

Вопросы к экзамену
по курсу «Линейная алгебра и геометрия»
Лектор проф. И.А.Дынников
Весенний семестр 2022/2023 уч.г.

1. Понятие векторного пространства. Линейная зависимость векторов. Ранг системы векторов. Линейная оболочка. Базис и размерность векторного пространства.
2. Системы координат в векторном пространстве. Классификация конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма. Формулы перехода для координат векторов.
3. Векторное подпространство векторного пространства. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы.
4. Факторпространство. Теорема о размерности факторпространства.
5. Прямая сумма пространств. Прямая сумма подпространств. Критерий того, что конечный набор подпространств образует прямую сумму. Дополнительное подпространство. Проецирование.
6. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о гомоморфизме векторных пространств. Критерии того, что линейное отображение конечномерных пространств является изоморфизмом.
7. Двойственное пространство. Двойственный базис. Канонический изоморфизм конечномерного векторного пространства и дважды двойственного пространства. Сопряженное линейное отображение.
8. Два способа задания линейных подпространств и двойственность между ними. Аннулятор. Отображение, сопряженное к проецированию. Образ и ядро сопряженного отображения.
9. Тензорное произведение векторных пространств. Размерность тензорного произведения конечномерных пространств.
10. Канонический изоморфизм между $V \otimes U^*$ и $\text{Hom}(U, V)$ в случае конечномерных пространств.
11. Комплексификация вещественных пространств и о вещественности комплексных. Линейные отображения комплексных пространств с вещественной точки зрения.
12. Матрица линейного отображения. Пространство линейных отображений. Матрица сопряженного отображения.
13. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов. Ранг линейного отображения. Теорема о строении линейного отображения.
14. Прямая сумма и тензорное произведение линейных отображений. Произведение Кронекера матриц.
15. Линейные операторы. Подстановка оператора в многочлен. Существование аннулирующих многочленов. Минимальный многочлен оператора.
16. Инвариантные подпространства линейных операторов. Ядра операторов, полученных подстановкой фиксированного оператора в различные многочлены, их инвариантность и разложение в прямую сумму. Собственные и корневые подпространства оператора.
17. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Существование оператора с наперед заданным характеристическим многочленом.
18. Возвратные последовательности. Фробениусов и жорданов виды оператора сдвига в пространстве возвратных последовательностей.
19. Существование фробениусовой нормальной формы произвольного оператора в конечномерном пространстве.
20. Единственность фробениусовой нормальной формы оператора.
21. Теорема о жордановой нормальной форме оператора с полным набором собственных чисел.

22. Вычисление функции от комплексной матрицы, определенной на спектре этой матрицы.
23. Теорема о том, что алгебраические комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле.
24. Евклидовы и унитарные пространства. Линейная независимость ортогональных векторов. Ортонормированные базисы. Существование ортонормированных базисов. Ортогональные и унитарные матрицы как матрицы перехода между ортонормированными базисами.
25. Неравенство Коши–Буняковского. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство треугольника.
26. Ортогонализация Грама–Шмидта. QR -разложение невырожденной матрицы.
27. Определитель Грама и многомерный объем.
28. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства. Ортогональное проектирование. Метод наименьших квадратов. Угол между вектором и подпространством.
29. Естественный изоморфизм конечномерного евклидова пространства и двойственного к нему.
30. Аффинное пространство (два определения). Размерность аффинного пространства. Аффинные координаты. Классификация конечномерных аффинных пространств. Аффинные отображения.
31. Аффинное подпространство. Общий вид аффинного подпространства в конечномерном пространстве. Взаимное расположение аффинных подпространств.
32. Аффинная оболочка. Пересечение аффинных подпространств. Теорема о размерности аффинной оболочки объединения пары аффинных подпространств.
33. Аффинные евклидовы пространства. Общий перпендикуляр и расстояние между аффинными подпространствами.
34. Билинейные функции. Матрица билинейной функции. Размерность пространства билинейных функций на конечномерном пространстве. Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.
35. Левое и правое ядро билинейной функции. Ранг билинейной функции и его связь с размерностью ядер.
36. Канонический изоморфизм пространства билинейных функций тензорному квадрату двойственного пространства конечномерного пространства.
37. Симметрические и кососимметрические билинейные функции. Ортогональное дополнение и его свойства. Блочно-диагональный вид кососимметрических и симметрических билинейных функций.
38. Квадратичные функции. Восстановление симметричной билинейной функции по соответствующей квадратичной форме при условии, что характеристика основного поля отлична от двух. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Закон инерции для вещественных квадратичных форм.
39. Критерий Сильвестра положительной определенности вещественной квадратичной формы. Критерий неотрицательной определенности вещественной квадратичной формы. Критерий того, что данная матрица является матрицей Грама векторов евклидова пространства.
40. Нормальный вид квадратичных функций в конечномерном комплексном пространстве. Нормальный вид кососимметрической функции в конечномерном пространстве над полем характеристики отличной от двух.
41. Полуторалинейные функции. Матрица полуторалинейной функции и ее преобразование при замене базиса. Эрмитовы и косоэрмитовы функции. Размерность пространства (косо)эрмитовых функций. Восстановление произвольной эрмитовой функции f по значениям на парах равных векторов.
42. Нормальный вид эрмитовой функции. Закон инерции для эрмитовых функций.

43. Симплектические пространства. Симплектический базис. Лагранжевы подпространства, их размерность.
44. Аффинное пространство лагранжевых подпространств, дополнительных к данному лагранжеву подпространству.
45. Изоморфизм пространства операторов в евклидовом (унитарном) пространстве и пространства билинейных (соответственно, полуторалинейных) функций. Сопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве, связь его матрицы с матрицей исходного (в произвольном базисе).
46. Нормальные операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству нормального оператора.
47. Эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы в унитарном пространстве, их канонический вид.
48. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в евклидовом пространстве, их канонический вид.
49. Билинейные (полуторалинейные) функции в евклидовом (унитарном) пространстве. Канонический вид симметрических и кососимметрических билинейных функций в евклидовом пространстве и эрмитовых функций в унитарном пространстве.
50. Положительно (неотрицательно) определенные самосопряженные операторы. Единственность положительного квадратного корня из положительного оператора.
51. Полярное разложение оператора в евклидовом или унитарном пространстве. Его геометрический смысл в случае евклидова пространства.
52. Взаимное расположение линейных подпространств в евклидовом пространстве.
53. Три определения тензоров, эквивалентность этих определений.
54. Операции над тензорами: сложение, умножение на числа, перестановка индексов, тензорное умножение, свертка.
55. Выражение формы объема через метрический тензор в ориентированном евклидовом пространстве. Тензорный вид формул для векторного произведения в трехмерном пространстве.
56. Поднятие и опускание индексов у тензоров в евклидовом пространстве.
57. Кососимметрические тензоры. Внешняя алгебра векторного пространства.
58. Пфаффиан кососимметричной матрицы.
59. Поливекторы. Координаты и соотношения Плюккера.
60. Оператор Ходжа на внешней алгебре евклидова пространства.