

Список вопросов к коллоквиуму по линейной алгебре и геометрии
(весенний семестр 2019/20 учебного года, III поток)

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Понятие об аффинном пространстве.
- (2) Линейная (не)зависимость системы векторов. Размерность.
- (3) Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (4) Подпространство. Размерность подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства. Фактор-пространство.
- (5) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма. Внешняя прямая сумма.
- (6) Линейные функции на линейном пространстве. Их координаты, их зависимость от базиса. Двойственное пространство. Двойственный базис.
- (7) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности.
- (8) Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Зависимость ее от базиса. Пространство линейных отображений, его размерность.
- (9) Ядро и образ линейного отображения. Теорема об их размерностях.
- (10) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника.
- (11) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
- (12) Ортогональное дополнение, его свойства. Проекция и ортогональная составляющая.
- (13) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством.
- (14) Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
- (15) Матрица Грама. Ее изменение при заменах базиса. Объем n -мерного параллелепипеда. Связь невырожденности матрицы Грама и линейной независимости векторов. Неотрицательность определителя.
- (16) Билинейные функции. Линейное пространство $B(V)$. Правое и левое ядро, их размерности. Невырожденность. Полуторалинейные функции.
- (17) Матрица билинейной функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции.
- (18) Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (19) Симметричные билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции в одномерном пространстве. Кососимметричные билинейные функции в одномерном и двумерном пространстве.
- (20) Нормальный вид симметричных билинейных функций над полями \mathbf{R} и \mathbf{C} , эрмитовых полуторалинейных функций.
- (21) Нормальный вид кососимметричных билинейных функций.
- (22) Единственность нормального вида (косо)симметричных билинейных функций. Теорема инерции.
- (23) Теорема Якоби об угловых минорах. Критерий Сильвестра.
- (24) Псевдоевклидовы пространства. Типы векторов в псевдоевклидовых пространствах. Группа $O(p, q)$ псевдоевклидовых замен координат. Описание групп $O(2)$ и $O(1, 1)$.
- (25) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (26) Обобщенный характеристический многочлен. Пример пары квадратичных форм, которую нельзя одновременно привести к диагональному виду.
- (27) Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.