

Программа курса линейной алгебры и геометрии  
(весенний семестр 2015/16 учебного года, III поток)

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Понятие об аффинном пространстве.
- (2) Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (3) Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (4) Подпространство. Размерность подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства. Линейная (не)зависимость относительно подпространства.
- (5) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма двух и более подпространств. Внешняя прямая сумма.
- (6) Линейные функции на линейном пространстве. Их координаты, их зависимость от базиса. Двойственное пространство. Двойственный базис.
- (7) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности.
- (8) Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Зависимость ее от базиса. Пространство  $L(V, W)$ , его размерность.
- (9) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского.
- (10) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
- (11) Ортогональное дополнение, его свойства. Проекция и ортогональная составляющая.
- (12) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством.
- (13) Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
- (14) Матрица Грама. Объем  $n$ -мерного параллелепипеда. Критерий невырожденности матрицы Грама.
- (15) Билинейные функции. Линейное пространство  $B(V)$ . Правое и левое ядро, их размерности. Невырожденность.
- (16) Матрица билинейной функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные функции.
- (17) Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (18) Симметричные билинейные функции в одномерном пространстве. Кососимметричные билинейные функции в одномерном и двумерном пространстве.
- (19) Нормальный вид симметричных билинейных функций над полями  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$ .
- (20) Нормальный вид кососимметричных билинейных функций.
- (21) Единственность нормального вида (косо)симметричных билинейных функций. Теорема инерции.
- (22) Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
- (23) Группы  $O(n)$ ,  $O(p, q)$ ,  $Sp(2m)$ . Их описание в малых размерностях.
- (24) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (25) Обобщенный характеристический многочлен. Пример пары квадратичных форм, которую нельзя одновременно привести к диагональному виду.

- (26) Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
- (27) Линейные операторы. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
- (28) Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля.
- (29) Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
- (30) Диагонализуемые операторы, их характеристика.
- (31) Нильпотентные операторы. Теорема о нормальной форме для нильпотентного оператора (доказательство единственности).
- (32) Аннулирующий многочлен, его существование. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Корни минимального и характеристического многочлена.
- (33) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (34) Корневые подпространства.
- (35) Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
- (36) Теорема Жордана о приведении к нормальной форме (сведение доказательства к нильпотентному случаю).
- (37) Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов.
- (38) Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов над  $\mathbf{R}$ .
- (39) Изометрические операторы как операторы, сохраняющие скалярное произведение. Свойство матриц изометрических операторов в ортонормированном базисе.
- (40) Канонический вид унитарного оператора.
- (41) Канонический вид ортогонального оператора.
- (42) Сопряженный оператор. Инвариантность (для сопряженного оператора) ортогонального дополнения к инвариантному подпространству.
- (43) Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
- (44) Теорема об одновременном приведении к каноническому виду пары самосопряженных операторов.
- (45) Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
- (46) Полярное разложение операторов (доказательство существования только для обратимых операторов).
- (47) Векторы как линейные функции на двойственном пространстве. Полилинейные функции. Операторы как полилинейные функции.
- (48) Тензоры. Их координаты. Координатное определение тензоров.
- (49) Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
- (50) Пример тензора типа  $(0, 2)$ . Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
- (51) Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризация и альтернирование. Внешнее умножение, его свойства.