

## Программа экзамена по линейной алгебре и геометрии, 2013 г.

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Аффинное пространство.
- (2) Линейное подпространство. Линейное многообразие. Факторпространство. Теорема о сумме размерностей подпространства и факторпространства.
- (3) Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты.
- (4) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма.
- (5) Двойственное пространство. Двойственный базис. Пример: двойственное пространство к пространству многочленов степени не выше  $n$  и его базис.
- (6) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм между пространством и его вторым двойственным.
- (7) Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Матрица линейного отображения. Зависимость от базиса.
- (8) Линейные операторы. Ядро и образ оператора. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
- (9) (Не)вырожденные операторы. Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля.
- (10) Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристикация.
- (11) Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Их корни.
- (12) Корневые подпространства. Стабилизация ядер степеней оператора.
- (13) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (14) Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
- (15) Нильпотентные операторы. Теорема о нормальной форме для нильпотентного оператора.
- (16) Теорема Жордана о приведении к нормальной форме.
- (17) Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов. Канонический изоморфизм  $(V_{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} \cong V \oplus V$ .
- (18) Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов над  $\mathbf{R}$ .
- (19) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника.
- (20) Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая.
- (21) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством.
- (22) Метод наименьших квадратов.
- (23) Определитель Грама. Объем  $n$ -мерного параллелепипеда. Критерий невырожденности матрицы Грама.
- (24) Сопряженный оператор.
- (25) Изоморфизмы евклидовых (эрмитовых) пространств. Операторы, сохраняющие скалярное произведение. Изометрии. Частичные изометрии.
- (26) Канонический вид унитарного оператора.
- (27) Канонический вид ортогонального оператора.
- (28) Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
- (29) Нормальные операторы, связь нормальности с диагонализируемостью.
- (30) Положительные операторы. Квадратный корень из положительного оператора.
- (31) Частичные изометрии, их связь с проекторами.
- (32) Полярное разложение операторов.

- (33) Билинейные, полуторалинейные, квадратичные функции. Канонический изоморфизм  $B(V) \cong L(V, V')$ . Правое и левое ядро. Невырожденность.
- (34) Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные и (косо)эрмитовы функции.
- (35) Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (36) Нормальный вид (косо)симметричных билинейных функций над полями  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$ , эрмитовых полуторалинейных функций.
- (37) Теорема инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
- (38) Операторы, сохраняющие невырожденную (косо)симметричную билинейную (эрмитову полуторалинейную) функцию. Соответствующие группы, их описание в малых размерностях.
- (39) Изотропные подпространства в симплектическом пространстве. Лагранжевы подпространства. Существование для любого изотропного подпространства содержащего его лагранжева подпространства.
- (40) Существование дополнительного лагранжева подпространства для любого лагранжева подпространства в симплектическом пространстве.
- (41) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (42) Приведение пары квадратичных функций к диагональному виду. Обобщенный характеристический многочлен. Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
- (43) Тензоры. Полилинейные функции. Примеры. Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
- (44) Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
- (45) Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование как проекторы.
- (46) Внешнее умножение кососимметрических тензоров, его свойства.
- (47) Базис в пространстве кососимметрических тензоров. Связь между линейной зависимостью и тривиальностью внешнего произведения.
- (48) Приводимость кососимметрических тензоров.