

П.Г. Гриневич

“Римановы поверхности” – 2024

Программа курса

1. Риманова поверхность функции $\sqrt[k]{z}$. Риманова поверхность алгебраической функции. [1], [2], глава 1; [3].
2. Аналитическое продолжение голоморфной функции вдоль кривой. Риманова поверхность аналитической функции. [1], глава III; [2], глава 3.
3. Риманова поверхность функции, допускающей аналитическое продолжение вдоль любой кривой на плоскости с выброшенным дискретным множеством точек. Точки ветвления, их кратность. [3]; [1], глава III; [2], глава 3.
4. Компатификация римановых поверхностей с конечным числом листов и конечным числом точек ветвления. Локальные параметры вблизи регулярных точек и точек ветвления (конечных и бесконечных).
5. Топологическая классификация компактных римановых поверхностей. Род римановой поверхности. [2], глава 5.
6. Риманова поверхность как результат склейки сторон $4g$ -угольника. [2], глава 5; [9], глава 2.
7. Циклы на компактных ориентируемых двумерных многообразиях. Канонический базис. Индекс пересечения. Когомологии де Рама компактных ориентируемых двумерных многообразий. [2], глава 5
8. Функции, векторные поля и дифференциалы на римановой поверхности. [2], глава 10.

9. Голоморфные дифференциалы на гиперэллиптической поверхности: явные формулы. [9].
10. Выражение для рода римановой поверхности в терминах нулей и полюсов мероморфного векторного поля. Выражение для рода римановой поверхности в терминах нулей и полюсов мероморфного дифференциала. [2], [9]
11. Гильбертово пространство дифференциалов на компактных римановых поверхностях $\mathcal{L}(\Gamma)$. Разложение $\mathcal{L}(\Gamma) = E \oplus E^* \oplus H$, где E -пространство точных дифференциалов, E^* -пространство коточных дифференциалов, H -пространство гармонических дифференциалов. Оператор сглаживания, гладкость элементов из H . [2], глава 7.
12. Теоремы существования для голоморфных и мероморфных дифференциалов. [2], глава 8.
13. Пространство Тейхмюллера и пространство модулей эллиптических кривых. [5], глава 2.
14. Билинейные соотношения Римана. [2], глава 10; [9], глава 2.
15. Канонический базис дифференциалов. [9] глава 2.
16. Теорема Римана-Роха. [2], глава 10; [4], лекция 5.
17. Матрица Римана, ее симметрия и положительность мнимой части. [2], глава 10; [9] глава 2.
18. Преобразование Абеля, якобиан кривой. [9] глава 2.
19. Эллиптические функции Вейерштрасса. Свойства периодичности. [5, 6, 7].
20. Эллиптические функции Якоби. Свойства периодичности. [5, 6, 7].
21. Тета-функции одной переменной. Выражение эллиптических функций через тета-функции. [5, 6, 7].
22. Обращение преобразования Абеля для эллиптических кривых. [5, 6].

23. Тета-функции Римана многих переменных. Свойства периодичности. [9] глава 1; [11]; [12]; [13].
24. Решение задачи об обращении преобразования Абеля. Вектор римановых констант. [9]; [11]; [12].
25. Уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ). Представление КдФ в форме Лакса. [10], [8].
26. Риманова поверхность периодического потенциала одномерного оператора Шредингера. Понятие конечнозонного потенциала. [10], [8].
27. Линеаризация динамики конечнозонных решений КдФ на якобиане. [10], [8], [9], [13].
28. Формула Итса для собственной функции конечнозонного оператора. [9], [13].
29. Формула Итса-Матвеева для конечнозонных решений КдФ. [8] [9], [13].

Список литературы

- [1] Шабат Б.В. “Введение в комплексный анализ”, т.1.
- [2] Спрингер Дж., “Введение в теорию римановых поверхностей” — М.: ИЛ, 1960.
- [3] Алексеев В.Б., “Теорема Абеля в задачах и решениях” — М.: МЦНМО., 2001.
- [4] Львовский С.М., Спец.курс. Римановы поверхности: <https://math.hse.ru/spec-ri-man>.
- [5] Ахиезер Н.И., “Элементы теории эллиптических функций”, М.: Наука, 1970.
- [6] Абрамовиц М., Стиган И., “Справочник по специальным функциям”. М: Наука, 1979.

- [7] Бейтмен Г., Эрдейи А., “Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе”. М.: Наука, 1967.
- [8] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П., “Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, УМН, 31:1(187) (1976), 55–136;
- [9] Дубровин Б.А., “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, УМН, 36:2(218) (1981), 11–80
- [10] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., “Теория солитонов: Метод обратной задачи”. М.: Наука, 1980.
- [11] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, М.: Мир, 1988, 448 с.
- [12] Fay J. D., “Theta functions on Riemann surfaces”, Lecture Notes in Math., 352, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
- [13] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1994.