"Алгебраическая топология"

Программа спецкураса
по выбору кафедры высшей геометрии и топологии
(проект А.С.Мищенко)

1 Теория гомотопий

Гомотопные отображения, гомотопические класы отображений, гомотопическая эквивалентность. Гомотопические группы топологических пространств. Коммутативность гомотопических групп для больших размерностей. Точная гомотопическая последовательность пары. Фундаментальная группа топологического пространства. Пердставление фундаментальной группы для полиэдров. Вычисление фундаментальной группы двумерных поверхностей. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для $k \leq n$. Слабая гомотопическая эквивалентность. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H–пространств.

2 Теория гомологий

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные разбиения пространств. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, из связь с сингулярными. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Эйлерова характеристика. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Надстройки и теорема Фрейденталя. Гомоморфизм Гуревича. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Теорема Гуревича. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Формула универсальных уоэффициентов. Двойственность Пуанкаре для многообразий.

Теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Обобщенные теории гомологий и когомологий. Пространства Эйленберга-Маклейна. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна.

Кольцо когомологий H–пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел. Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана.

3 Теория расслоенных пространств

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Регулярные накрытия. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа.

Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей. Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения.

Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях. Характеристические классы векторных расслоений. Понятие группы $K(X)$.

4 Вычислительные методы

Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения). Спектральная последовательность в (ко)гомологиях расслоения. Формула Кюннета.

Когомологические операции. Оператор Бокштейна. Квадраты Стинрода. Алгебра Стинрода. Спектральная последовательность Адамса.

5 Обобщенные теории (ко)гомологий

Бордизмы и кобордизмы. Операции Новикова-Ландвебера. Спектральная последовательность Адамса-Новикова. Формальные группы в кобордизмах и K–теории.

6 Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий.

Вложения и погружения. Теорема Уитни. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда. Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа. Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления.

7 Исчисление операторов на многообразиях

Когомологии де Рама, теорема де Рама. Оператор Лапласа в диффернциальных формах. Теория Ходжа. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама. Оператор Лапласа и гармонические формы, разложение Ходжа. Двойственность Пуанкаре. Оператор Хирцебруха и вычисление сигнатуры многообразия.

Список литературы

[1] М. Атья. *Лекции по K-теории.* Мир, М., 1967.

[2] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, и А.Т. Фоменко. *Современная геометрия.* Наука, М., 1979.

[3] Д.Б. Фукс, А.Т. Фоменко, и В.Л. Гутенмахер. *Гомотопическая топология.* МГУ, М., 1969.

[4] Р. Годеман. *Алгебраическая топология и теория пучков.* ИЛ, М., 1961.

[5] П. Хилтон и С. Уайли. *Теория гомологий.* Мир, М., 1966.

[6] Ху Сыцзян. *Теория гомотопий.* Мир, М., 1964.

[7] Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства.* Мир, М., 1970.

[8] М. Каруби. *K-теория.* Мир, М., 1981.

[9] Дж. Милнор и Дж.Д. Сташеф. *Характеристические классы.* Мир, М., 1979.

[10] R Palais. Seminar on the atiyah–singer index theorem. In *Ann. of Math. Stud.*, number 57. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J, 1965.

[11] М.М. Постников. *Лекции по алгебраической топологии.* Наука, М., 1985.

[12] *Расслоенные пространства и их приложения.* ИЛ, М., 1958. Под редакцией В.Г.Болтянского, Е.Б.Дынкина, М.М.Постникова.

[13] В.А. Рохлин и Д.Б. Фукс. *Начальный курс топологии.* Наука, М., 1977.

[14] Э. Спеньер. *Алгебраическая топология.* Мир, М., 1971.

[15] Н.Ф. Стинрод. *Топология косых произведений.* ИЛ, М., 1953.

[16] Н. Стинрод и С. Эйленберг. *Основания алгебраической топологии.* ФизМатЛит, М., 1958.

[17] Н. Стинрод и Д. Эпстейн. *Когомологические операции.* Мир, М., 1973.

[18] Р. Стонг. *Заметки по теории кобордизмов.* Мир, М., 1973.

[19] Р.М. Свитцер. *Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии.* Наука, М., 1985.