

Программа курса  
«Линейная алгебра и геометрия»  
Лектор проф. Д.В. Миллионщиков  
Весенний семестр 2023/2024 уч.г.

1. Понятие векторного пространства. Примеры векторных пространств. Линейная зависимость и независимость векторов. Линейная оболочка.
2. Основная лемма о линейной зависимости. Алгоритм построения максимальной линейно независимой подсистемы векторов. Базис и размерность векторного пространства.
3. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств как отношение эквивалентности. Теорема об изоморфизме двух конечномерных пространств.
4. Подпространство векторного пространства. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
5. Прямая сумма двух подпространств. Прямая сумма  $m > 2$  подпространств. Критерии того, что набор  $m > 2$  подпространств образует прямую сумму.
6. Двойственное пространство. Двойственный базис. Естественный изоморфизм конечномерного векторного пространства и дважды двойственного пространства.
7. Аннулятор. Два способа задания подпространства.
8. Замена базиса векторного пространства. Матрица перехода.
9. Фактор-пространство и его размерность.
10. Тензорное произведение двух конечномерных векторных пространств.
11. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство треугольника.
12. Линейная независимость ортогональных векторов. Ортонормированные базисы. Ортогональные и унитарные матрицы как матрицы перехода между ортонормированными базисами.
13. Ортогонализация Грама–Шмидта.  $QR$ -разложение невырожденной матрицы.
14. Определитель Грама и многомерный объем.
15. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства. Ортогональное проецирование. Метод наименьших квадратов. Угол между вектором и подпространством.
16. Естественный изоморфизм конечномерного евклидова пространства и двойственного к нему.
17. Аффинное пространство (два определения). Аффинные координаты. Изоморфизм аффинных пространств.
18. Барицентры (аффинные комбинации). Аффинное подпространство. Общий вид аффинного подпространства.
19. Однородность аффинного пространства. Векторизация. Леммы о параллельном переносе. Координатный репер. Аффинные координаты.
20. Аффинные подпространства. Аффинная оболочка.

21. Параметрические уравнения аффинных подпространств. Аффинные пространства и системы линейных уравнений.
22. Линейные отображения векторных пространств. Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения.
23. Ядро и образ линейного отображения. Связь между ядром и образом линейного отображения. Ранг линейного отображения.
24. Линейные операторы. Примеры. Зависимость матрицы линейного оператора от выбора базиса.
25. Теорема об эквивалентности алгебраического и геометрического определений проектора. Теорема о двух проекторах.
26. Собственные векторы и собственные значения оператора. Инвариантные подпространства.
27. Характеристический многочлен линейного оператора. Алгебраическая и геометрическая кратности корня характеристического многочлена.
28. Подстановка оператора в многочлен. Существование аннулирующих многочленов оператора. Минимальный аннулирующий многочлен оператора и его свойства.
29. Существование инвариантных подпространств линейного оператора.
30. Достаточное условие диагонализруемости оператора.
31. Теорема Гамильтона–Кэли.
32. Корневые подпространства и теоремы о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
33. Теорема Жордана о нормальной форме линейного оператора.
34. Единственность жордановой нормальной формы оператора.
35. Корневые подпространства. Прямая сумма корневых подпространств.
36. Функция от оператора. Интерполяционный многочлен.
37. Алгебры с делением. Алгебра кватернионов. Теорема Фробениуса об ассоциативных алгебрах с делением.
38. Сопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве и его свойства.
39. Самосопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве и теорема о его каноническом виде.
40. Унитарный оператор. Теорема о каноническом виде унитарного оператора.
41. Ортогональный оператор. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.
42. Комплексификация пространства и оператора.
43. Комплексификация евклидова пространства.
44. Лемма о вещественном операторе, комплексификация которого диагонализуема.
45. Нормальные операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству нормального оператора. Теорема о каноническом виде нормального оператора (вещественный и комплексный случаи). Канонический вид кососимметрических (косозермитовых) операторов
46. Билинейные функции. Матрица билинейной функции. Размерность пространства билинейных функций на конечномерном пространстве.

- Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.
47. Левое и правое ядро билинейной функции. Ранг билинейной функции и его связь с размерностью ядер.
  48. Симметрические и кососимметрические билинейные функции. Тензорное и внешнее произведение линейных функций.
  49. Квадратичные функции. Восстановление симметричной билинейной функции по соответствующей квадратичной форме. Метод Лагранжа выделения полных квадратов. Нормальный вид квадратичных функций в конечномерном (вещественном, комплексном) пространстве.
  50. Закон инерции для квадратичных форм.
  51. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.
  52. Критерий Сильвестра положительной определенности вещественной квадратичной формы.
  53. Связь между билинейными функциями и операторами в евклидовом пространстве.
  54. Метод главных осей приведения квадратичной формы в евклидовом пространстве.
  55. Приведение пары квадратичных форм. Инварианты пары квадратичных форм.
  56. Экстремальные свойства пары квадратичных форм.
  57. Неотрицательные и положительные самосопряженные операторы. Неотрицательный квадратный корень из неотрицательного оператора.
  58. Полярное разложение оператора в евклидовом и унитарном пространствах.
  59. Канонический и нормальный вид кососимметрической функции в конечномерном евклидовом пространстве.
  60. Ортогональное дополнение относительно (симметричной или кососимметричной) билинейной функции и оценка его размерности.
  61. Симплектические пространства. Симплектический и гамильтонов базисы.
  62. Изотропные и лагранжевы подпространства симплектического пространства.
  63. Два определения тензоров, эквивалентность этих определений.
  64. Операции над тензорами: сложение, умножение на скаляр, свертка. действие подстановки на тензор.
  65. Операция умножения тензоров, базис в пространстве тензоров.
  66. Кососимметрические тензоры типа  $(p,0)$ . Свойства оператора альтернирования.
  67. Внешнее умножение кососимметрических тензоров типа  $(p,0)$  и его свойства.