отображения $\mu : K_*(B\Gamma) \to K_*(C^*(\Gamma))$ основано на существование для каждого компакта K в $B\Gamma$ канонического "линейного расслоения Мищенко",

$$\updownarrow_K \in K_0(C(K) \otimes C^*(\Gamma)),$$

которое описывается в виде конечного проективного C^*–модуля над алгеброй $C(K)\otimes C^*(\Gamma)\dots$"

Наконец, определяющим развитие некоммутативной геометрии оказалось построение теории эллиптических операторов над произвольной C^*–алгеброй. Важность этих результатов наглядно подтверждается и тем, что они зачастую беззастенчиво приписываются на западе другим авторам, чтобы обеспечить недобросовестную конкуренцию за счет снижения индекса цитирования (см. на пример, книгу Веге-Ольсена, в которой целая глава посвящена одной теореме, разработанной в Московской научной школе по некоммутативной геометрии и топологии).

3 Направления исследований на современном этапе

В Московском университете в научной школе по некоммутативной геометрии исследования интенсивно проводятся преимущественно в следующих направлениях:

- Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.
- Алгебраические комплексы Пуанкаре.
- Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха;
- Теория индекса и псевдодифференциальные операторы;
- Теория C*-алгебр и гильбертовых модулей;
- Неклассические представления дискретных групп;
- Циклические и диэдральные гомологии;
- Характеристические классы в некоммутативной геометрии.

4 Достижения научной школы по некоммутативной геометрии и топологии

Исследования в области некоммутативной геометрии и топологии в Московской топологической школе получили международное признание. Начиная с 92-го года по указанной тематике было опубликовано более 100 публикаций в российских и зарубежных журналах. Среди них ряд книг как учебного ([1], [2], [3], [4]) так и монографического характера ([20],[26], [25]). По тематике, созданной в научной школе проводятся международные конференции, примером которой может служить конференция в Обервольфахе (Германия) в 1993 году.

В журнале Acta Applicandae Mathematicae издан специальный том, посвященный исследованиям по некоммутативной геометрии в Московской топологической школе ([38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45],[48] [49]). Члены научного коллектива под руководством А.С.Мищенко приняли участие в многочисленных российских и международных конференциях; в 2001 году при поддержке РФФИ была проведена специальная международная конференция в Москве, посвященная 60-летию со дня рождения А.С.Мищенко. В 2004 году ученые школы организовали международную конференцию по C^*–алгебрам и эллиптической теории, которая имела место в центре имени Стефана Банаха в Бедлево (Польша).

Учеными школы получено ряд стипендий ДААД и общества Макса Планка, гранты фондов Сороса и INTAS. С 1994 г. по настоящее время ученые школы постоянно получают гранты фонда РФФИ, фонда "Российские университеты". С 2003 года научная школа получила грант Президента РФ поддержки научных школ. Руководителю А.С.Мищенко в 1996 году была присуждена Государственная Премия Российской Федерации в области науки и техники (совместно с А.Т.Фоменко) за цикл работ "Исследование инвариантов гладких многообразий и гамильтоновых динамических систем".

4.1 Асимптотические и почти представления.

Очень плодотворной для некомпактных групп оказалась идея рассматривать вместо представлений некоторые более общие отображения в алгебру операторов, которые, с одной стороны, увеличивают свободу маневра, а, с другой, сохраняют основные черты представлений, необходимых для применения их в топологических задачах. Источником такого сорта идей послужили, с одной стороны чисто физические соображения, которые заключаются в том, что любая наблюдаемая симметрия явления, а вместе с ней и некоторый закон сохранения, в действительности проявляется неточно. Поэтому естественно возникает вопрос распознавания по неточной симметрии истинной симметрии.

Эта задача известна еще со времен Халмоша и его задачи о паре почти коммутирующих унитарных операторов. Если операторы действуют в конкретном конечномерном пространстве, то при условии достаточной близости почти коммутирующих унитарных операторов их можно аппроксимировать точно коммутирующими операторами. Совершенно иная ситуация имеет место в случае бесконечномерных пространств или даже в случае равномерных оценок коммутаторной невязки, не зависящих от размерности пространства. Как показал Войкулеску, существует последовательность почти коммутирующих пар унитарных операторов со стремящимся к нулю коммутатором (так называемая пара Войкулеску), которые нельзя сколь угодно близко аппроксимировать последовательностью пар коммутирующих операторов.

С точки зрения теории представлений групп это наблюдение может быть истолковано как построение асимптотического представления свободной абелевой группы с двумя образующими, которое не сводится к точному представлению.

Другой вариант обобщения представлений на случай неточных соотношений дает понятие квазипредставлений, в которых предполагается равномерная оценка норм соотношений в группе. В этом случае, как показал А.Штерн, ситуация прямо противоположная, что позволило создать стройную теорию квазипредставлений и квазихарактеров.

В статье [31] найдена связь между асимптотическими представлениями дискретной группы и фредгольмовыми представлениями этой группы. Для этого построена новая C*-алгебра, обслуживающая асимптотические представления дискретных групп и C*-алгебр с конечным числом порождающих элементов, и найден способ ее вложения в алгебру Калкина такой, что индуцированный этим вложением гомоморфизм K_1-групп является изоморфизмом. Благодаря наличию такого вложения асимптотические представления пропускаются через представления в алгебру Калкина. Как следствие, показано, что векторные расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$, которые могут быть получены с помощью асимптотических представлений дискретной группы π, могут быть также получены с помощью представлений группы $\pi \times \mathbf{Z}$ в алгебру Калкина. Найдено также обобщение понятия фредгольмова представления и показано, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления. Найдены примеры дискретных групп, не обладающих достаточным запасом асимптотических представлений, что показывает, что класс фредгольмовых представлений строго больше класса асимптотических представлений.

На основе введенного А.С.Мищенко понятия дискретизации асимптотических гомоморфизмов правое обратное отображение к отображению Конна–Хигсона построено В.М.Мануйловым для общих сепарабельных C*-алгебр. В.М.Мануйловым и К.Томсеном сформулировано понятие асимптотически расщепимого расширения C^*-алгебр, и дана конструкция, которая определяет E-функтор Конна–Хигсона в терминах, аналогичных определению KK-функтора Каспарова. Единственным различием является то, что вместо вполне положительных отображений для расщепления используются асимптотические гомоморфизмы. При этом показано, что функтор Ext всех расширений содержит E-функтор как прямое слагаемое. Доказано, что любой асимптотический гомоморфизм в алгебру Калкина гомотопен настоящему гомоморфизму.

Этот факт удивителен, так как в ранее известных примерах асимптотических гомоморфизмов существенно больше, чем настоящих (с точностью до гомотопии). Это свойство алгебры Калкина дает возможность доказать, что функторы Ext и E совпадают в большинстве случаев. В [33] найден важный пример конечно представленной группы, показывающий, что асимптотических представлений строго меньше, чем фредгольмовых. Именно, показано, что для найденной группы Γ естественное отображение из группы асимптотических представлений в группу $K_0(B\Gamma)$ является тривиальным с точностью до кручения, в то время как аналогичное отображение из группы фредгольмовых представлений накрывает свободную образующую $K_0(B\Gamma)$.

При исследовании обнаруженного примера удалось сформулировать новое свойство конечно порожденных групп, связанное с почти представлениями: группа называется асимптотически устойчивой, если любое достаточно точное ее почти представление может быть включено в асимптотическое представление. Доказано, что, наряду с группами, очевидно обладающими этим свойством (свободными, абелевыми), этим свойством обладают также фундаментальные группы ориентированных поверхностей. Представляется любопытным, что группа Γ указанным свойством не обладает.

4.2 Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха.

Известная формула Хирцебруха утверждает, что для $4k$–мерного ориентируемого компактного замкнутого многообразия X имеет место равенство

$$\mathrm{sign} X = 2^{2k} \langle L(X), [X] \rangle, \tag{3}$$

где $\mathrm{sign} X$ есть сигнатура невырожденной квадратичной формы в группах когомологий $H^{2k}(X, C)$, определяемой $\cup$–произведением, а $L(X)$ – характеристический класс Хирцебруха. Существует несколько способов обобщения формулы Хирцебруха, главным образом, для неодносвязных многообразий. Именно, пусть X – замкнутое ориентируемое неодносвязное многообразие, $\pi = \pi_1(X)$, и пусть $f_X : X \longrightarrow B\pi$ – каноническое отображение, определенное с точностью до гомотопии, которое индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Фиксировав конечномерное представление $\rho : \pi \longrightarrow U(N)$, можно рассмотреть группы когомологий $H^{2k}(X, \rho)$ с локальной системой коэффициентов, порождаемой представлением ρ . Тогда $\cup$–произведение индуцирует невырожденную квадратичную форму на этой группе, сигнатуру которой будем обозначать через $\mathrm{sign}_\rho X$. Нетрудно установить, что

$$\mathrm{sign}_\rho X = 2^{2k} \left\langle L(X) \mathrm{ch} f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle, \tag{4}$$

где $\xi\rho$ есть векторное расслоение над $B\pi$, порожденное представлением ρ. Несмотря на то, что левая и правая части формулы (4) совпадают с формулой (3), это обобщение оказывается полезным при дальнейших обобщениях. Самое естественное обобщение заключается в рассмотрении унитарного представления фундаментальной группы в C^*-алгебру. Пусть $C^*[\pi]$ есть C^*– групповая алгебра группы π. Всякое унитарное представление группы π однозначно распространяется до представления $\overline{\rho}$ алгебры $C^*[\pi]$. Положим $A = \mathbf{Im}\overline{\rho}$, $\overline{\rho} : C^*[\pi] \longrightarrow A$. Через ξ^ρ обозначим векторное расслоение над $B\pi$ со слоем A , функции склейки которого порождаются действием группы π на алгебре A с помощью представления ρ. Векторное расслоение ξ^ρ образует элемент K–группы

$$\xi^\rho \in K_A(B\pi).$$

Мы можем теперь выписать правую часть формулы (4):

$$? = 2^{2k} \left\langle L(X) \mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q. \tag{5}$$

Левая часть формулы может быть вычислена как симметрическая сигнатура многообразия X после замены кольца, задаваемого представлением ρ, так что получаем обобщенную формулу Хирцебруха (см. [17])

$$\mathrm{sign}_\rho(X) = 2^{2k} \left\langle L(X) \mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \right\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q.$$

Обобщенная формула Хирцебруха имеет так называемую гладкую версию, в которой вместо сигнатуры многообразия подставляется индекс оператора Хирцебруха на многообразии. Достоинство такой формулы заключается в том, что оператор Хирцебруха может действовать в сечениях произвольного векторного расслоения на многообразии. Поэтому естественно возник вопрос о перенесении гладкой версии формулы Хирцебруха на комбинаторный случай, с тем, чтобы эффективно построить инварианты типа сигнатуры с коэффициентами в произвольном (неплоском) векторном расслоении. Если расслоение ξ порождается некоторым представлением фундаментальной группы π, то комбинаторная версия формулы Хирцебруха сводится к классическим формулам. Все эти формулы требуют определенных ограничений на вид расслоения ξ: расслоение ξ должно быть плоским расслоение в случае точного представления (или почти плоским в случае так называемого асимптотического представления).

В 1998–2001 годах А.С.Мищенко предпринял программу построения локальной комбинаторной формулы Хирцебруха с коэффициентами в произвольном векторном расслоении. Идея такого построения была сформулирована в работе М.Громова [27] и восходит к конструкции алгебраических комплексов Пуанкаре и так называемой симметрической сигнатуры, рассмотренных в работах А.С.Мищенко [5] и [17]. А.С.Мищенко ([18]) построил новую алгебраическую категорию, называемую *почти алгебраическими комплексами Пуанкаре.* Эта категория обладает всеми необходимыми свойствами для построения инвариантов типа сигнатуры комбинаторного многообразия с локальной системой коэффициентов, порождаемой слоями некоторого векторного расслоения ξ на многообразии. Показано, что у каждого компактного замкнутого комбинаторного многообразия существует такое достаточно мелкое симплициальное разбиение, которое естественным образом порождает почти алгебраический комплекс Пуанкаре, сигнатура которого служит левой частью формулы Хирцебруха.

В частности, построенная формула дает новую конструкцию рациональных классов Понтрягина по локальной комбинаторной структуре на многообразии X. В случае, когда векторное расслоение ξ порождается некоторым точным представлением, то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре совпадает с алгебраическим комплексом Пуанкаре из работы [5], а его сигнатура совпадает с сигнатурой многообразия в когомологиях с соответствующей локальной системой коэффициентов. В случае, когда расслоение ξ порождается некоторым асимптотическим представлением (и, следовательно, не является плоским расслоением), то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре может быть получен из универсального алгебраического комплекса Пуанкаре над групповой алгеброй фундаментальной группы π многообразия X путем замены колец. При этом сигнатура этого почти алгебраического комплекса Пуанкаре вычисляется как образ симметрической сигнатуры многообразия X при замене колец.

Теория алгебраических комплексов Пуанкаре оказалось удобным инструментом для описания сигнатуры многообразия в случае непрерывных семейств локальных систем коэффициентов, поскольку, в отличие от групп (ко)гомологий группы (ко)цепей не меняют своей размерности при переходе от одной локальной системы коэффициентов к другой. Однако в любом случае для корректного построения сигнатуры требуется конечномерность соответствующих групп (ко)цепей. В связи с этим, а также в связи с предложенным М.Громовым ([27]) методом доказательства топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина гладких многообразий естественно построить такую схему вычисления сигнатуры гладкого компактного топологического многообразия, которая бы распространялась на непрерывные семейства локальных систем коэффициентов.

Трудность в данном случае заключается в том, что подстилающие группы (ко)цепей не обязаны являться конечномерными пространствами. Если, например, отправляться от определения когомологий по Чеху, то (ко)гомологии с локальной системой коэффициентов интерпретируются как (прямые) обратные пределы (ко)гомологий нервов открытых покрытий пространства. Эти (ко)гомологии можно рассматривать как гомологии (ко)цепного комплекса, который является (прямым) обратным пределом групп (ко)цепей этих нервов, а, значит, размерности у этих пространств априори бесконечны. Автор совместно с П.С.Поповым ([21], [22]) построил теорию невырожденных квадратичных форм на некоторой естественной категории абстрактных бесконечномерных линейных пространств, у которой имеется гомотопический инвариант, совпадающий с сигнатурой для конечномерных пространств. Построенная теория дает возможность при вычислении сигнатур использовать для топологических многообразий вместо индефинитных представлений фундаментальных групп непрерывные семейства характеров фундаментальной группы.

4.3 Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами

Один из методов установления формулы Хирцебруха в односвязном случае связан с использованием свойств индекса эллиптических операторов на многообразии. Поэтому естественно возникла задача применить теорию эллиптических операторов и в неодносвязном случае. Косвенные соображения, касающиеся описания гомологий некомпактных многообразий, таких как L_2-когомологии, указывали на естественность такой постановки задачи. Поэтому еще в 1978 А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко ([10],[11]) предприняли исследование по изучению гомотопических свойств эллиптических операторов с коэффициентами в произвольной C^*-алгебре. Такие операторы естественным образом возникают в различных задачах теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях или как операторы с операторнозначными коэффициентами.

Эти операторы не являются фредгольмовыми операторами в классическом смысле, однако как ядро, так и коядро таких операторов ассоциируются с конечно порожденными проективными модулями над C^*-алгеброй, и, следовательно, порождают гомотопические инварианты эллиптического оператора. Авторы дали точную геометрическую интерпретацию индексу эллиптического оператора над C^*-алгебрами и установили формулы для индекса эллиптических операторов над произвольной C^*-алгеброй, обобщающие формулы Атья–Зингера. В частности, было получено новое доказательство обобщенных формул Хирцебруха.

Теория C^*-модулей и эллиптических операторов на C^*-алгебрами нашли в дальнейшем многочисленные применения как для уравнений в частных производных, так и для задач геометрии и топологии, равным образом в теории банаховых алгебр и C^*-модулей. В частности, ([13]) с помощью этой теории в дальнейшем исследовались гомотопические и спектральные свойства эллиптических операторов на некомпактном пространстве R^n с быстро убывающими, почти периодическими или случайными коэффициентами. Решающим методом в этом сопоставлении является дальнейшее развитие понятия прямого образа для многолистных накрытий многообразий. В случае когда база накрытия является компактным многообразием, задача изучения эллиптических операторов на накрывающем пространстве редуцируется к задаче об эллиптических операторах на компактном многообразии, но с более сложной структурной C^*-алгеброй, порожденной накрытием.

В этом направлении работали ученики А.С.Мищенко – Р.А.Бикташев, Ф.Шарипов, О.Филиппов, которые разработали редукцию задачи об описании спектральных свойств эллиптических операторов на некомпактных многообразиях к такой же задаче на компактных многообразиях. Пусть A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, $V_G(X;A)$ — банахова категория, образованная локально тривиальными расслоениями над G-пространством X с типичным слоем, равным некоторому проективному A-модулю. С помощью K-теории банаховых категорий М.Каруби можно ввести в рассмотрение K-теорию $K_G(X;A)$, где A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, X — G-пространство, отвечающую банаховой категории локально тривиальных расслоений над X.

В 1985 г. Е.В.Троицким доказано, что если X/G обладает конечным открытым покрытием конечной размерности, то тензорное произведение слоев индуцирует изоморфизм

$$K^*_G(X;\mathbf{C}) \otimes K^*(pt;A) \otimes \mathbf{Q} \to K^*_G(X;A) \otimes \mathbf{Q}.$$

С помощью этого утверждения оказывается возможным определить понятие топологического индекса ind_t Мищенко–Фоменко уже в эквивариантном случае. С помощью усреднения в гильбертовых модулях (техника которого была развита Е.В.Троицким) можно определить аналитический индекс ind_a и доказать эквивариантную версию теоремы Мищенко–Фоменко об индексе: $ind_t = ind_a \in K^G_0(A) \otimes \mathbf{Q}$.

Чтобы учесть при этом кручение в K-теории, Е.В.Троицкий развил более тонкую теорию аналитического индекса (теория топологических гильбертовых модулей, соболевских цепей и т.д.) Наиболее трудным моментом оказалось доказательство C^*-алгебраического аналога свойства (S6) алгебры Сили. Чтобы определить топологический индекс со значениями в $K^G_0(A)$ (а не в $K^G_0(A) \otimes \mathbf{Q}$), надо доказать (с использованием геометрической резольвенты Шохета) теорему об изоморфизме Тома в $K_G(.;A)$-теории. Этот результат может рассматриваться как доказательство гипотезы Каруби в важном частном случае. После этого, используя аксиоматический подход к понятию индекса, оказывается возможным доказать следующую теорему об индексе: $ind_t = ind_a \in K^G_0(A)$. Можно рассматривать эту теорему как наиболее сильную теорему об индексе "классического направления".

Первая группа приложений этой теоремы связана с $\widehat{A}$-родами и теорией Громова–Лоусона–Розенберга. В частности, было получено следующее усиление результата Розенберга. Пусть M — компактное многообразие со спинорным универсальным накрытием $\widetilde{M}$, допускающим строго положительную скалярную кривизну, $\pi_1(M) = \pi$, а E — плоское A-расслоение. Имеется расщепляющаяся точная последовательность C*-алгебр $0 \to C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \to C^*(\widehat{\pi}) \to C^*(\pi) \to 0$, где $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}}$ — универсальная алгебра для тех унитарных представлений $\widehat{\pi}$, которые нетривиальны на ядре накрытия $\widehat{\pi} \to \pi$. Тогда определены $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A$-векторные расслоения

$(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \times_\pi S^\pm) \otimes A$ на M. Действие $\widehat{\pi}$ коммутирует с D^+. Следовательно, оператор $\widetilde{D}_E^+$ определен на M. Тогда $ind_t \widetilde{D}_E^+ = 0 \in K_0(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A)$.

Одним из важнейших элементов классической теории индекса эллиптических операторов, еще не включенным в теорию C^*-индекса, оставалась теория индекса эквивариантных семейств. Е.В.Троицким эта проблема была решена в важнейшем случае: доказана теорема об индексе для эллиптических операторов, действующих в сечениях расслоений со слоем проективный модуль над C^*-алгеброй, в ситуации, когда компактная группа Ли действует комплексно, т.е. не только в тотальном пространстве, но и на самой алгебре скаляров, коммутируя с символом ("дважды эквивариантная"C^*-теорема об индексе). Как приложение, получена эквивариантная теорема об индексе для семейств в случае прямого произведения базы на пространство параметров.

Другая группа приложений теоремы об индексе связана с C*-числами Лефшеца и неподвижными точками. Для автоморфизма C*-эллиптического комплекса, являющегося элементом компактной группы автоморфизмов, определяются числа Лефшеца со значениями в $K_0(A) \otimes \mathbf{C}$. Они связаны с неподвижными точками при помощи формулы типа Атьи–Лефшеца–Сигала. Для произвольного автоморфизма Е.В.Троицкий определил числа Лефшеца со значениями в циклических гомологиях. Числа Лефшеца двух типов связаны характером Чженя Конна–Каруби. В случае W^*-алгебр результаты могут быть усилены.

Идея рассмотрения комплексных действий группы привело к изучению так называемых чисел Рейдемайстера (или Нильсона), как числа классов сопряженности элементов группы, скрученных некоторым автоморфизмом $\varphi : \pi \to \pi$. по аналогии с классической теоремой Бернсайда Троицкий Е.В. совместно с А.Фелбдштыным установил, что это число равно числу неподвижных точек отображения $\varphi^* : \widehat{\pi} \to \widehat{\pi}$ пространства классов эквивалентных неприводимых представлений группы π в случае групп типа 1.

4.4 Теория гильбертовых C^*-модулей.

Теория индекса эллиптических операторов над C^*-алгебрами потребовала ([11],[12],[14]) развить абстрактную теоретико-функциональную теорию гильбертовых C^*-модулей и фредгольмовых операторов в этих модулях. Наиболее существенными в этом направлении являются результаты, описывающие свойства компактных и фредгольмовых операторов C^*-модулей, которые существенно отличаются от классических операторов даже в случае простейших коммутативных алгебр непрерывных функций. Наиболее существенное отличие заключается в том, что операторы и даже линейные функционалы гильбертовых C^*-модулей как правило не имеют ограниченных сопряженных, что сильно усложнило анализ их свойств.

Изучение абстрактной теории гильбертовых C^*-модулей и соответствующей топологической K-теории, порожденной векторными расслоениями над C^*-алгеброй вскрыло новые обстоятельства. Одним из трудных моментов, не позволяющим автоматически перенести на случай произвольной C^*-алгебры теорию гильбертовых пространств, состоит в том, что бесконечномерные гильбертовы C^*-модули не являются автодуальными и даже рефлексивными. Однако в некоторых случаях ([14]) А.С.Мищенко установил рефлексивность C^*-модулей.

В настоящее время теория гильбертовых C^*-модулей и алгебр превратилась в самостоятельную дисциплину с многочисленными приложениями в различных математических дисциплинах. В топологии эта теория нашла применение для изучения l_2-когомологий некомпактных многообразий, аналитического кручения, инварианта Новикова–Шубина, циклических когомологий и др.

Так, например, в работе [19] было построено относительное аналитическое кручение на уровне не l_2-когомологий, т.е. групповых алгебр фон Неймана, а на уровне групповых C^*-алгебр. В частности, показано, что в случае алгебр фон Неймана относительное аналитическое кручение равно разности между аналитическим кручением многообразия и комбинаторным кручением.

Главным алгебро-топологическим инструментом, связывающим геометрию и топологию неодносвязных многообразий с теорией банаховых алгебр, является K-теория "с коэффициентами в C^*-алгебре"$K^*(X;A)$, прежде всего, при A равной алгебре функций на топологическом пространстве (многообразии или классифицирующем пространстве фундаментальной группы) или равной групповой $C*$-алгебре (приведенной или нет) фундаментальной группы. При использовании K-теории с коэффициентами в C^*-алгебре очень важно иметь удобное описание ее в терминах аналитически определенных представляющих пространств.

Таким образом, первый круг задач, стоявших перед участниками гранта, был связан с этим вопросом. В случае алгебры с единицей это было сделано нами ранее с использованием стягиваемости общей линейной группы гильбертова модуля $l_2(A)$. Состоят эти представляющие пространства из соответствующим образом определенных фредгольмовых операторов в $l_2(A)$. В связи с тем, что не всякий ограниченный оператор в этом модуле допускает сопряженный, возникают, соответственно, две общих линейных группы (GL и GL^*) и два варианта представляющих пространств. Важно понять, стягиваемы ли эти группы и совпадают ли соответствующие K-теории. Положительный ответ на этот вопрос даст большую техническую свободу, а отрицательный может привести к определению новых инвариантов.

Следует отметить, что большинство вопросов в этой сложной теме оставалось нерешенными с 1982 г. Е.В.Троицкому удалось получить ряд важных продвижений в их решении. Получено новое простое доказательство теоремы Кунца и Хигсона о стягиваемости группы обратимых операторов, допускающих сопряженный, для C^*-алгебр со строго положительным элементом. Доказана стягиваемость полной группы обратимых операторов в некоторых частных случаях, например, для подалгебр алгебры компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве и для алгебр функций на конечномерных многообразиях. Доказана стягиваемость полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля и для общей коммутативной сигма-унитальной алгебры.

В классической работе Диксмье и Дуади в свое время была доказана стягиваемость группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве в сильной топологии. В случае C^*-алгебр Е.В.Троицким доказаны различные варианты обобщения этой теоремы на случай общей и полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля. Роль сильной топологии здесь играет строгая топология.

В этом отношении интересна работа А.А. Ирматова ([46]), в которой рассмотрена связь между операторами, действующих в гильбертовом ()-модуле, и семействами операторов, действующих в гильбертовом пространстве, параметризованных точками компакта X. А.А.Ирматовым исследованы семейства компактных и фредгольмовых операторов. Так ()-оператор является компактным тогда и только тогда, когда соответствующее ему семейство непрерывно в равномерной операторной топологии. Аналогичный вопрос для фредгольмовых операторов выявил в пространстве ограниченных операторов новую топологию, названную автором F-топологией. В частности, из этой работы следует, что пространство фредгольмовых операторов, снабженное F-топологией, является классифицирующим пространством K-функтора. Ранее этот результат был доказан М.Атьей, но только для пространства фредгольмовых операторов. Наряду с F-топологией в работе вводится и изучается G-топология. Для доказательства теоремы о том, что F-топология строго сильнее G-топологии в работе приводится пример недополняемого гильбертова подмодуля в $l_2(C(X))$ (подмодуль не имеет никакого дополнения, не только ортогонального).

В работе ([47]) используя свойства F-топологии, существенно расширен класс нелинейных фредгольмовых отображений, для которых можно построить теорию степени. После работы Ж.Лере и Ж.Шаудера 1946 года класс отображений, для которых можно построить теорию степени, усилиями многих математиков существенно расширен и, поэтому любое продвижение в этом направлении дается нелегко. В названной работе особое внимание уделяется конструкциям, позволяющим ослабить требования на гладкость отображения. В этой работе предлагаются конструкции квази-фредгольмовой структуры и ориентации бесконечномерного многообразия и дается описание ориентированности фредгольмовых отображений в терминах характеристических классов. Здесь доказан аналог теоремы об обратной функции для введенного в этой работе класса C^1F-отображений. Этот результат представляет самостоятельный интерес.

В.М.Мануйловым, Е.В.Троицким и М.Франком [32] были изучены условные ожидания на C^*-алгебрах, возникающие из действия дискретных групп. Рассмотрен ряд новых примеров действий групп, показывающих, в каких случаях условные ожидания корректно определены. Доказан ряд утверждений о конечности индекса таких условных ожиданий. Показано, что в случае конечности индекса условное ожидание определяет гильбертов модуль с внутренним произведением, принимающим значения в алгебре инвариантных функций. Найдены достаточные условия, при которых этот гильбертов модуль рефлексивен. В частности это так, если все орбиты конечны и ограниченны в совокупности некоторым числом n, и точки, орбита которых меньше n, изолированы. Условие изолированности таких точек оказалось излишним и было снято В.В.Серегиным.

При изучении инвариантов, связанных с действием групп на многообразиях, в том числе, таких как числа Лефшеца C^*-комплексов, естественно рассматривать топологизированные (следом и другими способами) K-группы и распространить доказанные Е.В.Троицким ранее теоремы на этот случай.

В этом русле А.А.Павлову удалось определить новые инварианты и исследовать их свойства. Именно, реализация идеи пополнения топологизированных K-групп привела в W^*-случае к определению нового объекта — N-группы. Построен функтор N_0 на категории алгебр фон Неймана как некоторый (более естественный в W^*-случае) аналог K-теории. Изучена его связь с операторной K-теорией. А именно, показано, что каждый элемент из $N_0(A)$, где A - алгебра фон Неймана, может быть представлен как аддитивная $K_0(A)$-значная мера с компактным носителем, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств комплексной плоскости. Кроме того, исследованы свойства N-групп W^*-алгебр.

Также отметим, что группы $N_0(A)$ как расширения $\mathbf{C} \otimes K_0(A)$-групп естественно возникают при рассмотрении произвольных унитарных эндоморфизмов W^*-эллиптических комплексов. При этом оказывается возможным определить (обобщенные) числа Лефшеца для таких эндоморфизмов со значениями в группе $N_0(A)$. Кроме того, удалось построить обобщенный характер Чженя как отображение из $N_0(A)$ в банаховы циклические гомологии (четной градуировки) W^*-алгебры A, который является продолжением классического характера Чженя с $K_0(A)$ в некотором естественном смысле.

Для гильбертовых модулей над C^*-алгебрами Е.В.Троицким и П.С.Поповым была исследована проблема почти ортодополняемости функционалов свободным подмодулем, которая тесно связана со стягиваемостью полной линейной группы. Свойство почти ортодополняемости функционалов было рассмотрено для стандартного модуля $L_2(A)$ над алгебрами с единицей, в этом случае оно является обобщением определения бесконечной размерности на некоммутативный случай.

Доказана эквивалентность двух определений (K, E) этого свойства в общем некоммутативном случае. Получены критерии выполнения этого свойства для алгебр фон Неймана, выраженные в терминах существования частичных изометрий, у которых коядро строго включает образ. Дано доказательство стабильности класса K, E-алгебр относительно тензорного произведения на матричные алгебры. Приведены примеры K, E-алгебр и контрпримеры, показывающие отличие рассмотренного свойства от других определений размерности, или ранга, для C^*-алгебр.

В теории гильбертовых модулей над C^*-алгебрами ряд интересных результатов получен М.Франком — найдена связь между свойствами различных классов операторов в гильбертовых модулях и различными классами мультипликаторов C^*-алгебр и изучено свойство ортодополняемости; В.А.Трофимовым — доказано свойство рефлексивности для важных классов C^*-алгебр;

В.М.Мануйловым предпринята программа исследования феномена диагонализации компактных операторов в гильбертовых модулях над определенным классом C^*-алгебр. Этот класс алгебр включает в себя конечные W^*-алгебры, их обобщение к таким алгебрам, которые допускают приложения к задаче описания спектра оператора Шредингера с иррациональным потоком.

Гильбертовы модули над W^*-алгебрами занимают промежуточное место между гильбертовыми пространствами и гильбертовыми C^*-модулями. Пусть A — W^*-алгебра. Назовем самосопряженный оператор K в A-модуле H_A *диагонализируемым*, если существует набор $\{x_i\}$ элементов дуального модуля H'_A и набор элементов $l_i \in A$ такие, что множество $\{x_i\}$ является ортонормированным, то есть $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$; модуль H'_A совпадает с A-модулем N', дуальным к модулю N, порожденному множеством $\{x_i\}$; $Kx_i = x_i l_i$; для любых унитарных элементов u_i, $u_{i+1} \in A$ имеет место операторное неравенство $u_i^* \lambda_i u_i \geq u_{i+1}^* l_{i+1} u_{i+1}$.

Элементы x_i назовем "*собственными векторами*", а операторы l_i "*собственными значениями*" оператора K. Следует отметить, что "собственные векторы" и "собственные значения" определены неоднозначно. Имеются примеры, показывающие необходимость использования дуальных модулей для диагонализации операторов. Даже в случае коммутативных C^*–алгебр имеется ряд препятствий к диагонализации операторов. В.М.Манйлов установил аналог теоремы Дюпре–Филлмора, позволяющий проводить индукцию:

Пусть A — W^*-алгебра, допускающая разложение в прямой интеграл конечных факторов. Если M — конечнопорожденный проективный A-подмодуль в H'_A, то ортогональное дополнение $M^\perp$ к модулю M изоморфно H'_A.

В.М.Мануйловым доказана теорема о диагонализации компактных положительных операторов в дуальном стандартном гильбертовом модуле над конечными W^*–алгебрами, обобщающей теорему Гильберта–Шмидта о приведении компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве к диагональному виду.

Если A — W^*-алгебра, допускающая разложение в прямой интеграл конечных факторов, то компактный строго положительный оператор K в модуле H_A может быть диагонализирован в H'_A и его "собственные значения" определены единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности.

Доказательство основано на возможности отщепить от модуля H'_A инвариантный относительно K проективный подмодуль, который выделяется проектором со следом, равным 1. Отличие от классического (коммутативного) случая состоит в неоднозначной определенности "собственных значений".

Отметим, что для приложений интересен именно случай конечных W^*-алгебр, так как в бесконечном случае операторы диагонализируются по тривиальным причинам, но нет единственности "собственных значений" ни в каком смысле.

Далее В.М.Мануйловым показано, что "собственные значения" непрерывно зависят от диагонализируемых операторов, именно,

Пусть $K_r : H_A \longrightarrow H_A$, $r = 1, 2$ — компактные строго положительные операторы и $VK_1 - K_2V < \varepsilon$. Тогда в H'_A существует унитарный оператор U, отображающий "собственные векторы" оператора K_2 в "собственные векторы" оператора K_1, такой, что $VU^*K_1U - K_2V < \varepsilon$, и "собственные значения" $\{\lambda_i^{(r)}\}$ операторов K_r $(r = 1, 2)$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $V\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}V < \varepsilon$.

Им также сформулировано аналогичное свойство для произвольных C^*-алгебр, слабо замкнутых в конечных W^*-алгебрах. Именно, скажем, что такая C^*-алгебра допускает *слабую диагонализацию*, если компактные положительные операторы допускают диагонализацию над большей W^*-алгеброй, но при этом диагональные элементы могут быть выбраны из исходной C^*-алгебры.

Сформулировано условие $(*)$ на множество проекторов в C^*-алгебре A, заключающееся в том, что с точностью до эквивалентности проекторы в алгебре A образуют подрешетку в решетке проекторов объемлющей W^*-алгебры. Плотность обратимых самосопряженных элементов в множестве всех самосопряженных элементов C^*-алгебры A (свойство $RR(A) = 0$) вместе с условием $(*)$ обеспечивают слабую диагонализацию.

Пусть A — слабо плотная сепарабельная C^*-подалгебра со свойствами $(*)$ и $RR(A) = 0$ в W^*-алгебре B, допускающей разложение в прямой интеграл конечных факторов. Если K — компактный строго положительный оператор в A-модуле H_A, то "собственные значения" $\{l_i\}$ диагонализации естественного продолжения K на B-модуль H'_B могут быть выбраны таким образом, что $l_i \in A$.

В частности, это утверждение верно в случае, когда $A = A_\theta$ есть некоммутативный тор (алгебра вращения) при всех значениях θ.

В.М.Мануйловым доказано, что свойством слабой диагонализации обладают при дополнительных предположениях непрерывные поля C^*-алгебр над отрезком. Основным техническим инструментом здесь является техника гомотопий почти коммутирующих операторов из первой главы. Приведен пример, показывающий, что операторы над непрерывным полем алгебр вращения не могут быть приведены к диагональному виду. Пусть A обозначает непрерывное поле алгебр A_θ, $\theta \in [a, b]$, $a < 1 < b$. В матричной алгебре над $A_1 = C(T^2)$ существует проектор, являющийся образующей Ботта в группе $K_0(A_1)$, и его можно непрерывно продолжить до непрерывного поля проекторов $p(\theta)$ в некоторой окрестности точки 1 так, что для стандартного следа τ_θ на A имеет место равенство $\tau_\theta(p(\theta)) = 1 + \theta$. Непосредственно проверяется, что такой проектор не может быть непрерывно диагонализирован.

В ([29]) показано, что оператор Шредингера

$$D = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + 2\pi\theta y\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + W(x, y)$$

с двоякопериодическим возмущением $W(x, y) = W(x + 1, y) = W(x, y + 1)$ и с магнитным потоком θ, коммутирующий с операторами U и V, удовлетворяющими соотношению $UV = e^{2\pi i\theta}VU$, можно рассматривать как (неограниченный) оператор в гильбертовом модуле над C^*–алгеброй вращения A_θ, порожденной операторами U и V. При всех значениях θ (как рациональных, так и иррациональных) оператор D может быть приведен к диагональному виду с элементами алгебры A_θ на диагонали, что дает общее для всех значений магнитного потока описание разбиения спектра оператора D, аналогичное случаю целого θ, когда диагональные. элементы являются функциями на торе, образованными упорядоченными собственными значениями семейства эллиптических операторов на торе, индексированных этим тором.

5 Научные связи научной школы по некоммутативной геометрии и топологии.

Деятельность научной школы вполне заслуженно имеет международное признание и связана постоянными научными связями и контактами с многими научными центрами и отдельными ведущими учеными. Это, прежде всего, научные центры в России и СССР, такие как Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербургский университет и Санкт-Петербургское Отделение математического института РАН, Воронежский Государственный университет, Казанский государственный университет, Харьковский университет, Математический институт, Украинской Академии Наук, ряд других университетов, где работают ученые, получившие научный задел в рамках научной школы в Москве: Баку, Самарканд, Лейпциг, Варшава, Рига, Будапешт.

Постоянно поддерживаются и развиваются научные связи с научными центрами за рубежом. При участии ученых научной школы проводятся ежегодные конференции в Польше, выполнено ряд научных программ при поддержке научных фондов: Сороса, ДААД, ИНТАС, Евросеть, по которым проведены научные конференции с участием зарубежных ученых. Среди таких конференций следует отметить конференцию при поддержки немецкого фонда ДФГ в 1999 году (Узедом, Германия), конференцию при поддержки Евросети по некоммутативной геометрии 2004 года (Бедлево, Банаховский центр, Польша),

Список литературы

[1] А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко , *Курс дифференциальной геометрии и топологии .* — Москва,3-е изд., Факториал, , (2000

[2] А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т.Фоменко , *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии .* — Москва, Интеграция , (2001.

[3] Е.В.Троицкий , *Степень отображения и ее применения. Учебное пособие. .* — Москва, МГУ , (1996

[4] , *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре* под. ред. Ю.М.Смирнова . — Москва, Издательство Физико-математической литературы , (2000

[5] А.С.Мищенко , *Гомотопические инварианиты неодносвязных многообразий. 1.Рациональные инварианты .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1970) Том **34 ,** No. 3 , p.501–514

[6] А.С.Мищенко , *Extraordinary homology theories: bordisms and K-theory .* — Congres international des mathematiciens, Actes, Nice , (1971) , p.113–119

[7] А.С.Мищенко , *Перестройки комплексов Пуанкаре .* — Матем.сб., Новая сер. , (1971.) Том **85 ,** No. 3 , p.366–372

[8] А.С.Мищенко , *Infinite-dimensional representations of discrete groups and higher signatures. .* — Math. USSR Izvestia , (1974) Vol. **8 ,** No. 1 , p.85–111

[9] А.С.Мищенко , *О фредгольмовых представлениях дискретных групп .* — Функц.анализ и его приложения , (1975) Том **9 ,** No. 2 , p.36–41

[10] А.С.Мищенко , *Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами .* — Доклады АН СССР , (1978) Том **239 ,** No. 6 , p.1289–1291

[11] А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко , *Индекс эллиптических операторов над C-алгебрами .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1979) Том **43 ,** No. 4 , p.831–859

[12] А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко , *C^*–алгебры и K^*–теория Школа по теории операторов функциональных пространствах, Новосибирск , (1979) ,* p.16

[13] А.С.Мищенко , *Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K–теории .* — Успехи матем. наук , (1979) Том **34 ,** No. 6 , p.67–79

[14] А.С.Мищенко , *Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C^*–алгебрами .* — Труды МИАН СССР , (1984) Том **166 ,** p.161–176

[15] A.S.Mishchenko , *Controlled Fredholm representations .* — in:NovikovConjectures, Index Theorems and Ridgidity (London Math. Soc, Lect. Notes Series, v. 226) , (1995) Vol. **1 ,** p.174–200 .

[16] А.С.Мищенко , *Метрический подход к построению фредгольмовых представлений .* — Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения П.С.Александрова, Москва, Тезисы , (1996 , p.2 .

[17] А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев , *Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха .* — Математический сборник, Новая серия , (1980) Том **111 ,** No. 2 , p.209–226 .

[18] А.С.Мищенко , *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха .* — Труды МИАН , (1999) Том **224 ,** p.249–263 .

[19] A.S.Mishchenko, A.Carey, Mathai Varghese , *On analytical torsion over C^*–algebras .* — Proceedings of the Workshop "Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory / Reidemeister Torsion '96"of the Banach Center, Warszawa, Poland, 1996 , (1999) Vol. **46 ,** p.20 .

[20] A.S.Mishchenko, G. Luke, Vector Bundles and Their Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrrecht, Boston, London,(1998), 254 p.

[21] A.S.Mishchenko, P.S.Popov , *On construction of signature of quadratic forms on infinite dimensional abstaract spaces, .* — Georgian Mathematical Journal) Vol. **. 9 ,** No. . 4 (2002), , p.773-783.

[22] A.S.Mishchenko, *Poincare Duality of Topological Manifolds.* — International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, , p.85.

[23] A.Connes , *Noncommutative Geometry .* — Academic Press , (1994

[24] Ю.П.Соловьев , *Дискретные подгруппы, комплексы Брюа-Титса и высшие сигнатуры .* — Успехи матем. наук , (1976) Том **31 ,** No. 1 , p.261–262 .

[25] Ю.П.Соловьев, Е.В.Троицкий , *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии .* — "Факториал", (1996 .

[26] В.М.Мануйлов, Е.В.Троицкий , *C^*-гильбертовы модули .* — "Факториал Пресс", (2001 .

[27] M.Gromov , *Positive curvature, macroscopic mimension, spectral gaps and higher signatures .* — Functional Anal. on the Eve og the 21st Century, v. II. Progress in Math., Basel–Boston: Birkhauser , (1995) Vol. **132**

[28] Мануйлов В. М. *K-гомологии C^*-алгебр.* **Матем. сб. (н.с.) 131 (1986), No. 4, 536–543.**

[29] Мануйлов В. М. , *О собственных значениях возмущенного оператора Шредингера в магнитном поле с иррациональным магнитным потоком , Функцион. анализ и его прил.) Том* **28 , (1994 ,** No. 2 , p.57–60

[30] Manuilov V. M. *Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^*-algebras.* Annals of Global Anal. and Geom. **13** (1995), No. 3, 207–226. .

[31] Мануйлов В. М., Мищенко А. С. *Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп.* Матем. сб. **189** (1998), No. 10, 53–72.

[32] Frank M., Manuilov V. M., Troitsky E. V. *On conditional expectations arising from group actions.* Zeitschr. Anal. Anwendungen. **16** (1997), 831–850.

[33] Мануйлов В. М. *Почти представления и асимптотические представления дискретных групп.* Изв. РАН, сер. матем. **63** (1999), No. 5, 159–178.

[34] Manuilov V. M., Thomsen K. *Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms.* Adv. Math. **154** (2000), 258–279.

[35] Мануйлов В. М., Томсен К. *Асимптотически расщепимые расширения и E-теория.* Алгебра и анализ **12** (2000), No. 5, 142–157.

[36] Мануйлов В. М., Троицкий Е. В., *C^*-Гильбертовы модули* . — М.: Факториал Пресс, 2001.

[37] Соловьев, Ю. П., Троицкий, Е. В., *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.* — М.,Факториал, 1996.

[38] A.S.Mishchenko, *Theory of Almost Algebraic Poincare complexes and Local combinatorial Hirzebruch Formula.* — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.5-37.

[39] V.M.Manuilov, A.S.Mishchenko, *Almost, Asymptotic and Fredholm Representations of Discrete Groups.* — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.159-210.

[40] E.V.Troitsky , *'Twice' Equivariant C^*-Index Theorem and the Index Theorem for Families.* — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.39-70.

[41] V.V.Belokurov, E.T.Shavgulidze, Yu.P.Solovyov, *New Perturbation Theory for Quantum Field Theory: Convergent Series Ibstead of Asymptotic Expansions* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.71-104.

[42] A.I.Shtern, *A Criterion for the Second Real Continuous Bounded Cohomology of a Locallyt Compact Group to be Finite-Domensioanal* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.105-121.

[43] P.Popov, A.Buchina, *Quasi-Orthogonalization of Functional on $l_2(A)$* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.123-135.

[44] A.A.Pavlov, *The Generalizad Chern Character and Lefschetz Numbers in W^*-Modulees* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.137-157.

[45] A.A.Irmatov, *Arrangements of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.211-226.

[46] A.A. Irmatov , *On a new topology in the space of Fredholm operators* . — Ann. Global Anal. Geom.) Vol. **7 ,** No. 2 , (1989, , p.93—106.

[47] A.A.Irmatov, A.S.Mishchenko , *Infintesimal Fredholm structures on infinite-dimensional manifolds* . — Pitman Research Notes in Mathematics Series , No. 270, p.45-81 .

[48] M.Frank, *Hilbertian Versus Hilbert W^*-Modules and Applications to L^2- and other invariants* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.227-242.

[49] Th.Popelensky, *Steenrod Operation in Certain Cobordism Theories* . — Acta Applicandae Mathematicae, (2001) Vol. **68,** p.243-261 .