Программа
курса "Классическая дифференциальная геометрия и топология"

(математики, 2-й курс, лектор - А.С.Мищенко)
Весенний семестр

1. Конфигурационное пространство, аналитическая и векторная запись задач геометрии и механики.
2. Регулярные замены координат. Матрица Якоби. Якобиан замены координат. Координатные линии, примеры.
3. Полярные и цилиндрические координаты. Их особые точки и якобианы замены координат.
4. Сферические координаты. Их особые точки и якобианы замены координат.
5. Гладкие кривые, вектор скорости. Длина кривой в декартовых координатах.
6. Независимость длины кривой от выбора параметра.
7. Вычисление длины кривой в криволинейной системе координат.
8. Стереографическия проекция сферы в евклидовом пространстве
9. Псевдосфера. Стереографическия проекция в псевдоевклидовом пространстве.
10. Описание кривых, являющихся образом плоских сечений при стереографической проекции псевдосферы.
11. Сравнение аксиаматики геометрии нп плоскости, сфере и псевдосфере
12. Формулы Френе на плоскости. Натуральный параметр. Кривизна плоской кривой.
13. Формулы для вычисления кривизны плоской кривой.
14. Формулы Френе в трехмерном пространстве. Кососимметричность матрицы Френе. Кривизна и кручение.
15. Формулы для вычисления кривизны и кручения пространственной кривой.
16. Теорема о классификации кривых на плоскости и в пространстве с помощью натуральных уравнений.
17. К–мерные гладкие поверхности–многообразия в области евклидова пространства. Длина кривой в произвольной криволинейной системе координат.

18. Риманова метрика в области евклидова пространства. Закон преобразования компонент метрики.

19. Вычисление углов между пересекающимися кривыми в произвольной криволинейной системе координат..

20. Индуцированная риманова метрика на поверхностях–многообразиях в евклидовом пространстве.

21. Риманова метрика на плоскости и в пространстве. Запись метрики в полярной, цилиндрической и сферической системе координат.

22. Риманова метрика на цилиндре и конусе. Запись метрики в полярной, цилиндрической и сферической системе координат. Сравнение с метрикой на плоскости

23. Риманова метрика на сфере. Запись метрики в различных системах координат.

24. Метрика на плоскости Лобачевского. Различные формы ее записи.

25. Поверхности в пространстве. Касательная плоскость, естественный базис и компонента касательного вектора.

26. Первая квадратичная форма поверхности. Ее явный вид для графика функции.

27. Вторая квадратичная форма. Ее явный вид для графика функции.

28. Кривые на поверхности. Нормальные сечения. Теорема об отношении первой и второй квадратичной форм. Формула Менье.

29. Инварианты пары форм. Главные напрвления и главные кривизны. Теорема об ортогональности главных напрвлений.

30. Теорема о совпадении собственных чисел пары форм с главными кривизнами. Формула Эйлера.

31. Средняя и Гауссовы кривизны для двумерных поверхностей. Геометрический смысл знака Гауссовой кривизны.

32. Вычисление Гауссовой кривизны поврехности в терминах римановой метрики.

33. Геодезические как кратчайшие линии на поврехности. Вывод уравнений Эйлера для минимизации произвольного функционала.

34. Вывод уравнения геодезической линии на поврехности.

35. Топологические пространства. Хаусдорфовость. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм.

36. Связность топологических пространств. Примеры.

37. Компактность топологических пространств.

38. Лемма Урысона о продолжении непрервной функции.

39. Область в евклидовом пространстве, график гладкой функции, неособая поверхность уровня гладкой функции, — как гладкие многообразия. Связь теоремы о неявной функции с гладкими поверхностями.

40. Атлас карт. Разбиение единицы
41. Теорема о том, что существует атлас карт, у которого все карты диффеоморфны евклидовому пространству.
42. Теорема о том, что существует финитная функция $\varphi(x) \geq 0$, у которой $\varphi(x_0) > 0$ и носитель $\mathrm{Supp}(\varphi)$ лежит в сколь угодно малой окркстности точки x_0.
43. Теорема о существовании разбиения единицы, подчиненного данному атласу карт.
44. Касательный вектор и касательное пространство. Равносильность определения касательного вектора как вектора скорости к кривой и как набора компонент, преобразующегося по тензорному закону.
45. Касательный вектор и касательное пространство. Равносильность определения касательного вектора как как набора компонент, преобразующегося по тензорному закону и как оператора дифференцирования гладких функций.
46. Теорема о разложении гладкой функции в конечный ряд Тейлора с гладким остаточным членом.
47. Векторные поля и интегральные кривые.
48. Векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов.
49. Теорема о существовании диффеоморфизма связного многообразия, переводящего заданную точку в любую другую точку.
50. Гладкие отображения поверхностей–многообразий. Дифференциал гладкого отображения. Теорема о независимости размерности гладкого многообразия от выбора атласа карт.
51. Инвариантность ранга матрицы Якоби при заменен локальных координат.
52. Градиент функции как дифференциал отображения в вещественную прямую.
53. Теорема о том, что прообраз регулярной точки гладкого отображения является многообразием.
54. Вложение в евклидово пространство и теорема Уитни.

Список литературы

[1] А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* Университетский учебник. Факторил Пресс, Москва, 2000.

[2] А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Классический университетский учебник. Физматлит, Москва, 2004.

[3] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, и А. Т. Фоменко. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.* Физматлит, Москва, 2-е, перераб. и доп. изд., 2004.