УДК 513.8

Разработка методов функционального анализа в топологии и некоммутативной геометрии.*

А.С.Мищенко

1. **Введение.** Развитие некоммутативной геометрии в Московской школе.

Во второй половине прошлого столетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это название группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулирования топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций. Хотя эта идея очень старая (восходит к ключевой теореме Гельфанда–Наймарка о взаимно однозначном соответствиии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^*-алгебр) и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном (например, в Московской топологической школе А.М.Виноградовым и его учениками), так и в некоммутативном случае, в более или менее явной форме она была провозглашена в виде программы действия А.Коном в его книге "Некоммутативная геометрия"[1].

Несмотря на ее самоочевидность, идея рассматривать наряду с коммутативными C^*-алгебрами (которые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах их максимальных идеалов), и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем "некоммутативном"пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила собрать воедино разноообразные представления и методы из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе, и взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Источником задач, инициировавших в 60-е годы некоммутативную геометрию,явилась дифференциальная топологиия, которая занималась по существу одной задачей — описанием топологических и гомотопических инвариантов гладких и кусочно-линейных многообразий. Типичными инвариантами гладких и кусочно-линейных многообразий служили так называемые характеристические классы, которых к тому времени было известно три типа — классы Штиффеля-Уитни, классы Чженя и классы Понтрягина. Каждый из них обслуживал наряду с многообразиями свой тип векторных расслоений. Поэтому задача формулировалась следующим естественным образом: в какой степени те или иные характеристические классы зависят от гладкой структуры многообразия, посредством которой они определяются?

Методы, применявшиеся в 50-е годы и ранее, были чисто алгебраическими, и с их помощью было установлено, что характеристические классы Штиффеля-Уитни являются гомотопическими инвариантами. Теми же методами, но более совершенными, было также доказано, что рациональные классы Понтрягина являются топологическими инвариантами. (см. обзор на эту тему в [2]).

Принципиально новым подходом к исследованию классических задач диффернциальной тополгии явилось направление, в котором основным методов исследования в Московской школе по некоммутативной геометрии послужили функциональные методы и открытые специальные

*Статья приготовлена в качестве отчета по гранту Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ.619.2003.1

классы бесконечно-мерных представлений дискретных групп, так называемые фредгольмовы представления.

В Московской школе по некоммтативной геометрии исследования интенсивно проводились преимущественно в следующих направлениях:

- Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.
- Алгебраические комплексы Пуанкаре.
- Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха;
- Теория индекса и псевдодифференциальные операторы;
- Теория C*-алгебр и гильбертовых модулей;
- Неклассические представления дискретных групп;
- Циклические и диэдральные гомологии;
- Характеристические классы в некоммутативной геометрии.

Многие результаты, полученные в школе, носят принципиальный концептуальный характер, которые определеили направление развития некоммутативной геометрии. Наиболее значимые понятия, введенные и разработанные в Московской школе достаточно подробно отражены в книге А.Кона [1]. Во-первых это так называемые алгебраические комплексы Пуанкаре и симметрическая сигнатура неодносвязных многообразий, строящаяся на их базе.

А.Кон в своей книге по этому поводу пишет [1][стр. 9]: "В 1970 году Мищенко построил эквивариантную сигнатуру неодносвязных многообразий как элемент группы Уолла группового кольца. . . .

Следуя этой (Люстига) линии и при помощи ключевого использования C^*–алгебр, Мищенко удалось доказать гомотопическую инвариантность высших сигнатур в предположении, что классифицирующее пространство $B\Gamma$ фунндаментальной группы Γ является компактным многообразием с римановой метрикой неположительной кривизны. Причина, почему C^*–алгебры здесь играют ключевую роль, заключается в следующем. Группы Уолла инволютивной алгебры (такие, как групповые кольца) классифицируют эрмитовы квадратичные формы над такими алгебрами, и их вычисление более трудное по сравнению с K группами конечных проективных модулей. Однако, как было показано Гельфандом и Мищенко, эти группы совпадают, когда инволютивная алгебра является C^*–алгеброй. Это равенство не имеет места для пролизвольных банаховых инволютивных алгебр. Но поскольку групповое кольцо дискретной группы может быть канонически пополнено до C^*–алгебры, то можно получить эквивариантную сигнатуру неодносвзного многообразия как элемент K группы этой C^*–алгебры".

Во-вторых, это открытие фредгольмовых представлений. Спустя пол века было понято, что класс фредгольмовых представлений является частным случаем представлений групп и, более общим образом, алгебр в некоторые C^*–алгебры. Но специфика фредгольмовых представлений до настоящего времени сохраняется и состоит в том, что эти представления обладают естестевенными числовыми инвариантами, аналогичными инвариантам конечномерных представлений компактных групп. А.Кон ([1][стр. 10]) пишет: "Мищенко пошел дальше и использовал двойственную теорю (именно, K–гомологии) в образе фредгольмовых представлений фундаментальной группы, чтобы получить числовые инварианты при помощи спаривания с K– теорией.

Таким образом K–теория крайне некоммутативной C^*–алгебры фундаментальной группы играет ключевую роль в решении классических задач в теории неодносвязных многообразий.

K–тоерия C^*–алгебр. теория раширения Брауна, Дугласа и Филмора, L–теория Атья и фредгольмовф представления Мищенко — все они являются частными случаями биинвариантной KK–теории Каспарова . . . "И далее (стр. 84): "Имеется одно ключевое свойство K–тоерии

C^*–алгебр, которое существенно отличается от случая общих банаховых алгебр. Это отличие было открыто Мищенко ([19][1979])

Далее, ключевую роль в геометрических конструкциях играет линейное универсальное расслоение для произволной дискретной группы. У Кона написано (стр. 97): "Наиболее простое описание отображения $\mu : K_*(B\Gamma) \to K_*(C^*(\Gamma))$ основано на существование для каждого компакта K в $B\Gamma$ канонического "линейного расслоления Мищенко",

$$\updownarrow_K \in K_0(C(K) \otimes C^*(\Gamma)),$$

которое описывается в виде конечного проективного C^*–модуля над алгеброй $C(K) \otimes C^*(\Gamma) \ldots$"

Наконец, определяющим развитие некоммутативной геометрии оказалось построение теории эллиптических операторов над произвольной C^*–алгеброй. Важность этих результатов наглядно подтверждается и тем, что они зачастую беззастенчиво приписываются на западе другим авторам, чтобы обеспечить недобросовестную конкурецию за счет снижения индекса цитирования (см. на пример, книгу Веге-Ольсена, в которой целая глава посвящена одной теореме, разработанной в Московской школе по некоммутативной геометрии).

В настоящей работе излагается краткий обзор результатов, методов и идей, которые разрабатывались в Московской топологической школе и послужили одним из источников возникновения и развития некоммутативной геометрии. В заключение приводятся новые результаты, основанные на применении функциональных методов при отыскании гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий.

2. От двойственности Пуанкаре до формулы Хирцебруха. Характеристические классы Понтрягина не являясь гомотопическими инвариантами, тесно связаны с задачей описания гладких структур данного гомотопического типа. Поэтому задача отыскания всех гомотопически инвариантных характеристических классов Понтрягина рассматривалась как актуальная задача. В действительности более естественной оказалась другая задача. Характеристические классы Понтрягина, разумеется, являются инвариантами гладкой структуры на многообразии. С точки зрения классификации гладких структур и ее методов наиболее подходящим отношением эквивалентности между многообразиями является не гладкая структура, а так называемые внутренние гомологии многообразий, или в современных терминах бордизмы многообразий.

Еще Л.С.Понтрягин предположил [3], что внутренние гомологии описываются некоторыми алгебраическими выражениями от характеристических классов Понтрягина — чисел Понтрягина, и, установил, что по крайней мере характеристические числа Понтрягина являются инвариантами внутренних гомологий [4, теорема 3] . С помощью теории перестроек гладких многообразий (В.Браудер, С.П.Новиков) было доказано, что единственным гомотопическим инвариантом является характеристическое число Понтрягина, совпадающее с сигнатурой ориентированного компактного многообразия, построенной по двойственности Пуанкаре.

Формула, которая осуществляет совпадение сигнатуры многообразия с определенным характеристическим числом Понтрягина, известна сейчас как формула Хирцебруха [5], хотя некоторый ее частный случай был получен еще В.А.Рохлиным [6] годом ранее. Изучение двойственности Пуанкаре и формулы Хирцебруха, отражающей ее свойства, имеет длинную историю, которая отчасти связана со становлением некоммутативной геометрии и работами Московской топологической школы второй половины 20-го столетия.

Начало этой истории было положено еще в знаметитой работе А.Пуанкаре 1895 г. [7], где, в частности, впервые сформулирована теорема, известная теперь как двойственность Пуанкаре для замкнутых ориентированных многообразий. И хотя завершенная формулировка и полное доказательство двойственности Пуанкаре были представлены намного позднее, вне всякого сомнения можно считать, что Пуанкаре был родоначальником разветвленной теории, в которой двойственность Пуанкаре играет ключевую роль.

Конечно, под двойственностью Пуанкаре понимал более упрощенное утверждение. Он говорил о совпадении чисел Бетти, "равноотстоящих от концов" [7, с. 490], однако под числами Бетти P_k понимал (см. там же, §6, с. 470-471) число линейно независимых подмногообразий размерности k. Если понимать слова Пуанкаре буквально, то независимость подмногообразий $v_1, v_2, \ldots, v_p$ предполагает, что эти подмногообразия попарно не пересекаются. Более того, по-видимому, они должны иметь нормальное расслоение с нулевым эйлеровым классом, по крайней мере в том случае, когда целочисленный коэффициент в линейной комбинации $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p$ отличается от ± 1, поскольку Пуанкаре требует, чтобы каждое подмногообразие v_j мало отличалось от k_j компонент полной границы другого подмногообразия на единицу большей размерности. В любом случае понятие чисел Бетти требовало уточнения, которое и сделал сам Пуанкаре в своих последующих дополнениях [8].

В том же томе приведена речь П.С.Александрова, произнесенная им на торжественном выездном заседании Международного математического конгресса, посвященном столетию со дня рождения Пуанкаре (Амстердам, 1954). П.С.Александров исключительно точно охарактеризовал роль Пуанкаре в создании теории гомологий, так что не остается ничего другого, как просто привести его слова: "Вернемся к введенному Пуанкаре понятию гомологии. Как уже было упомянуто, это понятие было введено в первом топологическом мемуаре Пуанкаре - в знаменитом "Analysis situs"интуитивным образом. Однако в данном случае этот недостаточно строгий подход имел, так сказать, и фактические последствия, послужившие поводом к обоснованной критике норвежского математика Хегора (Heegard). Дело в том, что в своем первом мемуаре Пуанкаре не обратил должного внимания на феномен кручения, ограничившись в основном числами Бетти. Но он блестяще восполнил допущенный пробел в своих последующих публикациях по топологии (в "Дополнениях к Analysis situs"). При этом Пуанкаре стал на комбинаторную точку зрения, введя понятие симплициального разбиения (триангуляции) многообразия, т. е. понятие симплициального комплекса, и создал таким образом основной метод комбинаторной топологии"[9, с. 813].

Конечно, в дальнейшем потребовалось открыть группы гомологий (Э.Нетер, 1925), группы когомологий (Дж.Александер, А.Н.Колмогоров, 1934), двойственность между ними (Л.С.Понтрягин). Но, пожалуй, самым значительным событием в изучении топологических инвариантов многообразий явилось открытие характеристических классов (Штиффель, Уитни (1935); Понтрягин (1947); Черн (1948)). Все было подготовлено, таким образом, к тому, чтобы связать воедино инварианты, выражающие двойственность Пуанкаре, и интегральные инварианты характеристических классов.

Эта связь известна сейчас как формула Хирцебруха. Формула Хирцебруха дает прекрасный пример применения категорного метода — одного из основных инструментов в алгебраической и дифференциальной топологии. В самом деле, Пуанкаре, кажется, уже сказал все, доказав совпадение чисел Бетти многообразия, равноотстоящих от концов. После того, как было введено понятие групп гомологий, двойственность Пуанкаре стала звучать как совпадение рангов соответствующих групп гомологий. При этом для чисел Бетти не имело значения, какие группы гомологий рассматривались — целочисленные или рациональные, поскольку ранг целочисленных групп гомологий совпадает с размерностью групп гомологий над полем рациональных чисел. Однако понятие групп гомологий позволило обогатить двойственность Пуанкаре и рассмотрением групп гомологий с коэффициентами в конечных полях. По существу это уже знал и сам Пуанкаре, который исследовал кручения в гомологиях многообразия.

Таким образом, совпадение чисел Бетти можно интерпертировать как изоморфность групп гомологий с рациональными коэффициентами. Учет кручений тоже должен был дать изоморфность некоторых групп. Но это не группы гомологий, поскольку кручения совпадают, но не в тех размерностях, что числа Бетти. Это кажущееся несоответствие было понято только после того, как были открыты группы когомологий и их дуальность к группам гомологий. Таким образом, окончательно двойственность Пуанкаре стала звучать как изоморфность между группами гомологий и группами когомологий дополнительной размерности

$$H_k(M; Z) = H^{n-k}(M; Z). \tag{1}$$

Ключевым соображением в этом изоморфизме является то, что это не просто абстрактный изоморфизм групп, а изоморфизм, порождаемый естественными операциями в категории многообразий, точнее, в категории топологических пространств. Например, в одном частном случае, когда рассматриваются гомологии в средней размерности четномерного многообразия ($\dim M = n = 2m$) с рациональными коэффициентами, условие (1) становится тривиальным, поскольку

$$H^m(M;Q) = \mathrm{Hom}(H_m(M;Q),Q) \equiv H_m(M;Q). \tag{2}$$

Однако в равенстве (2) изоморфизм между группами гомологий и группами когомологий выбирается не однозначно. Двойственность же Пуанкаре гласит, что существует вполне определенный гомоморфизм, так называемый гомоморфизм персечения с циклом $[M]$

$$\cap_{[M]} : H^{n-k}(M;Q) \longrightarrow H_k(M;Q),$$

который и задает изоморфизм двойственности Пуанкаре. Это значит, что с многообразием M можно связать невырожденную квадратичную форму, обладающую дополнительным инвариантом — сигнатурой квадратичной формы, которая играет во многих проблемах дифференциальной топологии ключевую роль.

Именно с исследованием сигнатуры многообразий и формулы Хирцебруха, описывающей ее в терминах характеристических классов Понтрагина, связано большое научное направление, которое развивалось в Московской топологической школе во второй половине прошлого столетия и которое послужило одним из источником развития некоммутативной геометрии. В основном в рамках этого направления развивались исследования, посвященные описанию гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий на основе изучения формулы Хирцебруха и ее естественных обобщений.

3. Высшие сигнатуры и фредгольмовы представления. Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффициентов и определяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий, бесспорно, является наиболее важным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а ввиду того, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом по модулю конечного числа возможностей.

Однако система характеристических классов является в некотором смысле переопределенной системой данных. Более строго, это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса, т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразий.

В случае гомотопической инвариантности характеристических классов Понтрягина эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время и служит хорошим примером задачи, на которой проверяются возиожности каждого нового метода в топологии. Для односвязных многообразий еще Новиковым и Браудером на основании формулы Хирцебруха было доказано, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что есть следствие гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения.

Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером методом перестроек Морса, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является только классическая сиграстура многообразия. Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью решена в классических работах 60 - х годов.

Для неодносвязных многообразий задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина, отвечающих за препятствия к перестройке нормальных отображений до гомотопической эквивалентности, оказалась намного труднее, поскольку существенную роль здесь играет структура фундаментальной группы многообразия. Это обстоятельство наряду с тем, что описание и распознавание фундаментальной группы в конечных терминах, как известно, невозможо, в отличие от других топологических проблем вызывает дополнительный интерес к этой проблеме.

Для некоторых простых случаев, когда фундаментальная группа является свободной абелевой, задачу можно было решить чисто дифференциально-геометрическими методами, используя технику так называемых внутренних перестроек. Такое решение было представлено также в Московской топологической школе Г.Г.Каспаровым [10].

В общем же случае оказалось, что задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина может быть сведена к проверке того, что так называемые высшие сигнатуры являются гомотопически инвариантными. Точная формулировка этой проблемы известна под названием гипотезы Новикова. Ее положительное решение позволило бы по крайней мере частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии.

Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\mathrm{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$– отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\mathrm{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\mathrm{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M.

Ситуация с неодносвязными многообразиями оказывается совершенно отличной от случая односвязных многообразий, несмотря на то, что Уолл [11] построил неодносвязный аналог теории перестроек Морса. Однако препятствия к таким перестройкам не имеют достаточно эффективного описания. Один из способов обойти эту трудность заключается в том, чтобы выяснить, какие из рациональных характеристических классов неодносвязных многообразий являются гомотопическими инвариантами.

В 1970 г. автор установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются высшие сигнатуры. Более того, им был найден [12] универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами — так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры. Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре.

Для построения симметрической сигнатуры автором была развита теория так называемых алгебраических комплексов Пуанкаре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. Это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению норамального векторного расслоения в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом кольце $Q\pi$.

Проблема описания гомотопически инвариантных характеристических классов является одной из наиболее интересных проблем в дифференциальной топологии на протяжении последних 30 лет. Попытки решения этой проблемы инициировали многочисленные исследования, которые привели к глубоким результатам как в самой топологии, так и в смежных математических дисциплинах: теории представлений, K-теории, теории банаховых алгебр и модулей, теории эллиптических операторов, а также к созданию самостоятельного направления под названием некоммутативная геометрия.

Чтобы эффективно описывать симметрические сигнатуры, применяется естественный способ теории представлений, когда элементы групповой алгебры фундаментальной группы заменяются на числовые матрицы, а симметрическая сигнатура — на обычную сигнатуру числовой эрмитовой матрицы. Однако в наиболее интересных примерах фундаментальных групп обычных конечномерных представлений не хватает. Использование теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном венкторном пространстве. Но запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений, слишком беден и для многих фундаментальных групп исчерпывается классической сигнатурой.

Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, который, с одной стороны, расширил запас представлений, а с другой — сохранял естественные свойства конечномерных представлений. Такие представления по существу сводятся к представлениям в C^*-алгебрах произвольного типа или к так называемым относительным представлениям.

Первым примером такого относительного бесконечномерного представления был явилось фредгольмово представление в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмова оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*-алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертова пространства H, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов.

Существенным шагом было построение канонического векторного расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$ с помощью фредгольмова представления группы π. Для применения фредгольмовых представлений к формулам Хирцебруха автору [13] потребовалось установить возможность перехода от семейства фредгольмовых представлений к единичному представлению с тем же самым характером Чженя. Теория фредгольмовых представлений позволила доказывать гипотезу Новикова не только для указанного класса фундаментальных групп. Ученик автора Ю.П.Соловьев применил разработанную технику фредгольмовых представлений для дискретных подгрупп алгебраических групп с помощью комплексов Брюа–Титса [14].

Теория фредгольмовых представлений в 1995 г. была распространена автором [15] на случай непрерывных семейств, контролируемых на бесконечности, что дало возможность применить аналогичную технику и для фундаментальных групп, классифицирующие пространства которых не обязательно компактны. Более того, им [16] была предложена общая схема метрического подхода к построению фредгольмовых представлений фундаментальной группы, которая сводит задачу к построению специального пополнения классифицируещего пространства и решению уже чисто гомотопической задачи на последнем.

Теория фредгольмовых представлений, построенная в работах автором, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*-алгебр в виде некоторого варианта топологической K-теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. Автор совместно с Ю.П.Соловьевым [17] разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуанкаре. Таким образом, с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не действует.

4. Метрический подход к построению фредгольмовых представлений. Чтобы максимально расширить класс фредгольмовых представлений, автор рассмотрел так называемый метрический подход к построению фредгольмовых представлений, который излагается ниже.

Пусть T — конечная сумма экземпляров регулярного представления группы π, а Φ — блочно диагональный оператор, задаваемый в виде матричнозначной функции $F(g),\ F(g): V \longrightarrow V\ g \in \pi$. Пусть $H = \bigoplus_{g\in\pi} V_g,\ V_g \equiv V, T_h : H \longrightarrow H,\ V_g \longrightarrow V_{hg}$. Условие фредгольмовости оператора Φ означает, что

$$\|F(g)\| \leq C,\ \|F^{-1}(g)\| \leq C \tag{3}$$

для всех $g \in \pi$ за исключением конечного числа. Условие коммутирования оператора Φ с действием группы с точностью до компактных операторов означает , что

$$\lim_{|g|\longrightarrow\infty} \|F(g) - F(hg)\| = 0. \tag{4}$$

Таким образом, если пара

$$\rho = (T, \Phi) \tag{5}$$

удовлетворяет условиям (3), (4), то ρ есть фредгольмово представление группы π. Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{B\pi}$ классифицирующего пространства $B\pi$ с левым действием группы π. Согласно конструкции [18], расслоение на пространстве $B\pi$ представляется в виде эквивариантного непрерывного семейства фредгольмовых операторов на пространстве $E\pi = \widetilde{B\pi}$. Эквивариантность имеется в виду по отношению к диагональному действию на декартовом произведении

$$T_h : E\pi \times H \longrightarrow E\pi \times H,\ (x, \xi) \longrightarrow (hx, T_h(\xi)).$$

Именно пусть пространство $B\pi$ снабжено структурой симлицильного пространства и пространство $E\pi = \widetilde{B\pi}$ снабжено структурой симплициального пространства, порожденного накрытием $E\pi = \widetilde{B\pi} \longrightarrow B\pi$. Пусть $\{x_i\}$ — семейство вершин пространства $E\pi = \widetilde{B\pi}$ — по одной из каждой орбиты действия группы π. Тогда каждый симплекс σ пространства $E\pi = \widetilde{B\pi}$ полностью определяется своими вершинами $\sigma = (h_0 x_{i_0}, \ldots, h_n x_{i_n}),\ h_0, \ldots, h_n \in \pi$, а любая точка $x \in \sigma$ однозначно задается в виде выпуклой линейной комбинации вершин: $x = \sum_{k=0}^n \lambda_k h_k x_{i_k}$. Тогда эквивариантное непрерывное семейство фредгольмовых операторов, соответствующее фредгольмову представлению (5) задается по следующей формуле:

$$\Phi_x = \sum_{k=0}^n \lambda_k \Phi_{h_k x_{i_k}} = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_{h_k} \Phi_{x_{i_k}} T_{h_k}^{-1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_{h_k} \Phi T_{h_k}^{-1}. \tag{6}$$

Следовательно

$$(\Phi_x)_g = \sum_{k=0}^n \lambda_k F_{h_k^{-1} g}. \tag{7}$$

Очевидно, семейство (6) эквивариантно. В самом деле, $hx = \sum_{k=0}^n \lambda_k h h_k x_{i_k}$. Значит,

$$\Phi_{hx} = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_{hh_k} \Phi T_{hh_k}^{-1} = T_h \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k T_{h_k} \Phi T_{h_k}^{-1} \right) T_h^{-1} = T_h \Phi_x T_h^{-1}.$$

Очевидно также, что операторы (6) фредгольмовы в силу условий (3) , (4) и (7). С другой стороны, операторы $F(g)$ порождают непрерывное семейство

$$F_x : V \longrightarrow V,\ x \in E\pi$$

по формуле $F_x = \sum_{k=0}^n \lambda_k F(h_k^{-1})$, которое можно рассматривать как линейное отображения тривиального расслоения

$$F_x : E\pi \times V \longrightarrow E\pi \times V. \tag{8}$$

Рассмотрим универсальное накрытие $p: E\pi \longrightarrow B\pi$. Обозначим $\mathcal{K}^i(E\pi) = \lim_{\leftarrow} K^i_c(p^{-1}(X))$, где обратный предел берется по направленному множеству всех компактных подмножеств $X \subset B\pi$.

Теорема 1 . *При помощи отображения (8) однозначно определяется элемент $F(\rho) \in \mathcal{K}^0(E\pi)$.*

Рассмотрим прямой образ расслоения (8) над базой $B\pi$: $A \longrightarrow B\pi$, в котором слоем является прямая сумма слоев расслоения (8) над каждой орбитой действия группы π в пространстве $E\pi$. Тотальное пространство A определяется как $A = \{(u,\xi) : u \in B\pi, \xi \in \bigoplus_{x\in u}(x \times V)\}$. Пусть $\tilde{A} \longrightarrow E\pi$ есть обратный образ расслоения A. Тотальное пространство $\tilde{A}$ определяется как

$$\tilde{A} = \{(x,\xi) : x \in E\pi, \xi \in \bigoplus_{y\in[x]}(y \times V)\} = \{(x,\xi), x \in E\pi, \xi \in \bigoplus_{g\in\pi}(gx \times V)\}.$$

На тотальном пространстве $\tilde{A}$ зададим действие группы π по формуле $f_h(x,\xi) = (hx,\eta)$, $\xi = \oplus\xi_g \in \bigoplus_{g\in\pi}(gx \times V)$, $\eta = \oplus\eta_g \in \bigoplus_{g\in\pi}(ghx \times V)$, $\eta_g = \xi_{gh}$. Очевидно, что $A = \tilde{A}/\pi$. С другой стороны, имеется изоморфизм между расслоениями:

$$\varphi : E\pi \times \bigoplus_{g\in\pi} V_g \longrightarrow \tilde{A}, \quad \varphi(x, \oplus\xi_g) = (x, \oplus\xi_{g^{-1}}), \tag{9}$$

который является эквивариантным. Далее, отображение (8) переходит в отображение прямого образа в виде отображения

$$\tilde{F} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A},\ \tilde{F}(x, \oplus\xi_g) = (x, \oplus F_{gx}(\xi_g)) = \left(x, \oplus \sum_{k=0}^{n} \lambda_k F_{h_k^{-1}g^{-1}}(\xi_g)\right). \tag{10}$$

Ясно, что отображение (10) при изоморфизме (9) переходит в отображение (6). Таким образом, доказана следующая

Теорема 2 *Рассмотрим фредгольмово представление группы π вида (5) и пусть $\xi_\rho \in \mathbf{K}(B\pi)$ – элемент, задаваемый отображением (6) . Тогда $p_!(F(\rho)) = \xi_\rho \in \mathbf{K}^0(B\pi)$, где $p_! : \mathcal{K}^0(E\pi) \longrightarrow \mathbf{K}^0(B\pi)$ есть прямой образ в K-теории.*

Зададим на декартовом произведении $E\pi \times V$ действие группы π как левое действие по первой координате и тождественное по второй. Рассмотрим такую максимальную компактификацию $\overline{B\pi}$ пространства $\widetilde{B\pi}$, что для любой непрерывной на $\overline{B\pi}$ функции f выполняется условие

$$|f(xg) - f(yg)| \longrightarrow 0,\ |g| \longrightarrow \infty.$$

Тогда всякое непрерывное отображение пары

$$f : (\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi}) \longrightarrow (B(V),\ U(V)) \tag{11}$$

определяет фредгольмово представление ρ. Отображение (11) определяет также элемент $[f] \in K^0(\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi})$. Прямой образ элемента $[f]$ совпадает с каноническим элементом $\hat{\rho}(\xi_A) \in K^0(B\pi)$, порожденным представлением ρ. Таким образом, задача о построении достаточного запаса фредгольмовых представлениий сводится к изучению гомотопического типа пары $(\overline{B\pi},\ \overline{B\pi}\backslash\widetilde{B\pi})$. Например, если пространство $B\pi$ является компактным многообразием, а пространство $\widetilde{B\pi}$ компактифицируется до диска с продолжением действия группы π, получаем новое доказательство гипотезы Новикова в случае, рассмотренном в [20]. Результат обобщается на случай некомпактного многообразия $B\pi$, если пространство $B\pi$ допускает меньшую, чем $\overline{B\pi}$, компактификацию до диска с продолжением действия группы π.

Работа частично поддержана РФФИ (грант No 02-01-00574) и фондом "Российские университеты"(проект УР.04.03.009).

Список литературы

[1] *Connes A.* Noncommutative Geometry. N.Y., Academic Press, Inc. 1994.

[2] *Мищенко А. С.* Проблема инвариантности характеристических классов гладких многообразий// Вестн. Моск. ун-та. сер. 1, Матем., Механ. 1979.No. 6. 18–23.

[3] *Понтрягин Л. С.* Классификация некоторых косых произведений // Докл. АН СССР. 1945. **47,** No. 5. 327–330.

[4] *Понтрягин Л. С.* Характеристические циклы дифференцируемых многообразий // Матем. сб. 1947. **21,** No. 2. 233–284.

[5] *Hirzebruch F.* On Steenrod's reduced powers, the index of interia, and the Todd genus // Proc.Nat,Acad.Sci. U.S.A. **39. 1953.** 951–956.

[6] *Рохлин В. А.* Новые результаты в теории 4–х мерных многообразий // Докл. АН СССР. **84. 1952.** 221–224.

[7] *Пуанкаре А.* Analysis situs. Перевод в книге: Избранные труды в трех томах, М., "Наука" **II. 1972.** 457–548.

[8] *Пуанкаре А.* Дополнение к "Analysis situs". Перевод в книге: Избранные труды в трех томах, М., "Наука" **II. 1972.** 549–593.

[9] *Александров П. С.* Пуанкаре и топология. В книге: *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. М., "Наука" **II. 1972.** 807–816.

[10] *Каспаров Г. Г.* О гомотопической инвариантности рациональных чисел Понтрягина// Докл. АН СССР. 1970. **190,**No. 5. 1022-1025.

[11] *Wall C. T. C.* Surgery on Compsct Manifolds London Math. Soc. Monographs, vol 1, Academic Press, L.; N. Y. 1970.

[12] *Мищенко А. С.* Гомотопические инварианиты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты // Изв. АН СССР, Сер.матем. 1970. **34,** No. 3. 501–514.

[13] *Мищенко А. С.* О фредгольмовых представлениях дискретных групп // Функц. анализ и его приложения. 1975. **9,** No. 2. 36–41.

[14] *.Соловьев Ю. П* Дискретные подгруппы, комплексы Брюа-Титса и высшие сигнатуры // Успехи матем. наук. 1976. **31,** No. 1. 261–262.

[15] *Mishchenko A. S.* Controlled Fredholm representations // Novikov Conjectures, Index Theorems and Ridgidity. London Math. Soc, Lect. Notes Ser., v. 226. 1995. **1.** 174–200.

[16] *Мищенко А. С.* Метрический подход к построению фредгольмовых представлений// Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения П.С.Александрова. М., 1996.) 2.

[17] *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П.* Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха// Матем. сб., Новая серия. 1980. **111,** No. 2. 209–226.

[18] *Мищенко А. С.* Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры// Изв. АН СССР, сер. матем. 1974. **38,** No. 1. 81–106.

[19] Mishchenko, A.S, C^*–algebras and K-theory, Algebraic topology (Aarhus, 1978),Lecture Notes in Mathematics, (1979), 763, pp. 262–274, MR 81d:58049",

[20] *Farrell F. T., Hsiang W. C.* On Novikov's conjecture for non–positively curved msnifolds, I // Annals of Mathematics 1981. **113.** 199–209.

Поступила в редакцию
20.12.02

Адрес:
Мищенко Александр Сергеевич
Механико-математический факультет
Московский Государственный университет
Ленинские Горы
119992 ГСП-2 Москва
домашний телефон: 434-5643
служебный телефон: 939-3798

УДК 513.8

Развитие некоммутативной геометрии в Московском университете/ Мищенко А. С.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. № 3. С.

В работе излагается краткий обзор результатов, методов и идей, которые разрабатывались в Московской топологической школе и послужили одним из источников возникновения и развития некоммутативной геометрии. В заключение излагаются новые результаты, основанныне на применении функциональных методов при отыскании гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий.

Библиогр. 19.

Development of non commutative geometry at Moscow University
Mishchenko A. S.