П.Г. Гриневич

“Римновы поверхности”

Список задач

1. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt[3]{z^2-1}$;
   (b) $\sqrt[3]{(z-1)^2 z}$;
   (c) $\sqrt[3]{(z^2+1)^2}$.
2. Выделить непрерывные однозначные ветви и построить схему римановой поверхности для функции $\sqrt{z^2}$.
3. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt[4]{z^2+2}$;
   (b) $\sqrt[4]{z^2}$;
   (c) $\sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$;
   (d) $\sqrt[4]{(z^2-1)^3(z+1)^3}$;
   (e) $\sqrt[4]{z(z-1)^3}$.
4. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt{\frac{1}{z-i}}$;
   (b) $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$;
   (c) $\sqrt[4]{\frac{(z+i)^2}{z(z-1)^3}}$.
5. Найти все значения:

(a) $\sqrt[3]{-8}+\sqrt{2i}$;

(b) $\frac{1-\sqrt{-2i}}{\sqrt{-4}}$;

(c) $\sqrt{i+\sqrt{-1}}$;

(d) $\sqrt[4]{(1+i)^2}$;

(e) $(\sqrt{i}+\sqrt{i})^2$.

6. Рассмотрим уравнение:

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0.$$

(a) Найдите точки ветвления функции $w(z)$;

(b) Докажите, что группа монодромий $w(z)$ содержит подгруппу $\mathbb{Z}_2$;

(c) Докажите, что группа монодромий $w(z)$ содержит подгруппу $\mathbb{Z}_5$;

(d) Докажите, что группа монодромий $w(z)$ совпадает с S_5.

7. Вычислите индексы особых точек векторных полей на плоскости:

(a) $z^k \partial z, \quad k > 0$ в точке $z = 0$;

(b) $z^k \partial z, \quad k < 0$ в точке $z = 0$;

(c) $\exp\left[\frac{1}{z}\right] \partial z$ в точке $z = 0$;

(d) $-y\partial_x + x\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

(e) $x\partial_x + y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

(f) $-x\partial_x - y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

(g) $x\partial_x - y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

(h) $(x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$ в точке $x = y = 0$.

8. Вычислите род поверхности $x^n + y^n + z^n = 0$.

9. Для каких p, q существуют **неразветвленные** накрытия поверхности рода p над поверхностью рода q.

10. Вычислить род римановой поверхности через число точек ветвления и число листов накрытия.

11. Рассмотрим регулярную поверхность, заданную алгебраическим уравнением $R(z,w)=0$. Докажите, что дифференциал
$$\omega = \frac{dz}{R_w(z,w)} = -\frac{dw}{R_z(z,w)}$$
не имеет ни нулей ни особенностей вне бесконечно удаленных точек.

12. Рассмотрим уравнение $w^2 = P_n(z)$, где $P_n(z)$ – многочлен степени n без кратных корней. При каких k дифференциал $\frac{z^k dz}{w}$ голоморфен?

13. Докажите, что операция $*$ инвариантна относительно замен координат.

14. Выразите оператор
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
через операторы ∂_z, $\partial_{\bar{z}}$.

15. Докажите, что для $(1,0)$ форм
$$\iint_\Gamma \omega_1 \wedge \overline{*\omega_2} = \frac{1}{i}\iint_\Gamma \omega_1 \wedge \overline{\omega_2}$$

16. Эквивалентны ли относительно действия группы $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ следующие пары целочисленных 2×2 матриц

    (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

    (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

    В данной задаче первая из групп $SL(2,\mathbb{Z})$ действует умножениями слева, вторая – умножениями справа.

17. Докажите, что образующие $\tau \to \tau + 1$, $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ порождают всю группу $SL(2,\mathbb{Z})$:
$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

18. Рассмотрим риманову поверхность $\mu^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6)$. Пусть

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \sim \varepsilon \ll 1, \quad |\lambda_3 - \lambda_4| \sim \varepsilon, \quad |\lambda_5 - \lambda_6| \sim \varepsilon,$$

$$|\lambda_1 - \lambda_3| \sim 1, \quad |\lambda_1 - \lambda_5| \sim 1, \quad |\lambda_3 - \lambda_5| \sim 1.$$

Вычислите асимптотику матрицы Римана для малых ε.

19. Постройте конформное отображение из области

$$|z - 3| \geq 9, \quad |z - 8| \leq 16$$

в кольцо

$$\rho \leq |z| \leq 1.$$

В частности, найдите ρ.

20. Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma : \mu^5 - \lambda^7 + R(\lambda, \mu) = 0$, причем предположим, что

$$R(\lambda, \mu) = \sum_{m,n} r_{m,n} \lambda^m \mu^n, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad 5m + 7n < 35.$$

   (a) Вычислите род Γ;

   (b) постройте базис голоморфных дифференциалов на Γ.

21. Рассмотрим риманову повнрхность $\Gamma : \mu^2 = \prod_{k=1}^{6} (\lambda - \lambda_k)$ и пару точек γ_1, γ_2 на ней. Обозначим L_0 пространство мероморфных функций с полюсами первого порядка в γ_1, γ_2 и обозначим L_1 пространство голоморфных дифференциалов с нулями первого порядка в γ_1, γ_2. Вычислите $\dim L_0 - \dim L_1$ и сопоставьте ответ с теоремой Римана-Роха. Какие пары точек γ_1, γ_2 общего положения, а какие – необщего.

22. Пользуясь тем, что $\wp(z)$ задает отображение

$$\lambda = \wp(z),$$

обратное к отображению Абеля:

$$z = \int\limits_{\infty}^{\lambda} \frac{d\tilde{\lambda}}{\sqrt{4\tilde{\lambda}^3 - g_2\tilde{\lambda} - g_3}},$$

найти разложение в точке $z = 0$ функции $\wp(z)$ с точностью до $o(z^5)$ прямым вычислением с рядами.