Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико–математический факультет

Цикл работ
”Исследование инвариантов гладких многообразий и динамических систем”
(Реферат)

Фоменко Анатолий Тимофеевич

доктор физико–математических наук, профессор, академик РАН,
заведующий кафедрой дифференциальной геометрии и приложений
механико–математического факультета
Московского Государственного университета им. М.В.Ломоносова

Мищенко Александр Сергеевич

доктор физико–математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей геометрии и топологии
механико–математического факультета
Московского Государственного университета им. М.В.Ломоносова

Цикл работ посвящен исследованиям инвариантов гладких многообразий и динамических систем, которые проводились с 1970 по 1994 год. Теория гладких многообразий и динамических систем на гладких многообразиях составляет одно из главнейших напарвлений развития геометрии и топологии и представляет собой систему геометрических методов исследования математических задач, возникающих в теории дифференциальных уравнений как обыкновенных так и в частных производных, в частности в классических задачах математической физики.

Методы решения задач уравнений математической физики разнообразны, начиная от дифференциального и интегрального исчисления и кончая теоретико-функциональными методами. Если последние в основном относятся к исследованию решений задач математической физики в малом или в их линейном приближении, то при попытках исследовать их в целом, а также при учете нелинейных эффектов естественным образом требуется применять существенно геометрические и топологические методы исследования.

Класическими примерами плодотворного применения геометрических методов в теории дифференциальных уравнений являются теория Лиувилля интегрирования динамических гамильтоновых систем на гладких многообразиях и теория Атья– Зингера об индексе эллиптических операторов на замкнутых многообразияхю В обеих случаях наиболее эффектные результаты получатся благодаря применению всей совокупности разработанных на тот момент времени геометрических и топологических методов исследования инвариантов гладких многообразий и ассоциированных с ними геометрических структур.

Представляемый цикл работ концентрируется вокруг нескольких основополагающих геометрических и топологических задач, объединяемых как общностью целей и нуждами приложений, так и методами исследования, вытекающими из внутренней структуры геометрии и топологии объектов исследования. Тем не менее эти задачи можно разбить в несколько групп, которые объединяются не по типам их приложений, а по логике исследования чисто внутренних геометрических и топологических задач. Четкой грани между этими группами задач не существует , поскольку многие результаты из одной группы существенно используются в другой, и наоборот. Более того, исследовнаия, представленные в настоящем цикле находятся на стыке нескольких классических математических дисциплин, что таким образом затрудняет дать им формальную классификацию. С другой же стороны, использование различных методов исследования – геометрических, топологических, алгебраических, функциональных, – позволило авторам получать результаты более глубокие, чем рассмотрение тех же задач с помощью какого либо одного метода. Наконец, это также позволило в ряде случаев вскрыть глубокие закономерности в геометрии и топологии и их взаимосвязь с другими математическими объектами, происходящими из алгебры, функционального анализа, теории уравнений математической физики.

К первой группе проблем мы относим разработку алгебраических и дифференциально–геометрических методов исследования структуры гамильтоновых динамических систем на симплектических многообразиях, дапускающих богатую группу симплектических симметрий. Фактически, данная постановка проблемы проистекает из классической теоремы Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы с n степенями свободы при наличиии n независимых попарно коммутирующих первых интеграла динамической системы. Согласно теореме Неттер существование первых интегралов гамильтоновой системы обусловлено наличием однопараметрической группы симплектических симметрий динамической системы. Эта теорема Неттер легко обобщается на случай, когда семейство симплетических симметрий гамильтоновой динамической системы может быть представлено как конечномерная (некоммутативная) группа Ли симплектических преобразований симплектического многообразия, сохраняющая гамильтоново векторной поле. Переходя к инфинитезимальному представлению, немедленно получается конечномерное пространство первых интегралов, которое снабжено естественной структурой конечномерной (некоммутативной) алгебры Ли относительно опреации взфтия скобки Пуассона, ассоциированной с симплектической структурой на симплектическом многообразии. Теорема Марсдена–Вэйнстейна позволяет произвести по крайней мере локально редукцию гамильтонового векторного поля к новому гамильтоновому векторному полю на симплектическом многообразии меньшей размерности, которое получается из поверхности совместного уровня первых интегралов путем его факторизации по действию стацтонарной подгруппы в группе симметрий.

Существенным шагом в настоящем исследовании оказалось выяснение геометрической природы условий полной интегрируемости в случае наличия некоммутативной группы Ли симплектических симметрий. В 1977 году авторы нашли естественные алгебро–геометрические условия, при которых наличие конечномерной некоммутативной алгебры Ли первых интегралов автоматически влечет полную интегрируемость гамильтоновой динамической системы в классическом смысле. Этот обощенный способ интегрирования имеет по крайней мере два аспекта. Во–первых, сами условия фермулируются в простой и естественной форме и заключаются в том, что размерность симплектического многообразия, на котором действует гамильтонова динамическая система, равняется сумме развмерности алгебры Ли первых интегралов и индекса этой же алгебры. В случае попарно коммутирующих первых интегралов соответстующая алгебра Ли является абелевой, т.е. ее индекс совпадает с размерностью, что дает в качестве частного случая классическую теорему Лиувилля. Таким образом обобщенные условия полной интегрируемости позволяют вскрыть геометрическую природу естественных классических условий полной интегрируемости гамильтоновых систем по Лиувиллю.

Во–вторых, как показывают многочисленные классические примеры гамильтоновых систем, возникающих в механике, естественные первые интегралы, происходящие из наличия симметрий, порожденных физичекими условиями, как правило не образуют коммутативной алгебры Ли. Поэтому проблема нахождения достаточной системы коммутипрющих первых интегралов всегда представляла нетривиальную задачу, а их наличие представлялось несколько загадочным. Типичным примером в механие гамильтоновой динамической системы, имеющей богатый запас симметрий, является динамический поток на фазовом пространстве группы Ли, задаваемый левоинвариантной функцией Гамильтона. Условие левой инвариантности функции Гамильтона выполняется во многих механических динамических системах, в частности, при описании динамики движения n–мерного твердого тела с закрепленной точкой в центре массы. В последнем случае система первых интегралов образует алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы $SO(n)$.

В той же работе авторы исследовали вопрос, когда наличие условий некоммутативной полной интегрируемости можно переработать в условия полной интегрируемости в классическом, коммутативном смысле. Эти условия связаны не со свойствами симплектического многообразия и гамильтонового векторного поля на нем, а с адгебраическими свойствами соответствующей некоммутативной алгбры Ли первых интегралов гамильтонового векторного поля. Найдены достаточно широкие естественные условия на струтуру конечномерной алгебры Ли, при которых некоммутативная теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы влечет классическую коммутативную теорему Лиувилля. Этот ворос сводится к задаче полной интегрируемости некоторых специальных гамильтоновых систем на фазовом пространстве группы Ли. В частности, этот вопрос в случае группы $SO(n)$ сводится к полной интегрируемости динамики движения твердого тела, который был проанализированн авторами ранее и в более общей ситуации полупростых групп Ли.

Вопрос о полной интегрируемости движения n–мерного твердого тела, как естественное обобщение задачи о движении трехмерного твердого тела интересовал исследователей уже давно, как в связи с попытками понять геометрическую природу гамильтоновой механики трехмерного твердого тела, так и в связи с наличием глубоких связей этой задачи с другими задачами математической физики, описываемыми, например, уравнениями Кортевега–де Фриза. Эта задача была поставлена в 1966 году В.И.Арнольдом. В 1970 году Мищенко А.С. нашел дополнительную серию первых интегралов для движения n–мерного твердого тела. Однако она давала полную интегрируемость помимо трехмерно твердого тела еще только в четырехмерном случае.

Вторая группа вопросов посвящена нахождению по возможности наиболее полной системы инвариантов гладких многообразий без учета каких либо дополнительных структур, оснащаемых многообразие. Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффециентови определеяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий бесспорно занимает наиболее существенным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а также потому, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом по модулю конечного числа возвожностей. Однако, система характеристических классов является в некотором смысле переопределенной системой данных. Более строго это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому, одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса , т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразии. Если в случае топологической инвариантности характеристических классов проблема практически полность была решена еще в работах С.П.Новикова, то в случае их гомотопической инвариантности эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время. С другой стороны, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов представляется достаточно вжаной проблем в силу того, что гомотопический тип многообразия представляется более доступным для классификации, по сравнению с его топологическим типом. Более того, существующие методы классификации гладких структур на многообразии сводят эту проблему к описанию гомотопического типа многообразия и кего гомологическим инвариантам. Таким образом, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов в различных математических школах представлялась как одна из существенных проблем в диффренциальной топологии.

Интерес к этой проблеме дополнительно поддерживается еще и потому, что в отличие от других топологических проблем наиболее существенную роль в этой проблеме играет фундаментальная группа многообразия, описание и распознавание которой в конечных терминах, как известно, невозможо. Точная формулировка проблемы известна под названием гипотезы Новикова, положительное решение которой позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии. Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\operatorname{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$– отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, – является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\operatorname{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\operatorname{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M.

Для односвязных многообразий гипотеза Новикова сводится согласно формуле Хирцебруха к утверждению о том, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что является следствием гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом является только классическая сигратура многообразия. Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью установлена в классических работах 60-х годов.

Совершенно отличная от случая односвязных многообразий является ситуация с неодносвязными многообразиями. В 1970 А.С.Мищенко установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры. Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. В частности это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению норамальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом колце $Q\pi$.

В последующих работах 1974–1975 гг. А.С.Мишенко применил метод теории фредгольмовых представлений, позволивший ему установить гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. Применение теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном венкторном пространстве. Однако запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений слишком беден, и для многих фундаментальных групп сводится только к классической сигнатуре. Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, которые, с одной стороны, расширили запас представлений, а, с другой, сохраняли естественные свойства конечномерных представлений. Этот бесконечномерный аналог представлений заключается в новой теоретико–функциональной конструкции в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмового оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*–алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертового пространства H, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов.

Теория фредгольмовых операторов , построенная в работах А.С.Мищенко, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*–алгебр в виде некоторого варианта топологической K–теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. Первоначальное доказательство формул Хирцебруха для случая фредгольмовых представлений основывалось на локальных свойствах эллиптических операторов на компактном многообразии. Позднее А.С.Мищенко разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуканкаре. Основная теорема о свойствах пучков алгебраических комплексов Пуанкаре, доказанная А.С.Мищенко, устанавливает решающее свойство пучков, которое заключается в том, что модуль глобальных сечений пучка алгебраических комплексов Пуанкаре является алгебраическим комплесом Пуанкаре, т.е. удовлетворяет двойственности Пуанкаре, в случае, когда в качестве базы выбирается кусочно линейное многообразие. Таким образом , с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не действует.

Тем не менее в 1978 авторы предприняли исследование по изучению гомотопических свойств эллиптических операторов с коэффициентами в произвольной C^*–алгебре. Такие операторы естественным образом возникают в различных задачах теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях. Эти операторы не являются фредгольмовыми операторами в классическом смысле, однко как ядро, так и коядро таких операторов представляются как конечно порожденные проективные модули над C^*–алгеброй, и, следовательно, являются единственными гомотопическими инвариантами эллиптического оператора. Авторы установили формулы для индекса эллиптических операторов над произвольной C^*– алгеброй, обобщающие формулы Атья–Зингера. В частности, было получено третье доказательство обобщенных формул Хирцебруха. Теория эллиптических операторов на C^*–алгебрами нашли в дальнейшем многочисленные применения как для уравнений в частных производных, так и для задач геометрии и топологии, равным образом в теории банаховых алгебр и C^*–модулей. В частности, с помощью этой теории в дальнейшем исследовались гомотопические и спектральные свойства эллиптических операторов на некомпактном пространстве R^n с быстро убывающими, почти периодическими или случайными коэффициентами. В топологии эта теория нашла применение для изучения $\ddagger_2$–когомологий некомпактных многообразий, аналитического кручения, инварианта Новикова–Шубина , циклических когомологий и др.

Теория фредгольмовых представлений нашла оригинальное применение в дифференциальной геометрии многообразий, допускающих риманову метрику неположительной секционной кривизны. Этот класс многообразий обладает замечательным топологическим свойством быть классифицирующим пространством своей фундаментальной группы. Класс таких многообразий достаточно широк, в него, в частности, входят однородные пространства полкпростых групп Ли профакторизованных по левому действию некоторой дискретной подгруппы. В 1974 году А.С.Мищенко для этого класса компактных многообразий построил естественное семейство фредгольмовых представлений фундаментальной группы, характер Черна которого равен самодуальному элементу на декартовом квадрате относительно двойственности Пуанкаре. Этот результат автоматически влечет доказательство гипотезы Новикова для соответствующих фундаментальных групп, что представляет собой решение крупной научной проблемы в теории инвариантов гладких многообразий. Все группы указанного типа многообразий являются так называемыми гиперболическим группами. Дальнейшие попытки различных авторов расширить класс групп, для которых справедлива гипотеза Новикова, не выходит за рамки класса групп гиперболического типа, причем методы исследования по существу основаны на разработанной А.С.Мищенко теории фредгольмовых представлений, эллиптических операторов над C^*–алгебрами и C^*– модулей. В настоящее время теория C^*-алгебр и C^*–модулей получила дальнейшее развитие как в работах А.С.Мищенко и его учеников, так и в работах других математических школ в мире. По тематике, созданной авторами проводятся международные конференции, примером которой может служить конференция в Обервольфахе (Германия) в 1993 году.