

Программа курса линейной алгебры и геометрии
(весенний семестр 2010/11 учебного года, I поток)

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка.
- (2) Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (3) Подпространство. Факторпространство. Теорема о сумме размерностей подпространства и факторпространства.
- (4) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма двух и более подпространств. Внешняя прямая сумма.
- (5) Двойственное пространство. Двойственный базис. Зависимость координат в двойственном пространстве от базиса.
- (6) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности.
- (7) Линейные отображения. Ядро и образ. Теорема о размерности ядра и образа.
- (8) Матрица линейного отображения. Зависимость ее от базиса.
- (9) Линейные операторы. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
- (10) (Не)вырожденные операторы.
- (11) Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля.
- (12) Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
- (13) Многочлены от операторов. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Их корни.
- (14) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (15) Диагонализуемые операторы. Достаточный признак диагонализуемости.
- (16) Приведение матрицы оператора к верхнетреугольному виду для алгебраически замкнутых полей. Операторы с единственным собственным значением. Жордановы клетки.
- (17) Присоединенные векторы. Корневые подпространства.
- (18) Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
- (19) Теорема Жордана о приведении к нормальной форме.
- (20) Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов.
- (21) Композиции комплексификации и овеществления.
- (22) Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов над \mathbf{R} .
- (23) Нормированные векторные пространства. Связь между центрированными выпуклыми множествами и нормами.
- (24) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника. Длины и углы.
- (25) Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая.
- (26) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством.
- (27) Определитель Грама $G(a_1, \dots, a_n)$. Объем n -мерного параллелепипеда. Критерий невырожденности матрицы Грама.
- (28) Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
- (29) Изометрические операторы как операторы, сохраняющие скалярное произведение. Свойство матриц изометрических операторов в ортонормированном базисе.
- (30) Канонический вид унитарного оператора.
- (31) Канонический вид ортогонального оператора.
- (32) Сопряженный оператор. Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
- (33) Нормальные операторы, связь нормальности с диагонализуемостью.

- (34) Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
- (35) Частичные изометрии. Их алгебраическая характеристика.
- (36) Полярное разложение операторов.
- (37) Билинейные, полуторалинейные, квадратичные функции. Правое и левое ядро. Невырожденность.
- (38) Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Анти)симметричные и эрмитовы функции.
- (39) Ортогональное дополнение относительно (анти)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (40) Нормальный вид (анти)симметричных билинейных функций над полями \mathbf{R} и \mathbf{C} , эрмитовых полуторалинейных функций.
- (41) Теорема инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
- (42) Псевдоевклидово, псевдоунитарное и симплектическое скалярные произведения. Группы $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(2m)$. Частные случаи.
- (43) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (44) Приведение пары квадратичных функций к диагональному виду. Обобщенный характеристический многочлен. Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
- (45) Аффинное пространство. Аффинная комбинация точек. Классификация квадрик в аффинном пространстве.
- (46) Тензоры. Полилинейные функции. Примеры. Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
- (47) Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
- (48) Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризация и альтернирование. Альтернирование как проектор.
- (49) Внешнее умножение кососимметрических тензоров, его свойства.
- (50) Базис в пространстве кососимметрических тензоров. Связь между линейной зависимостью и тривиальностью внешнего произведения.