Программа
курса "Линейная алгебра"
для студентов 1-го курса весенний семестр

составитель — А.С.Мищенко

31 октября 2004 г.

1. Понятие вкторного пространства, примеры. Арифметическое пространство, пространство полиномов, пространства финкций.
2. Линейные подпрострнства, линейные оболочки, конечномерные пространства.
3. Линейная зависимость векторов, линейно независимые системы векторов.
4. Разложение векторов в линейную комбинацию линейно незвисимых векторов.
5. Базис векторного пространства. Теорема существования базиса в конечномерном пространстве.
6. Теорема о дополении линейно независимой системы векторов до базиса.
7. Теорема об инвариантности мощности конечных базисов.
8. Теорема о конечности базиса в конечномерном пространстве.
9. Размерность векторного пространства. Теорема об инвариантности размернсти.
10. Классификация конечномерных векторных протсранств.

11. Координаты вектора, закон изменения координат вектора при изменении базиса
12. Сумма и пересечение линейных подпространств, прямая сумма. Фактор пространство.
13. Размерность суммы подпространств. Размерность фактор пространства.
14. Прямая сумма нескольких подпространств.
15. Линейные отображения, ядро и образ. Связь размерностей ядра и образа.
16. Матричная и аналитическая запись линйного отображния при наличии базиса.
17. Изоморфизм, свойства матрицы изоморфизма, матрица обратного изоморфизма.
18. Ранг линейного отображения, совпадение его с рангом матрицы отображения.
19. Векторное пространство линейных отображеий, его размерность.
20. Векторная интерпретация системы линейных уравнений.
21. Линейные операторы, матрица линейного оператора, закон изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса. Тензорная запись.
22. Кольцо линейных операторов, полиномы от операторов.
23. Инвариантные подпространства, собственные значения и собственные вектора.
24. Проекторы и их свойства.
25. Различные условия обратимости оператора. Связь с эпиморфностью и мономорфностью на инвариантных подпространствах.
26. Характеристический многочлен линейного оператора.

27. Детерминант и след линейного оператора
28. Условие существования собственных значений линейного оператора.
29. Вид матрицы оператора, имеющего базис из собственных векторов.
30. Корневые подпространства.
31. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
32. Жорданова клетка и жорданова форма матрицы.
33. Приведение матрицы оператора к жордановой форме.
34. Единственность приведения к жордановой форме.
35. Полиномы от оператора, аннулирующие полиномы. Теорема Гамильтона-Кэли.
36. Функции от оператора, ее вид для жордановой формы.
37. Вещественные и комплексные векторные пространства. Комплексификация и овеществление, канонические базисы.
38. Сравнение матриц операторов при комплексификации и овеществлении.
39. Детерминант комплексификации и овеществления.
40. Приведение матрицы вещественного оператора к нормальной форме.
41. Линейные и полулиненые функции. Пространства линейных функций.
42. Автоморфизмы поля комплексных чисел.
43. Сопряженное пространство, сопряженное линейное отображение.
44. Размерность сопряженного пространства, сопряженный базис.
45. Матричная и аналитическая запись линейной функции.
46. Аннуляторы и их свойства.

47. Билинейные функции, матричная и аналитическая запись.
48. Симметрические и кососимметрические билинейные функции.
49. Теорема о приведении матрицы симметрической функции к диагональному ыиду.
50. Инварианты комплексных симметрических функций.
51. Инварианты вещественных симметрических функций.
52. Евклидовы пространства. Примеры. Координатная и матричная запись скалярного произведения.
53. Ортогональные векторы. Ортонормированный базис. Вид скалирого произведения в ортонормированном базисе.
54. Теорема о существованиии ортонормированного базиса.
55. Процесс ортогонализации базиса в евклидовом пространстве.
56. Норма вектора и расстояние между точками. Неравенство треугольника.
57. Неравенство Коши–Буняковского. Примеры.
58. Угол между векторами и прямыми в евклидовом пространстве.
59. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженные операторы.
60. Самосопряженные и кососопряженнве операторы.
61. Выражение линейной функции в евклидовом пространстве через скалярное произведение.
62. Выражение билинейной функции в евклидовом пространстве через скалярное произведение.
63. Самосопряженные и кососопряженные операторы в евклидовом пространстве.

64. Пары квадратичных форм. Теорема о приведении пары квадратичных форм к диагональному виду.

65. Изометрия евклидового пространства. Общий вид изометрии.

66. Положительно определенные самосопряженные операторы. Критерий Сильвестра.

67. Теорема Якоби о приведении билинейной функции к диагональному виду.

68. Эрмитовы полуторалинейные функции.

69. Гильбертовы пространства, эрмитово скалярное произведение.

70. Неравенство Коши–Буняковского в гильбертовом пространстве.

71. Сравнение эрмитова скалярного произведения с внщнсьвенным скалярным произведением.

72. Выражение линейной (полулинейной) функции с помощью эрмитова скалярного произведения.

73. Унитарные операторы и унитарные матрицы.

74. Приведение унитарного оператора к диагональной форме.

75. Детерминант унитарной матрицы.

76. Нормальный оператор, критерий нормальности оператора.

77. Полярное разложение оператора в гильбертовом пространстве.

78. Теорема шура о приведении матрицы оператора к треугольной форме.

79. Вещественная форма унитарного оператора.

80. Косоэрмитовы операторы. Приведение косоэрмитовых матриц к диагональному виду.

81. Приведение кососимметрических операторов к каноноческому виду.

82. Тензоры, тензорный закон преобразования компонент тензора.

83. Векторы, операторы, линейные и билинейные функции как тензоры.

84. Алгебраические операции с тензорами: сумма, умножение на число. Векторное пространство тензоров, его размерность.

85. Тензорное произведение.

86. Свертка. Линейная функция как результат тензорных операций.

87. Билинейная функция как результат тензорных операций.

88. Перестановка индексов, симметрические и кососимметрические тензоры.

89. Операция альтернирования. Детерминант как результат тензорных операций.

90. Линейное отображение пространства тензоров как тензор.

91. Тензоры как полилинейные функции.

92. Тензорное произведение векторных пространств. Построение базиса.

93. Представление билинейной функции как линейного отображения тензорного произведения.

94. Универсальное билинейное отображение.

95. Разложение тензора в линейную комбинацию простых тензоров.

96. Алгебра кососимметрических тензоров. Операция внешнего умножения.

97. Базис в пространстве косимметрических тензоров.

98. Деление кососиметрического тензора на вектор.

99. Простые кососимметрические тензоры (поливекторы).

100. Теорема о том, что в трехмерном пространстве любой кососимметрический тензор является простым.

101. Оперция поднятия и опускания индекса.

102. Гиперплоскость в векторном и евклидовом пространстве. Векторная запись уравнения гиперплоскости. Нормальный вектор, расстояние до гиперплоскости.

103. Метод наименьших квадратов решения системы линейных уравнений.

104. Квадратичные гиперповерхности в векторном пространстве и их классификация.

105. Квадратичные гиперповерхности в евклидовом пространстве и их классификация.

106. Понятие объема параллелепипеда, детерминант Грама.

Список литературы

[1] Л.А. Алания, С.М. Гусейн-Заде, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов, Д.В. Миллионщиков, А.С. Мищенко, Е.А. Морозова, Т.Е. Панов, М.М. Постников, Е.Г. Скляренко, Ю.М. Смирнов (ред.), и Е.В. Троицкий. *Задачник по аналитической геометрии и линейной алгебре.* Наука-Физматлит, Москва, 2001.

[2] Д.В. Беклемишев. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Наука, М., 1971.

[3] И.М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре.* Наука, М., 1971.

[4] А.И. Кострикин и Ю.И. Манин. *Линейная алгебра и геометрия.* Наука, М., 1986.

[5] М.М. Постников. *Линейная алгебра.* Наука, М., 1986.

[6] В.В. Федорчук. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Изд-во Моск. ун-та, М., 1990.

[7] И.В. Проскуряков. *Сборник задач по линейной алгебре.* Наука, М., 1984.