

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ / Топология-1/ ВВЕДЕНИЕ В ГОМОТОПИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
Независимый Московский университет
Факультет математики НИУ ВШЭ

Последняя редакция: 18 ноября 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
Список литературы	2
1. Необходимые сведения из общей топологии	3
1.1. Основные понятия	3
1.2. Категории и функторы	6
1.3. Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты	6
1.4. Топология на пространстве отображений	10
Задачи и упражнения	10
2. Операции над топологическими пространствами	12
2.1. Конус, надстройка и джойн	12
2.2. Пространства с отмеченной точкой	14
2.3. Пространства путей и петель	14
Задачи и упражнения	15
3. Гомотопии и гомотопические эквивалентности	16
Задачи и упражнения	16
4. Клеточные пространства	17
4.1. Определение и примеры	17
4.2. Свойство продолжения гомотопии	22
4.3. Теорема о клеточной аппроксимации	24
Задачи и упражнения	27
5. Фундаментальная группа	28
5.1. Определение и основные свойства	28
5.2. Зависимость от отмеченной точки	30
5.3. Фундаментальная группа окружности	31
Задачи и упражнения	33
6. Теорема ван Кампена	33
6.1. Свободное произведение групп	34
6.2. Формулировка и доказательство теоремы	35
6.3. Фундаментальная группа клеточного пространства	38
Задачи и упражнения	40
7. Накрытия	42
7.1. Определение и примеры	42
7.2. Свойство поднятия гомотопии	42
7.3. Накрытия и фундаментальная группа	43
7.4. Теорема о поднятии отображений	44
7.5. Универсальное накрытие	45
7.6. Классификация накрытий	47
7.7. Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера	48
Задачи и упражнения	49
8. Расслоения	50
8.1. Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии	50
8.2. Расслоения в смысле Гуревича и Серра	53
8.3. Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации	53
Задачи и упражнения	56
9. Гомотопические группы	57

9.1. Определение. Коммутативность	57
9.2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары	59
9.3. Гомотопическая последовательность расслоения	61
9.4. Теорема Уайтхеда	62
Задачи и упражнения	63
Предметный указатель	65

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это первая часть базового курса лекций по алгебраической топологии (курсы «Введение в топологию» на механико-математическом факультете МГУ, «Топология-1» в Независимом московском университете и «Введение в гомотопическую топологию» на факультете математики НИУ ВШЭ).

Основная часть курса — начала теории гомотопий. Сюда входит теория клеточных пространств, фундаментальная группа, накрытия, гомотопическая теория расслоений и высшие гомотопические группы.

Данный текст доступен на странице Т.Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: <http://higeom.math.msu.su/people/taras/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ва] В. А. Васильев. *Введение в топологию*. Москва, Фазис, 1997.
- [ВИНХ] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология*. Москва, МЦНМО, 2010.
- [ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фуks. *Курс гомотопической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

1.1. Основные понятия.

Топологическим пространством называется множество X с выделенным набором подмножеств, называемых *открытыми*, которые удовлетворяют следующим условиям:

- (а) пустое множество \emptyset и всё множество X являются открытыми;
- (б) объединение любого набора открытых множеств является открытым;
- (в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Набор \mathcal{T} открытых подмножеств также называется *топологией* на пространстве X .

Если на множестве X введены две топологии \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 , причём каждое подмножество из \mathcal{T}_1 лежит в \mathcal{T}_2 , то говорят, что топология \mathcal{T}_1 *грубее* топологии \mathcal{T}_2 , а топология \mathcal{T}_2 *тоньше* топологии \mathcal{T}_1 .

Самой тонкой топологией на X является *дискретная*, в которой все подмножества открыты, а самой грубой — *антидискретная*, в которой открытыми являются только \emptyset и X .

Замечание. Вместо терминологии *грубая/тонкая* в математике часто используется терминология *сильная/слабая* топология. По этому поводу приведём цитату из книги [ФФ] (стр. 13):

Термины «слабая топология» и «сильная топология» не имеют в математике единого толкования. Мы считаем топологию более слабой, если в ней больше открытых множеств, т. е. меньше предельных точек (у нас слабее всех дискретная топология). Образно выражаясь, слабая топология — это топология, в которой точки слабее притягиваются друг к другу. Противоположная терминология исходит из представления, что в топологическом пространстве точки отталкиваются друг от друга (по отношению к этой терминологии дискретная топология является самой сильной).

Элементы $x \in X$ топологического пространства называются *точками*. Любое открытое множество U , содержащее данную точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств *непрерывно*, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в X .

Пример 1.1. На вещественной прямой \mathbb{R} вводится *стандартная* топология, в которой множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если для любой точки $x \in U$ множество U содержит интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Таким образом, открытые множества на \mathbb{R} — это объединения (возможно, бесконечного числа) интервалов.

В анализе функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Назовем временно такую функцию *ε - δ -непрерывной*.

Предложение 1.2. *Функция f является ε - δ -непрерывной тогда и только тогда, когда она непрерывна как отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая ε - δ -непрерывная функция, и рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой точки $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$ (так как U открыто). Для этого ε ,

согласно определению ε - δ -непрерывности, найдётся такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$, а значит, $x \in f^{-1}(U)$. Мы получили, что для $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta$ влечёт $x \in f^{-1}(U)$. Это означает, что $f^{-1}(U)$ открыто. Итак, отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.

Обратно, пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Выберем $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Интервал $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ открыт, поэтому его прообраз открыт и содержит x_0 . Следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Последнее условие эквивалентно тому, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Итак, функция f является ε - δ -непрерывной. \square

Далее под «пространством» мы будем понимать топологическое пространство, а под «отображением» — непрерывное отображение.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ также непрерывно. Два пространства *гомеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм. Для гомеоморфных пространств X и Y используется обозначение $X \cong Y$.

Обратим внимание, что если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, то отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ может не быть непрерывным.

Пример 1.3. Пусть X представляет собой множество из двух элементов с дискретной топологией, а Y — то же множество с антидискретной топологией. Тогда тождественное отображение $X \rightarrow Y$ непрерывно, а его обратное — нет.

Каждое подмножество $A \subset X$ является топологическим пространством относительно *индуцированной* топологии, в которой открытые множества имеют вид $A \cap U$, где U открыто в X . При этом отображение *вложения* $i: A \hookrightarrow X$ непрерывно.

Подмножество $A \subset X$ *замкнуто*, если его дополнение открыто. Точка $x \in X$ называется *предельной* для подмножества $A \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точку из A , отличную от x . Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (упражнение).

Пространство X *связно*, если его нельзя представить в виде объединения $A \sqcup B$ непересекающихся подмножеств A и B , каждое из которых непусто и открыто.

Пространство X *компактно*, если из каждого его покрытия открытыми множествами $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ можно выделить конечное подпокрытие $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Пространство X *хаусдорфово*, если у любых его двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности, $U \ni x, V \ni y, U \cap V = \emptyset$.

Теорема 1.4. *Непрерывное взаимно однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1.5. *Если X компактно и $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то A также компактно (в индуцированной топологии).*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i \in I} V_i$ — открытое покрытие. Имеем $V_i = A \cap U_i$, где U_i открыто в X . Тогда $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$. Тогда $A = V_1 \cup \dots \cup V_n$ — конечное подпокрытие. \square

Лемма 1.6. Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное сюръективное отображение и X компактно, то Y также компактно.

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие. Тогда $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ также является открытым покрытием. Выделим конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда $Y = U_1 \cup \dots \cup U_n$ — конечное подпокрытие. \square

Лемма 1.7. Если Y хаусдорфово и $B \subset Y$ — компактное подмножество, то B замкнуто.

Доказательство. Предположим, что для B найдётся такая предельная точка $y \in Y$, что $y \notin B$. Для каждой точки $b \in B$ выберем открытые (в Y) подмножества $U_b \ni b$, $V_b \ni y$, $U_b \cap V_b = \emptyset$. Из открытого покрытия $B = \bigcup_{b \in B} U_b$ выделим конечное подпокрытие $B = U_{b_1} \cup \dots \cup U_{b_n}$. Тогда $V = V_{b_1} \cap \dots \cap V_{b_n}$ — окрестность точки y , не пересекающаяся с B . Противоречие. \square

Доказательство теоремы 1.4. Надо доказать, что обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно. Другими словами, надо доказать, что f переводит открытые множества в открытые (такие отображения называются *открытыми*). Так как f взаимно однозначно, это эквивалентно тому, что f переводит замкнутые множества в замкнутые. Пусть $A \subset X$ замкнуто. Согласно лемме 1.5, A компактно. Согласно лемме 1.6, $f(A) \subset Y$ также компактно. Наконец, согласно лемме 1.7, $f(A)$ замкнуто. \square

Отношением на множестве X называется подмножество $R \subset X \times X$ декартова квадрата $X \times X$. Если $(x_1, x_2) \in R$, то говорят, что элементы x_1 и x_2 *находятся в отношении R* . При этом используется обозначение $x_1 \sim_R x_2$ или просто $x_1 \sim x_2$. Отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно *рефлексивно* ($(x, x) \in R$, или $x \sim x$ для любого $x \in X$), *симметрично* ($x_1 \sim x_2$ влечёт $x_2 \sim x_1$) и *транзитивно* ($x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$ влечёт $x_1 \sim x_3$). Множество X с отношением эквивалентности представляется в виде несвязного объединения *классов эквивалентности*. Обозначим через X/\sim множество классов эквивалентности.

Конструкция 1.8 (фактортопология). Пусть X — топологическое пространство с отношением эквивалентности. Рассмотрим отображение множеств $p: X \rightarrow X/\sim$, которое сопоставляет точке её класс эквивалентности. Тогда на множестве X/\sim определена *фактортопология*, в которой множество $U \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в X . Отображение $p: X \rightarrow X/\sim$ непрерывно относительно фактортопологии и называется *факторотображением*.

Вот два важнейших примера факторпространства.

Конструкция 1.9 (стягивание подпространства). Пусть $A \subset X$, а отношение эквивалентности на X задано так: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$. Фактор-пространство X/\sim обозначается X/A ; говорят, что X/A получается из X *стягиванием A в точку*. Если $A = pt$ — точка, то X/pt гомеоморфно X . Также отдельно рассматривают случай $A = \emptyset$. Тогда X/\emptyset полагают равным несвязному объединению X и точки; такой формализм оказывается весьма полезным.

Конструкция 1.10 (пространство орбит действия группы). Говорят, что группа G *действует слева* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано такое непрерывное отображение $\alpha_g: X \rightarrow X$, что $\alpha_e = \text{id}$ (тождественное отображение) и

$\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Заметим, что каждое отображение α_g является гомеоморфизмом (с обратным $\alpha_{g^{-1}}$). Точка $\alpha_g(x)$ обозначается просто gx .

Примеры:

- общая линейная группа (обратимых операторов) $GL(V)$, а также её подгруппы (например, $SL(V)$, $SO(V)$), действуют на линейном пространстве V ;
- группа невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ действует слева на пространстве столбцов \mathbb{R}^n ;
- аддитивная группа линейного пространства V также действует на V ;
- группа перестановок (симметрическая группа) Σ_n действует на конечном множестве $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Орбитой точки $x \in X$ под действием G называется подмножество

$$Gx = \{gx : g \in G\} \subset X.$$

Примеры:

- орбитами действия группы поворотов $SO(2)$ на плоскости \mathbb{R}^2 являются концентрические окружности с центром в 0 и точка 0;
- действие группы Σ_n на $[n]$ имеет единственную орбиту — само множество $[n]$.

Орбиты разных точек не пересекаются или совпадают и тем самым задают отношение эквивалентности на X : $x \sim y$, если существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

Соответствующее фактор-пространство X/\sim называется *пространством орбит* по действию G и обозначается X/G .

1.2. Категории и функторы. Категория \mathcal{C} состоит из класса объектов и класса морфизмов между объектами. Подкласс морфизмов между объектами A и B обозначается $\text{Hom}(A, B)$. При этом морфизмы должны удовлетворять следующим условиям. Если $f \in \text{Hom}(A, B)$ и $g \in \text{Hom}(B, C)$, то определена композиция $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$. Более того, требуется, чтобы композиция была ассоциативной и для любого объекта A класс $\text{Hom}(A, A)$ содержал тождественный морфизм id_A , удовлетворяющий соотношениям $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$ для любого $f \in \text{Hom}(A, B)$.

Примерами являются категория множеств, категория групп и гомоморфизмов, категория топологических пространств и непрерывных отображений.

Ковариантный функтор из категории \mathcal{C} в категорию \mathcal{D} сопоставляет каждому объекту A из \mathcal{C} объект $F(A)$ из \mathcal{D} и каждому морфизму $f: A \rightarrow B$ из \mathcal{C} морфизм $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ из \mathcal{D} так, что F сохраняет композицию и тождественный морфизм:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

Контравариантный функтор из \mathcal{C} в \mathcal{D} сопоставляет морфизму $f: A \rightarrow B$ из \mathcal{C} морфизм $F(f): F(B) \rightarrow F(A)$ из \mathcal{D} так, что

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

1.3. Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты.

Базой топологии \mathcal{T} на X называется такой набор открытых подмножеств $\{U_i : i \in I\}$, что любое открытое множество в X представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств U_i .

Пример 1.11. Базой топологии на вещественной прямой \mathbb{R} является набор всех интервалов. Интервалы с рациональными концами также образуют базу топологии на \mathbb{R} (эта база счётна, в отличие от базы из всех интервалов).

Конструкция 1.12 (топология произведения). *Произведением* топологических пространств X и Y называется множество $X \times Y$ (состоящее из пар (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$) с топологией, базу которой образуют подмножества вида $U \times V$, где U открыто в X , а V открыто в Y . Эта топология называется *топологией произведения*.

Пример 1.13. *Вещественная плоскость* \mathbb{R}^2 — это декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с топологией произведения. Открытыми множествами здесь являются объединения открытых прямоугольников (произведений интервалов). В анализе топология на \mathbb{R}^2 вводится так: открытыми объявляются множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый открытый шар с центром в этой точке. Таким образом, в этой топологии открытые множества — это объединения открытых шаров. Эта топология совпадает с топологией произведения, так как каждый открытый прямоугольник является объединением открытых шаров и каждый открытый шар является объединением открытых прямоугольников.

Те же рассуждения относятся к топологии на пространстве \mathbb{R}^n .

Пример 1.14. *Окружностью* называется топологическое пространство, гомеоморфное следующему подмножеству в \mathbb{R}^2 :

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

(с индуцированной топологией). По-другому окружность можно определить как факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ отрезка по его границе. Непрерывное отображение

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

индуцирует гомеоморфизм $[0, 1]/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$. Доказательство этого факта — упражнение (указание: воспользоваться теоремой 1.4).

В то же время, если рассмотреть ограничение отображения f на полуинтервал, мы получим непрерывное взаимно однозначное отображение $[0, 1) \rightarrow S^1$, которое не является гомеоморфизмом (упражнение).

Предложение 1.15. *Топология произведения является самой грубой из всех топологий на $X \times Y$, относительно которых проекции $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, и $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto y$, являются непрерывными.*

Доказательство. Чтобы отображение p_X было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, где $U \subset X$ — открытое множество. Аналогично, чтобы отображение p_Y было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_Y^{-1}(V) = X \times V$, где $V \subset Y$ открыто. Тогда пересечение $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ также должно быть открытым, а значит, должны быть открытыми и всевозможные объединения множеств вида $U \times V$. Таким образом, необходимо объявить открытыми все множества из топологии произведения. Это и означает, что топология произведения — самая грубая из топологий на $X \times Y$, относительно которых обе проекции непрерывны. \square

Предложение 1.16 (универсальное свойство произведения). *Пусть даны отображения $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$. Тогда существует единственное отображение*

$h: Z \rightarrow X \times Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$. Это выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & \\
 \searrow f & & \\
 & X \times Y & \xrightarrow{p_X} X \\
 \swarrow g & \downarrow p_Y & \\
 & Y &
 \end{array}$$

Доказательство. Формула $h(z) := (f(z), g(z))$ однозначно определяет отображение h . Проверка его непрерывности остаётся в качестве упражнения. \square

Данное универсальное свойство определяет понятие *категорного произведения*. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств.

Аналогично определяется произведение конечного числа пространств $X_1 \times \dots \times X_n$. Базой топологии произведения являются множества вида $U_1 \times \dots \times U_n$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако при определении топологии произведения бесконечного числа пространств имеется тонкость.

Конструкция 1.17 (топология бесконечного произведения). Пусть $\{X_i: i \in I\}$ — набор пространств, проиндексированных элементами множества I . По определению элементами *декартова произведения* $\prod_{i \in I} X_i$ являются *функции выбора* $i \mapsto x_i$, сопоставляющие каждому элементу $i \in I$ элемент $x_i \in X_i$. Если I — счётное множество (множество натуральных чисел), то элементами бесконечного произведения $\prod_{i \in I} X_i$ являются бесконечные последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $x_i \in X_i$.

Можно было бы определить топологию на $\prod_{i \in I} X_i$, взяв в качестве базы всевозможные произведения вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако в такой топологии будет слишком много открытых множеств, и поэтому она не будет обладать универсальным свойством относительно всех проекций $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$.

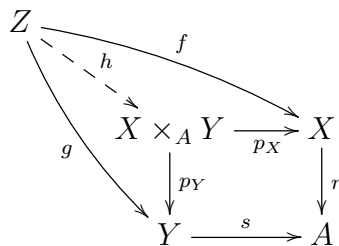
Действительно, чтобы проекция $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ была непрерывной, нужно объявить открытыми все подмножества произведения вида $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j \in I} Y_j$, где $Y_j = X_j$ при $j \neq i$ и $Y_i = U_i$ — открытое множество в X_i (на i -м месте в произведении стоит U_i , а на остальных местах — X_j). Взяв конечные пересечения таких множеств, мы получим подмножества вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто и *лишь конечное число U_i отлично от X_i* . Набор таких множеств образует базу топологии, которая является самой грубой из всех топологий на $\prod_{i \in I} X_i$, относительно которых все проекции $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ непрерывны. Эта топология и называется *топологией произведения* $\prod_{i \in I} X_i$. Она обладает универсальным свойством: для любого набора непрерывных отображений $Z \rightarrow X_i$, $i \in I$, существует единственное непрерывное отображение $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, композиция которого с проекциями даёт исходные отображения $Z \rightarrow X_i$.

Если же в $\prod_{i \in I} X_i$ объявить открытыми *всевозможные* произведения $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто, то для такой топологии отображение $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, задаваемое непрерывными отображениями $Z \rightarrow X_i$, может уже не быть непрерывным: прообраз открытого множества $\prod_{i \in I} U_i$ может не быть открытым в Z .

Обобщением произведения является понятие декартова квадрата.

Конструкция 1.18 (декартов квадрат).

(1)



Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется *декартовым квадратом*, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком. Пространство $X \times_A Y$ называется *расслоенным произведением* (или *коамальгамой*, в английской терминологии *pullback*) пространств X и Y с заданными отображениями $r: X \rightarrow A$ и $s: Y \rightarrow A$.

Таким образом, расслоенное произведение $X \times_A Y$ — это такое пространство с заданными отображениями $p_X: X \times_A Y \rightarrow X$ и $p_Y: X \times_A Y \rightarrow Y$, что $r \circ p_X = s \circ p_Y$ и для любого пространства Z с отображениями $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$, удовлетворяющими условию $r \circ f = s \circ g$, существует единственное отображение $h: Z \rightarrow X \times_A Y$, для которого $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Существование декартова квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства $X \times_A Y$, использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

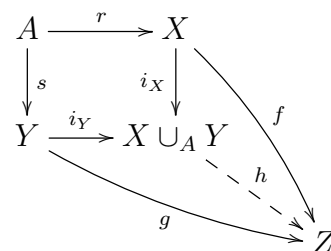
$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y : r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и *кодекартова квадрата*.

Конструкция 1.19 (кодекартов квадрат и копроизведение).

(2)



Пространство $X \cup_A Y$ называется *склеивкой* (или *амальгамой*, в англ. терминологии *pushout*) пространств X и Y с заданными отображениями $r: A \rightarrow X$ и $s: A \rightarrow Y$.

Явная конструкция пространства $X \cup_A Y$ использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y / \sim, \quad \text{где } x \sim y, \text{ если } x = r(a) \text{ и } y = s(a) \text{ для некоторого } a \in A,$$

т. е. факторпространство берётся по минимальному отношению эквивалентности, содержащему все пары $(r(a), s(a))$. В частности, при $A = \emptyset$ получаем, что *копроизведением* пространств X и Y является их несвязное объединение $X \sqcup Y$.

1.4. Топология на пространстве отображений. Предбазой топологии \mathcal{T} на X называется набор открытых подмножеств $U_i: i \in I$, порождающих \mathcal{T} (т.е. \mathcal{T} является самой грубой топологией, в которой все U_i открыты). Более явно, предбаза — это набор открытых множеств, совокупность всевозможных конечных пересечений которых образует базу.

Конструкция 1.20. Пусть X, Y — два фиксированных пространства. Рассмотрим множество всех непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$. Это множество обозначается $\mathcal{C}(X, Y)$ или Y^X . На нём можно ввести топологию следующим образом. Для каждого компактного подмножества $K \subset X$ и открытого множества $U \subset Y$ рассмотрим подмножество отображений

$$W(K, U) = \{f \in Y^X: f(K) \subset U\}.$$

Топология на Y^X , порождённая набором всевозможных подмножеств $W(K, U)$ (т.е. для которой подмножества $W(K, U)$ образуют предбазу), называется *компактно-открытой топологией*. Далее будем предполагать, что на Y^X всегда введена компактно-открытая топология.

Предложение 1.21. Если X — конечное множество (с дискретной топологией), то топология на Y^X совпадает с топологией произведения $\prod_{x \in X} Y$.

Доказательство. Любое подмножество $K \subset X$ является компактным. Каждое множество $W(K, U)$ является конечным пересечением $\bigcap_{x \in K} W(x, U)$, а множества $W(x, U)$ порождают топологию конечного произведения $\prod_{x \in X} Y$. \square

Если X — компактное пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство, то пространство $\mathcal{C}(X, Y)$ метризуемо с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}.$$

Можно доказать (задача), что эта метрика индуцирует на $\mathcal{C}(X, Y)$ компактно-открытую топологию.

Задачи и упражнения.

1.22. Докажите, что подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

1.23. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

1.24. Покажите, что оба условия на пространства в теореме 1.4 являются необходимыми. А именно, приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения $f: X \rightarrow Y$, которое не является гомеоморфизмом, при каждом из следующих дополнительных ограничений:

- а) X компактно;
- б) Y хаусдорфово.

1.25. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственно.

1.26. Пусть $i: A \rightarrow X$ — открытое инъективное отображение. Докажите, что A гомеоморфно пространству $i(A)$ с топологией, индуцированной из X . (Говорят, что открытое инъективное отображение является вложением.) Докажите то же для замкнутого инъективного отображения. (Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если образ замкнутого множества замкнут.)

1.27. Пусть $p: X \rightarrow B$ — открытое сюръективное отображение. Докажите, что B гомеоморфно факторпространству X/\sim по отношению эквивалентности, при котором $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $p(x_1) = p(x_2)$. (Говорят, что открытое сюръективное отображение является факторотображением.) Докажите то же для замкнутого сюръективного отображения.

1.28. Докажите, что индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

1.29. Докажите, что фактортопология на X/\sim является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \rightarrow X/\sim$ непрерывно.

1.30. Докажите, что если $A \subset X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто. Однако X/A может быть не хаусдорфовым, даже если X хаусдорфово, а $A \subset X$ замкнуто.

1.31. Опишите пространство орбит $\mathbb{R}^2/SO(2)$ действия группы поворотов на плоскости.

1.32. Докажите, что факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ отрезка по его границе гомеоморфно окружности.

1.33. Завершите доказательство предложения 1.16 (проверьте непрерывность построенного там отображения).

1.34. Докажите, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. (Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова*. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора.)

1.35. Докажите, что канторово множество (т. е. множество чисел из отрезка $[0, 1]$, которые не содержат 1 в тройной записи) гомеоморфно произведению счётного числа дискретных пространств $\{0, 1\}$.

1.36. Докажите, что множество иррациональных вещественных чисел гомеоморфно произведению счётного числа множеств натуральных чисел.

1.37. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}}^\infty$ — множество бесконечных последовательностей вещественных чисел (декартово произведение счётного числа вещественных прямых) с топологией, в которой базой открытых множеств являются всевозможные бесконечные произведения интервалов. Докажите, что в этой топологии диагональное отображение $\mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^\infty$, $x \rightarrow (x, x, \dots)$, не является непрерывным. Это означает, в частности, что топология $\widetilde{\mathbb{R}}^\infty$ отличается от топологии произведения \mathbb{R}^∞ .

1.38. Рассмотрим подмножество $X = \bigcup_{n=1}^\infty (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$ вещественной прямой с индуцированной топологией. Гомеоморфно ли пространство X несвязному объединению бесконечного числа интервалов?

1.39. Проверьте универсальные свойства расслоенного произведения $X \times_A Y$ и склейки $X \cup_A Y$.

1.40. Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

1.41. Верно ли предложение 1.21 для произвольного пространства X ?

1.42. Докажите, что если X — компактное пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство, то формула

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}$$

задаёт метрику на множестве непрерывных отображений $\mathcal{C}(X, Y)$, и эта метрика индуцирует компактно-открытую топологию.

1.43. Докажите, что имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z), \quad \text{или} \quad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

1.44. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно. Докажите, что если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi: \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e: Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow Z, \quad (y, f) \mapsto f(y),$$

непрерывно.

1.45 (экспоненциальный закон). Определено каноническое отображение

$$\Phi: \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \text{или} \quad \Phi: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ переходит в отображение $\Phi(f): X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$. Докажите, что если X хаусдорфово, то отображение Φ непрерывно. Если в дополнение к этому Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм. (Если эта задача покажется сложной, доказательство можно найти в [ВИНХ, 25.Vx].)

2. ОПЕРАЦИИ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

2.1. Конус, надстройка и джойн. Символ I обозначает у нас единичный отрезок $[0, 1]$.

Цилиндром над X называется произведение $X \times I$; подпространства $X \times 1$ и $X \times 0$ называются (*верхним и нижним*) *основаниями* цилиндра.

Конус CX над X — это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию: $CX = (X \times I)/(X \times 1)$. Образ основания $X \times 1$ называется *вершиной* конуса, а образ основания $X \times 0$ — *основанием* конуса.

Надстройкой ΣX над X называется факторпространство конуса по его основанию: $\Sigma X = CX/(X \times 0)$. (Обратите внимание, что это не то же самое, что факторпространство $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$.) Пространство X вкладывается в надстройку ΣX в качестве $X \times \frac{1}{2}$. По-другому надстройку можно определить как склейку двух

конусов по их основаниям: $\Sigma X = CX \cup_X CX$; таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & CX \\ \downarrow i & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X, \end{array}$$

где каждое из отображений i является вложением X в основание цилиндра.

Определим n -мерный шар как следующее подмножество в \mathbb{R}^n :

$$D^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \}$$

с индуцированной топологией. Аналогично определим n -мерную сферу

$$S^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \}.$$

Заметим, что при $n = 0$ сфера S^0 состоит из двух точек.

Предложение 2.1. *Имеют место гомеоморфизмы $CS^n \cong D^{n+1}$ и $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение

$$S^n \times I \rightarrow D^{n+1}, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}, t) \mapsto ((1-t)x_1, \dots, (1-t)x_{n+1}).$$

Оно переводит верхнее основание $S^n \times 1$ в точку $\mathbf{0} \in D^{n+1}$ и поэтому индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение $CS^n = (S^n \times I)/(S^n \times 1) \rightarrow D^{n+1}$. Так как CS^n — компактное пространство (как факторпространство произведения компактных пространств), а D^{n+1} — хаусдорфово (как подмножество хаусдорфова пространства \mathbb{R}^{n+1}), данное отображение $CS^n \rightarrow D^{n+1}$ является гомеоморфизмом в силу теоремы 1.4.

Для доказательства второго гомеоморфизма рассмотрим отображение

$$D^n \rightarrow S^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (\frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r, \cos \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1), & \text{если } r = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Это отображение взаимно однозначно на внутренности шара и переводит его границу S^{n-1} (где $r = 1$) в «южный полюс» $(0, \dots, 0, -1) \in S^n$.

Поэтому оно индуцирует гомеоморфизм $D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$ в силу теоремы 1.4.

Теперь требуемый гомеоморфизм получается как композиция гомеоморфизмов

$$\Sigma S^n = CS^n / (S^n \times 0) \xrightarrow{\cong} D^{n+1} / S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1},$$

построенных выше. □

Джойн (или *соединение*) $X * Y$ пространств X и Y удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y . Формально джойн определяется как факторпространство

$$X * Y = X \times Y \times I / (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$$

при любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $y, y_1, y_2 \in Y$. Произведение $X \times Y$ вкладывается в джойн в качестве $X \times Y \times \frac{1}{2}$.

Из сравнения определений надстройки и джона получаем, что $S^0 * X \cong \Sigma X$. В частности, $S^0 * S^k \cong S^{k+1}$. Имеет место более общий факт: $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ (задача).

2.2. Пространства с отмеченной точкой. В теории гомотопий часто имеют дело с категорией *пространств с отмеченными точками*, объектами которой являются пары (X, x_0) , состоящие из пространства X и точки $x_0 \in X$, а морфизмами $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — отображения, сохраняющие отмеченные точки, т. е. непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ с условием $f(x_0) = y_0$. При этом операции, описанные выше, видоизменяются следующим образом.

Произведением пространств с отмеченными точками (X, x_0) и (Y, y_0) называется пространство $X \times Y$ с отмеченной точкой (x_0, y_0) . В *конусе* и *надстройке* над (X, x_0) дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times I$, т. е.

$$C(X, x_0) = X \times I / (X \times 1 \cup x_0 \times I), \quad \Sigma(X, x_0) = CX / (X \times 0 \cup x_0 \times I).$$

При этом стянутое подпространство объявляется отмеченной точкой. В *джойне* $(X, x_0) * (Y, y_0)$ дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times y_0 \times I$.

Мы часто будем говорить о пространстве X с отмеченной точкой, имея в виду пару (X, x_0) . Если из контекста ясно, что рассматриваются пространства с отмеченными точками, то для конуса, надстройки и джойна мы будем использовать стандартные обозначения CX , ΣX , $X * Y$, имея в виду $C(X, x_0)$, $\Sigma(X, x_0)$ и $(X, x_0) * (Y, y_0)$.

Если $X = (X, x_0)$ и $Y = (Y, y_0)$ — пространства с отмеченными точками, то подпространство отображений, сохраняющих отмеченные точки, обозначается $\mathcal{C}_*(X, Y)$.

Имеются следующие две дополнительные операции над пространствами с отмеченными точками.

Букетом пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \vee Y$, получаемое склейкой X и Y по отмеченным точкам x_0 и y_0 :

$$X \vee Y = X \sqcup Y / (x_0 \sim y_0).$$

Букет $X \vee Y$ естественным образом вкладывается в произведение $X \times Y$ в качестве подпространства $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$; при этом отмеченная точка букета переходит в (x_0, y_0) . Букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками (упражнение).

Приведённым произведением (или *смэши-произведением*) пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \wedge Y$, получаемое факторизацией произведения $X \times Y$ по вложенному букету $X \vee Y$:

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y) = (X \times Y) / (X \times y_0 \cup x_0 \times Y).$$

2.3. Пространства путей и петель. *Путь* в пространстве X называется отображение $\varphi: I \rightarrow X$; точка $\varphi(0)$ называется *началом*, а $\varphi(1)$ — *концом* пути φ . *Петлёй* называется путь φ , начинающийся и заканчивающийся в одной точке, т. е. $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Пространство X , любые две точки которого можно соединить путём, называется *линейно связным*. Линейно связное пространство связно, но обратное верно не всегда. Примером связного, но не линейно связного пространства является объединение вертикального отрезка $[-1, 1]$ на оси ординат и положительной части графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$ с топологией, индуцированной из \mathbb{R}^2 .

Пусть $X = (X, x_0)$ — пространство с отмеченной точкой. *Пространством путей* на X называется пространство $PX = \mathcal{C}_*(I, X)$, состоящее из путей, начинающихся в отмеченной точке x_0 (отмеченной точкой отрезка считается 0). *Пространством*

петель на X называется подпространство $\Omega X \subset PX$, состоящее из путей, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке x_0 . Пространство петель ΩX можно также определить как пространство отображений $\mathcal{C}_*(S^1, X)$, сохраняющих отмеченные точки. Отмеченной точкой пространства ΩX является постоянная петля ε , $\varepsilon(t) = x_0$.

Теорема 2.2. Для пространств с отмеченными точками X и Y , где X хаусдорфово, имеет место естественный гомеоморфизм

$$\mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_*(X, \Omega Y),$$

переводящий отображение $f: \Sigma X \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, в отображение $X \rightarrow \Omega Y$, $x \mapsto \varphi_x$, где φ_x — петля $I \rightarrow Y$, $t \mapsto f(x, t)$.

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону (задача 1.45) имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X \times I, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y)).$$

При этом подпространство $\mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) \subset \mathcal{C}(X \times I, Y)$, состоящее из отображений $f: X \times I \rightarrow Y$, для которых $f(x, 0) = f(x, 1) = f(x_0, t) = y_0$, переходит в подпространство $\mathcal{C}_*(X, \Omega Y) \subset \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y))$ отображений, переводящих X в петли с началом y_0 и переводящих x_0 в постоянную петлю.

Естественность по X и Y означает, что для отображений $X' \rightarrow X$ и $Y \rightarrow Y'$, сохраняющих отмеченные точки, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}_*(X, \Omega Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_*(\Sigma X', Y') & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}_*(X', \Omega Y'). \end{array}$$

Детали остаются в качестве упражнения. □

Задачи и упражнения.

2.3. Докажите, что $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2.4. Докажите, что букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками, т. е. для него имеет место универсальное свойство

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow i_X & \\ Y & \xrightarrow{i_Y} X \vee Y & \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z, \end{array}$$

(где h — выходящая из $X \vee Y$ в Z стрелка)

где все стрелки являются отображениями пространств с отмеченными точками.

2.5. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

3. ГОМОТОПИИ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Два отображения $f, g: X \rightarrow Y$ между пространствами X и Y называются *гомотопными* (обозначение: $f \simeq g$), если существует такое отображение $F: X \times I \rightarrow Y$, что $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией* между f и g . Для каждого $t \in I$ будем обозначать через F_t отображение $X \rightarrow Y$, $x \mapsto F(x, t)$.

Предложение 3.1. *Гомотопия является отношением эквивалентности между отображениями.*

Доказательство. Для отображений $f, g, h: X \rightarrow Y$ мы имеем $f \simeq f$ посредством гомотопии $F(x, t) = f(x)$. Если $f \simeq g$ посредством гомотопии F , то $g \simeq f$ посредством гомотопии \bar{F} , где $\bar{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$. Наконец, если $f \simeq g$ посредством гомотопии F и $g \simeq h$ посредством гомотопии G , то $f \simeq h$ посредством гомотопии H , где

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Множество классов гомотопных отображений из X в Y обозначается $[X, Y]$.

Мы также будем использовать термин *гомотопия отображения* $f: X \rightarrow Y$ для отображения $F: X \times I \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию $F(x, 0) = f(x)$. В этом случае для каждого $t \in I$ мы будем использовать обозначение f_t для отображения $X \rightarrow Y$, $x \mapsto F(x, t)$. При этом $f_0 = f$. Таким образом, гомотопия отображения f — это его деформация с параметром $t \in [0, 1]$.

Замечание. Если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(I \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y)).$$

Таким образом, в этом случае гомотопию можно рассматривать как путь в пространстве отображений $\mathcal{C}(X, Y)$, а множество классов гомотопных отображений $[X, Y]$ является множеством классов линейной связности пространства $\mathcal{C}(X, Y)$.

Два пространства X и Y *гомотопически эквивалентны* (обозначение: $X \simeq Y$), если существуют такие отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\text{id}_X: X \rightarrow X$ и $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ соответственно. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на пространствах, и *гомотопическим типом* пространства X называется класс пространств, гомотопически эквивалентных X .

Пространство X *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример 3.2. Единичный шар $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: |\mathbf{x}| \leq 1\}$ стягиваем. Действительно, рассмотрим отображение в точку $f: D^n \rightarrow pt$ и отображение $g: pt \rightarrow D^n$, переводящее точку в $\mathbf{0} \in D^n$. Тогда $f \circ g: pt \rightarrow pt$ есть тождественное отображение, а $g \circ f: D^n \rightarrow D^n$ переводит каждую точку $\mathbf{x} \in D^n$ в $\mathbf{0}$. Гомотопия между $g \circ f$ и $\text{id}: D^n \rightarrow D^n$ задаётся отображением $F: D^n \times I \rightarrow D^n$, $(\mathbf{x}, t) \mapsto t\mathbf{x}$.

Задачи и упражнения.

3.3. Докажите, что пространство \mathbb{R}^n стягиваемо, а $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1} .

3.4. Докажите, что надстройка над тором $S^1 \times S^1$ гомотопически эквивалентна букету сфер, и опишите этот букет.

3.5. Пусть X — дополнение к трём координатным осям в \mathbb{R}^3 . Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету окружностей, и найдите число окружностей в букете.

3.6. Пусть X — дополнение к трём координатным осям в \mathbb{C}^3 . Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету сфер $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$.

4. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Определение и примеры. *Клеточным пространством* (клеточным комплексом, CW-комплексом) называется хаусдорфово топологическое пространство X , представленное в виде объединения $\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} e_i^q$ попарно непересекающихся подмножеств e_i^q , называемых *клетками*, таким образом, что для каждой клетки e_i^q существует отображение $\Phi_i: D^q \rightarrow X$, называемое *характеристическим отображением* клетки e_i^q , ограничение которого на внутренность шара $\text{int } D^q$ есть гомеоморфизм на e_i^q . При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

- (C) граница $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток размерности $< q$;
- (W) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

Объединение клеток размерности $\leq n$ в клеточном пространстве X называется *n-м остовом* пространства X и обозначается через $\text{sk}^n X$ или X^n .

Можно проверить (задача) эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X :

- подмножество $A \subset X$ замкнуто (соответственно открыто);
- пересечение $A \cap X^n$ замкнуто (соответственно открыто) для любого n ;
- прообраз $\Phi_i^{-1}(A)$ при характеристическом отображении $\Phi_i: D^q \rightarrow X$ любой клетки e_i^q замкнут (соответственно открыт) в D^q .

Отсюда вытекает, что отображение $X \rightarrow Y$ из клеточного пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все его ограничения $X^n \rightarrow Y$ на остовы.

Замечание. Буквы «C» и «W» происходят из английской терминологии «closure finite» и «weak topology», восходящей к Дж. Уайтхеду. Последнее из приведённых выше свойств означает, что топология, описываемая аксиомой (W), является самой тонкой (самой слабой в терминологии Уайтхеда) из топологий на X , по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

Конструкция 4.1 (приклеивание клеток). Скажем, что клеточное пространство Z получается из клеточного пространства Y *приклеиванием n-мерной клетки* при помощи отображения $\varphi: S^{n-1} \rightarrow Y^{n-1}$, если Z входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Z, \end{array}$$

где левая вертикальная стрелка вкладывает сферу в границу ∂D^n шара. Таким образом, Z — факторпространство объединения $Y \sqcup D^n$ при отождествлениях $x \sim \varphi(x)$ для $x \in S^{n-1} = \partial D^n$. Как множество, Z представляет собой объединение Y и внутренней части шара D^n — n -мерной клетки. Мы будем использовать обозначение $Z = Y \cup_{\varphi} D^n$.

Имеется другой, индуктивный подход к определению клеточного пространства. Клеточное пространство X определяется как результат последовательного приклеивания клеток к дискретному пространству X^0 (или пустому множеству $X^{-1} = \emptyset$). На n -м шаге этой индуктивной процедуры мы получаем n -мерный остов X^n из $(n-1)$ -мерного X^{n-1} , приклеивая n -мерные клетки e_i^n посредством отображений $\varphi_i: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Топология на объединении $X = \bigcup_n X^n$ вводится следующим образом: подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто для любого n . Это обеспечивает выполнение аксиомы (W) для пространства X . Необходимо также проверить хаусдорфовость и выполнение аксиомы (C). Это остаётся в качестве задач.

Клеточным подпространством клеточного пространства X называется замкнутое подмножество, которое является объединением клеток из X . Каждый остов X^n клеточного пространства X является клеточным подпространством.

Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток, и *локально конечным*, если каждая его точка вместе с некоторой окрестностью принадлежит конечному подпространству.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n .

Приведём примеры разбиений на клетки, которые не являются клеточными пространствами из-за невыполнения одной из аксиом (C) или (W).

Пример 4.2.

1. Конечное разбиение на клетки может не быть хаусдорфовым. Действительно, рассмотрим нехаусдорфово пространство X , получаемое из двух экземпляров единичного отрезка отождествлением точек с одинаковыми координатами, за исключением нулевых концов:

$$X = (I_1 \sqcup I_2) / \sim, \quad \text{где } t_1 \sim t_2, \text{ если } t_1 = t_2 > 0.$$

При этом отождествлённые нулевые концы 0_1 и 0_2 не имеют непересекающихся окрестностей в X . Разобьём X на клетки: концы $0_1, 0_2, 1$ и внутренность отрезка. В качестве характеристического отображения одномерной клетки возьмём вложение $I_1 \hookrightarrow X$. Это конечное разбиение удовлетворяет аксиоме (W). При этом подмножество $I_1 = X \setminus 0_2$ незамкнуто, но его прообразы при всех характеристических отображениях клеток замкнуты. Поэтому данная топология на X не является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

2. Разбиение диска D^2 на его внутренность и отдельные точки граничной окружности удовлетворяет аксиоме (W), но не удовлетворяет аксиоме (C).

3. Пусть X — множество, получаемое из счётного семейства единичных отрезков $\{I_k: k = 1, 2, \dots\}$ отождествлением всех их нулевых концов. На X естественным образом вводится топология, происходящая из метрики: расстояние между точками $t \in I_k$ и $s \in I_l$ равно $|s - t|$, если $k = l$, и равно $t + s$, если $k \neq l$. Разбиение пространства X на внутренности отрезков и оставшиеся точки удовлетворяет аксиоме (C), но

не (W): последовательность точек $\frac{1}{k} \in I_k$ сходится к 0, т.е. является незамкнутым множеством, но её пересечение с замыканием любой клетки состоит из одной точки и потому замкнуто.

Другой способ введения топологии на том же множестве — топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$, т.е. топология факторпространства бесконечного объединения $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$ по объединению нулевых концов $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k$. Букет $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ является клеточным пространством относительно разбиения на внутренности отрезков и оставшиеся точки; аксиома (W) здесь следует из определения фактортопологии. Однако в этой топологии больше замкнутых множеств (она слабее в терминологии Уайтхеда), чем в метрической топологии на том же множестве, описанной выше. Можно доказать (задача), что топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не происходит ни из какой метрики. В частности, $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ нельзя вложить в \mathbb{R}^n ни для какого n .

Конструкция 4.3 (факторпространства и произведения). Пусть X, Y — клеточные пространства. Рассмотрим разбиение произведения $X \times Y$ на клетки вида $e \times e'$, где e — клетка в X , а e' — клетка в Y . Если хотя бы одно из пространств X, Y локально конечно, то это разбиение на клетки задаёт на $X \times Y$ структуру клеточного пространства. Если же пространства X и Y не являются локально конечными, то данное разбиение произведения $X \times Y$ на клетки может не удовлетворять аксиоме (W) относительно топологии произведения. Эта проблема возникает, например, в случае бесконечных букетов отрезков (задача). В этом случае топологию произведения $X \times Y$ необходимо ослабить (сделать тоньше).

Факторпространство клеточного пространства по клеточному подпространству само является клеточным пространством (задача). В частности, цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства.

Пример 4.4.

1. Сфера S^n имеет клеточное разбиение из двух клеток: точки $e^0 = (1, 0, \dots, 0)$ и множества $e^n = S^n \setminus e^0$. Характеристическое отображение $D^n \rightarrow S^n$, соответствующее второй клетке, переводит границу шара в точку e^0 . Например, можно взять отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (-1, 0, \dots, 0), & \text{если } r = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

2. Другое клеточное разбиение сферы S^n состоит из $2n + 2$ клеток $e_{\pm}^0, e_{\pm}^1, \dots, e_{\pm}^n$: клетка e_{\pm}^k состоит из точек $(x_0, \dots, x_n) \in S^n$, у которых $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ и $\pm x_k > 0$. Здесь замыкание каждой клетки гомеоморфно шару.

3. *Вещественное проективное пространство* $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в \mathbb{R}^{n+1} . Топология в $\mathbb{R}P^n$ вводится как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ по отношению эквивалентности, при котором отождествляются точки, лежащие на одной прямой, проходящей через $\mathbf{0}$. Эта топология эквивалентна топологии, происходящей из угловой метрики: расстояние между прямыми равно углу между ними (задача).

Координаты (x_0, x_1, \dots, x_n) направляющего вектора прямой (определённые с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки из $\mathbb{R}P^n$; при этом используется обозначение $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Точки, у которых

i -я координата отлична от 0 составляют i -ю аффинную карту

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}.$$

Отображение

$$U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

определяет гомеоморфизм аффинной карты на \mathbb{R}^n и задаёт в ней координаты.

Имеется отображение $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую, проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$. При этом диаметрально противоположные точки сферы переходят в одну прямую. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получается из S^n отождествлением диаметрально противоположных точек. Верхняя полусфера $S_{\geq}^n = \{\mathbf{x} \in S^n : x_n \geq 0\}$ гомеоморфна шару D^n (посредством отображения проекции, забывающего последнюю координату). Сужение отображения $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ на S_{\geq}^n задаёт отображение $D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, при котором в одну точку отображаются только диаметрально противоположные точки граничной сферы $S^{n-1} \subset D^n$.

При отображении $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ клетки e_+^k и e_-^k разбиения сферы S^n из предыдущего примера склеиваются и получается разбиение пространства $\mathbb{R}P^n$ на $n + 1$ клетку, по одной клетке e^k в каждой размерности $k \leq n$. Мы имеем

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_k \neq 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Другими словами, $e^k = \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$, где пространства $\mathbb{R}P^k$ образуют цепочку вложений $pt = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^n$. Характеристическим отображением для клетки e^k является композиция $D^k \rightarrow \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ проекции и вложения.

4. Рассмотрим множество \mathbb{R}^∞ *финитных* (т.е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей (x_1, x_2, x_3, \dots) вещественных чисел. Множество \mathbb{R}^∞ можно отождествить с бесконечным объединением $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ вложенных пространств $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$, где \mathbb{R}^n вкладывается в \mathbb{R}^∞ при помощи отображения

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Топология в \mathbb{R}^∞ вводится следующим правилом: подмножество $A \subset \mathbb{R}^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $A \cap \mathbb{R}^n$ замкнуты в своих пространствах \mathbb{R}^n . Это самая тонкая топология, в которой все вложения $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ непрерывны, она называется *топологией прямого предела*.

Бесконечномерная сфера S^∞ определяется как единичная сфера в пространстве \mathbb{R}^∞ . Мы имеем $S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ — бесконечное объединение вложенных сфер $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$

Бесконечномерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ — это объединение вложенных проективных пространств $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \dots$. Эквивалентным образом, $\mathbb{R}P^\infty$ — это множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в \mathbb{R}^∞ . Пространство $\mathbb{R}P^\infty$ получается из S^∞ отождествлением диаметрально противоположных точек.

Клеточные разбиения сфер S^n и проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ из двух предыдущих примеров дают клеточные разбиения пространств S^∞ и $\mathbb{R}P^\infty$. Первое разбиение имеет по две клетки e_+^k и e_-^k , а второе — по одной клетке e^k в каждой размерности $k \geq 0$. При этом аксиома (W) для каждого из этих клеточных разбиений вытекает из определения топологии прямого предела.

5. *Комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в \mathbb{C}^{n+1} . Как и в случае $\mathbb{R}P^n$, на пространстве $\mathbb{C}P^n$ имеются

однородные координаты $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ (определённые с точностью до умножения на ненулевое комплексное число), и $\mathbb{C}P^n$ покрывается $n + 1$ аффинными картами, каждая из которых гомеоморфна пространству \mathbb{C}^n .

Рассмотрим единичную сферу

$$S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Мы имеем отображение $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : z_1 : \dots : z_n]$, при котором прообразом точки $[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$ является окружность в S^{2n+1} , состоящая из точек $(z_0 z, z_1 z, \dots, z_n z)$ с $|z| = 1$.

Рассмотрим также шар

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0\}.$$

Тогда отображение $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ограничивается до отображения $D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, которое взаимно однозначно на внутренности шара, а на границе S^{2n-1} происходит отождествление, описанное выше (окружности переходят в точки).

Это даёт разбиение $\mathbb{C}P^n$ на клетки

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_k \neq 0, z_{k+1} = \dots = z_n = 0\},$$

по одной в каждой чётной размерности $2k \leq 2n$, с характеристическими отображениями $D^{2k} \rightarrow \mathbb{C}P^k \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.

6. Классические двумерные поверхности (сферы с ручками, проективные плоскости с ручками, бутылки Клейна с ручками) получаются путём отождествления ребёр на границе многоугольника. Это приводит к клеточным разбиениям поверхностей с одной двумерной клеткой.

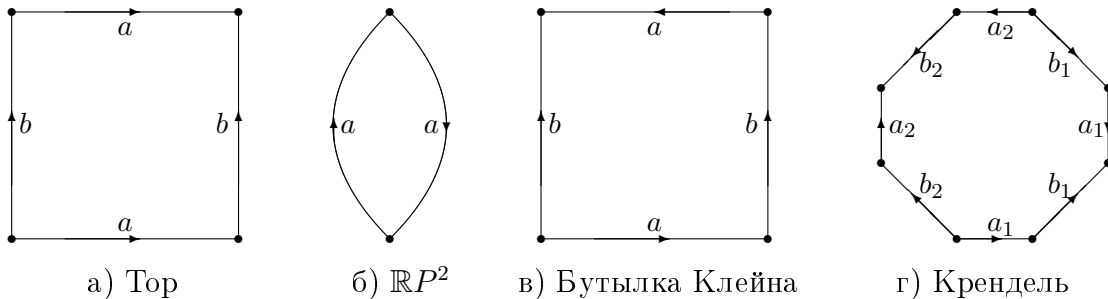


Рис. 1.

На рис. 1 а) изображено клеточное разбиение тора, получаемое отождествлением ребёр квадрата в соответствии с буквами и направлением стрелок. Это разбиение имеет одну 0-мерную клетку (в которую склеиваются все вершины), две 1-мерных клетки a и b и одну 2-мерную клетку (внутренность квадрата).

На рис. 1 б) изображено клеточное разбиение проективной плоскости с одной 0-мерной, одной 1-мерной и одной 2-мерной клетками. Это разбиение совпадает с разбиением из примера 3 при $n = 2$.

На рис. 1 в) изображено клеточное разбиение бутылки Клейна с одной 0-мерной, двумя 1-мерными и одной 2-мерной клетками.

На рис. 1 г) изображено клеточное разбиение сферы с двумя ручками (крендель), получаемое отождествлением ребёр восьмиугольника. Оно содержит одну 0-мерную, четыре 1-мерные и одну 2-мерную клетки. Аналогично разбиение сферы

с g ручками (также называемой *ориентируемой поверхностью рода g*) можно получить отождествлением рёбер $4g$ -угольника. Такое разбиение имеет $2g$ одномерных клеток a_1, \dots, a_g и b_1, \dots, b_g . Разбиение проективной плоскости с g ручками можно получить отождествлением рёбер $(4g + 2)$ -угольника, а разбиение бутылки Клейна с g ручками — отождествлением рёбер $(4g + 4)$ -угольника.

4.2. Свойство продолжения гомотопии. Подпространство A пространства X называется его *ретрактом*, если существует такое отображение $r: X \rightarrow X$, что $r(X) = A$ и $r|_A = \text{id}$ (т.е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$). Отображение r называется *ретракцией* пространства X на A ; оно удовлетворяет соотношению $r^2 = r$ и является топологическим аналогом проектора.

Если ретракция $r: X \rightarrow X$, $r(X) = A$, гомотопна тождественному отображению, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X . Если, сверх того, гомотопию $F: X \times I \rightarrow X$ между r и id можно сделать тождественной на A (т.е. $F(a, t) = a$ для любого $t \in I$), то A называется *строгим деформационным ретрактом* пространства X .

Пример 4.5.

1. Для любой точки $x_0 \in X$ подпространство $x_0 \times Y \cong Y$ является ретрактом произведения $X \times Y$. Ретракция $r: X \times Y \rightarrow X \times Y$ задаётся формулой $r(x, y) = (x_0, y)$.

2. Единичная окружность S^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Ретракция $r: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ задаётся формулой $r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, а гомотопия между r и id — формулой $F(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x} + (1 - t)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Парой пространств называется пара (X, A) , где X — пространство, а A — его подпространство. *Отображением пар* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ называется такое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, что $f(A) \subset B$. Например, отображение пространств с отмеченными точками является отображением пар $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Говорят, что пара (X, A) обладает *свойством продолжения гомотопии* (homotopy extension property, НЕР), если для любого отображения $f: X \rightarrow Z$ и такой гомотопии $F: A \times I \rightarrow Z$, что $F_0 = f|_A$, существует гомотопия $\hat{F}: X \times I \rightarrow Z$, для которой $\hat{F}_0 = f$ и $\hat{F}|_{A \times I} = F$. Таким образом, (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии, если любое отображение $X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Z$ можно продолжить до отображения $X \times I \rightarrow Z$. Пара (X, A) , удовлетворяющая свойству продолжения гомотопии, также называется *парой Борсука*, а отображение $A \rightarrow X$ — *корасслоением* (смысл последнего термина будет объяснён позже, в §8).

Предложение 4.6. *Пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии тогда и только тогда, когда $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт пространства $X \times I$.*

Доказательство. Из свойства продолжения гомотопии следует, что тождественное отображение $\text{id}: X \times 0 \cup A \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ продолжается до отображения $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$, а потому $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$.

Пусть теперь дана ретракция $r: X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$. Отображения $f: X \times 0 \rightarrow Z$ и $F: A \times I \rightarrow Z$ согласованы на $A \times 0$, а потому склеиваются в отображение $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \rightarrow Z$ (см. упражнение 1.39). Трудность может заключаться в том, что топология склейки $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I$ (фактортопология несвязного объединения $X \times 0 \sqcup A \times I$) может отличаться от топологии, индуцированной вложением $X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.

Если подмножество $A \subset X$ замкнуто, то топология склейки совпадает с индуцированной топологией. (Заметим, что подмножество $B \subset X \times 0 \cup A \times I$ замкнуто в топологии склейки тогда и только тогда, когда замкнуты $B \cap X \times 0$ и $B \cap A \times I$, а то же подмножество замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда найдётся замкнутое $B' \subset X \times I$, для которого $B = B' \cap (X \times 0 \cup A \times I)$.) Далее нам понадобится только этот случай. В общем случае можно доказать, что при наличии ретракции $r: X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ топология склейки грубее индуцированной топологии, поэтому непрерывное отображение $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \rightarrow Z$ из склейки будет также непрерывно в индуцированной топологии. В результате получаем композицию

$$X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{f \cup F} Z,$$

которая задаёт требуемое продолжение гомотопии. \square

Клеточной парой называется пара (X, A) , где X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство.

Теорема 4.7. *Клеточная пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии.*

Доказательство. Мы докажем, что $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$; тогда результат будет следовать из предложения 4.6.

Ретракция $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ будет построена как композиция ретракций $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Композиция здесь понимается в следующем смысле. Так как $X \times I = \bigcup_{n \geq 0} X^n \times I$, каждая точка $x \in X \times I$ лежит в $X^n \times I$ для некоторого n . Применив к x ретракцию r_n , мы попадём либо в $X^n \times 0 \cup A^n \times I \subset X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-1} \times I$. В последнем случае мы применяем ретракцию $r_{n-1}: X^{n-1} \times I \rightarrow X^{n-1} \times 0 \cup (X^{n-2} \cup A^{n-1}) \times I$, в результате чего попадём либо в $X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-2} \times I$, и так далее. В результате, последовательно применяя к $x \in X^n \times I$ ретракции r_n, r_{n-1}, \dots, r_0 , мы попадём в $X \times 0 \cup A \times I$, так как $X^{-1} = \emptyset$. Получаемое отображение $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ будет непрерывно, так как оно непрерывно на каждом остове $X^n \times I$, где оно устроено как композиция конечного числа непрерывных ретракций. Этот процесс соответствует тому, что мы продолжаем гомотопию $A \times I \rightarrow Z$ до $X \times I \rightarrow Z$ последовательно по остовам, на n -м шаге продолжая гомотопию $(X^{n-1} \cup A) \times I \rightarrow Z$ до гомотопии $(X^n \cup A) \times I \rightarrow Z$.

Осталось построить ретракцию $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Пространство X^n получается из $X^{n-1} \cup A^n$ добавлением всех n -мерных клеток, не лежащих в A . Таким образом, $X^n \times I$ получается из $X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ приклеиванием экземпляров $D^n \times I$ вдоль $D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ при помощи характеристических отображений n -мерных клеток. Так как характеристическое отображение $D^n \rightarrow X^n$ является гомеоморфизмом на внутренности шара, требуемая ретракция $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ получается применением отдельно для каждой n -мерной клетки стандартной ретракции $r: D^n \times I \rightarrow D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ (цилиндр ретрагируется на объединение дна и стенки). Эту стандартную ретракцию можно задать центральной проекцией из точки $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$. \square

Теорема 4.8. *Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (например, если (X, A) — клеточная пара) и A стягиваемо, то отображение факторизации $q: X \rightarrow X/A$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Стягивание пространства A — это гомотопия между отображениями $\text{id}: A \rightarrow A$ и $A \rightarrow pt$. Пусть $F_t: X \rightarrow X$ — продолжение этой гомотопии, причём $F_0 = \text{id}$. Так как $F_t(A) \subset A$, определена гомотопия факторотображений $\widehat{F}_t: X/A \rightarrow X/A$, входящая в коммутативную диаграмму слева:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_t} & X \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\widehat{F}_t} & X/A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_1} & X \\ \downarrow q & \nearrow g & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\widehat{F}_1} & X/A \end{array}$$

При $t = 1$ мы имеем $F_1(A) = pt$, а значит, F_1 индуцирует отображение $g: X/A \rightarrow X$, причём $gq = F_1$, как на диаграмме справа. Кроме того, $qg = \widehat{F}_1$, так как $qg(\widehat{x}) = qgq(x) = qF_1(x) = \widehat{F}_1q(x) = \widehat{F}_1(\widehat{x})$. Отображения $g: X/A \rightarrow X$ и $q: X \rightarrow X/A$ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями, так как $gq = F_1 \simeq F_0 = \text{id}$ посредством F_t и $qg = \widehat{F}_1 \simeq \widehat{F}_0 = \text{id}$ посредством \widehat{F}_t . \square

Предложение 4.9. *Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии, то $X/A \simeq X \cup CA$, где CA — конус над A .*

Доказательство. Если (X, A) удовлетворяет НЕР, то пара $(X \cup CA, CA)$ также удовлетворяет НЕР. Мы имеем $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$, где последняя гомотопическая эквивалентность вытекает из теоремы 4.8. \square

4.3. Теорема о клеточной аппроксимации. Если $A \subset X$ — подпространство, то гомотопией относительно A называется такая гомотопия $F_t: X \rightarrow Y$, что $F_t(a) = F_{t'}(a)$ для любых $t, t' \in I$ и $a \in A$ (т.е. гомотопия неподвижна на A).

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточных пространств называется клеточным, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n .

Теорема 4.10. *Любое отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному отображению. Если f уже является клеточным на клеточном подпространстве $A \subset X$, то можно выбрать гомотопию относительно A .*

Доказательство. Предположим по индукции, что $f: X \rightarrow Y$ уже клеточно на остове X^{n-1} , и пусть e^n — клетка в X . Замыкание \bar{e}^n компактно в X , так как оно является образом характеристического отображения $D^n \rightarrow X$. Тогда $f(\bar{e}^n) \subset Y$ также компактно, а значит, $f(e^n)$ пересекает только конечное число клеток в Y (упражнение 4.13). Пусть ε^k — клетка самой высокой размерности, с которой пересекается $f(e^n)$. Можно считать, что $k > n$, так как иначе f уже клеточно на e^n . Ниже мы покажем, что существует такая деформация (гомотопия) отображения $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1} , что образ клетки e^n при деформированном отображении не содержит некоторую точку $y \in \varepsilon^k$. Тогда можно деформировать отображение $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1} так, чтобы образ клетки e^n вообще не пересекал клетку ε^k . Для этого нужно взять композицию с деформационной ретракцией пространства $Y^k \setminus y$ на $Y^k \setminus \varepsilon^k$. Такая деформационная ретракция существует, так как существует деформационная ретракция $D^k \setminus x \rightarrow \partial D^k$ для $x \in \text{int } D^k$, а характеристическое отображение $D^k \rightarrow Y$ клетки ε^k является гомеоморфизмом на $\text{int } D^k$. Повторяя этот процесс конечное число раз, мы добьёмся того, чтобы множество $f(e^n)$ не пересекало ни одну клетку размерности больше n . Делая это для всех n -мерных клеток и оставляя при этом отображение неподвижным на n -мерных клетках из A , где оно

уже клеточное, мы получим гомотопию отображения $f|_{X^n}$ относительно $X^{n-1} \cup A^n$ в клеточное отображение. Далее мы пользуемся теоремой 4.7, чтобы продолжить эту гомотопию $X^n \times I \rightarrow Y$ вместе с постоянной гомотопией на A до гомотопии на всём пространстве X , т. е. применим свойство продолжения гомотопии к паре $(X, X^n \cup A)$. В результате получим гомотопию исходного отображения $f: X \rightarrow Y$ в отображение, которое клеточно на X^n и совпадает на X^{n-1} с отображением из предыдущего шага.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, возможно, бесконечную последовательность гомотопий, которую можно реализовать как одну гомотопию, выполняя гомотопию с номером n в течение времени t из интервала $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$. Более подробно, сначала за время $t \in [0, \frac{1}{2}]$ мы деформируем исходное отображение $f: X \rightarrow Y$ в отображение, которое является клеточным на X^0 . Затем за время $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ мы деформируем это отображение в отображение, которое является клеточным на X^1 и совпадает с предыдущим на X^0 . И так далее. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$.

Чтобы заполнить недостающий шаг в рассуждении, нам понадобится «лемма о свободной точке».

Лемма 4.11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\varphi: U \rightarrow \text{int } D^k$ — такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара $B^k \subset \text{int } D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно. Если $k > n$, то существует непрерывное отображение $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$, гомотопное φ , совпадающее с φ вне V и такое, что его образ не покрывает всего шара B^k .

Доказательство леммы приводится ниже, а пока завершим доказательство теоремы. Из леммы о свободной точке и свойств характеристических отображений $h: D^n \rightarrow X$ и $g: D^k \rightarrow Y$ клеток e^n и ε^k вытекает, что отображение $f|_{A \cup X^{n-1} \cup e^n}$ гомотопно относительно $A \cup X^{n-1}$ такому отображению $f': A \cup X^{n-1} \cup e^n \rightarrow Y$, что $f'(e^n)$ пересекает те же клетки, что и $f(e^n)$, но не содержит всю клетку ε^k . Действительно, применим лемму к подмножеству $U = h^{-1}(f^{-1}(\varepsilon^k) \cap e^n)$ и отображению $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h: U \rightarrow \text{int } D^k$ (тогда для любого замкнутого шара $B^k \subset \text{int } D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно как замкнутое подмножество шара D^n). Лемма даёт нам отображение $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$. Тогда мы определим отображение f' по формуле

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin h(U), \\ g \circ \psi \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U). \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, так как отображения f и $g \circ \psi \circ h^{-1}$ совпадают на множестве $h(U \setminus V)$. Кроме того, гомотопия между φ и ψ даёт гомотопию между f и f' , а $f'(e^n)$ не покрывает ε^k , так как $\psi(U)$ не покрывает всего шара B^k . \square

Для доказательства леммы о свободной точке мы используем кусочно-линейную аппроксимацию.

Напомним, что k -мерный симплекс Δ^k — это выпуклая оболочка набора из $k + 1$ точек x_0, x_1, \dots, x_k в \mathbb{R}^n , не лежащих на одной $(k - 1)$ -мерной плоскости. Эти $k + 1$ точек называются вершинами симплекса, а выпуклые оболочки поднаборов множества вершин называются гранями. Грани являются симплексами размерности $\leq k$.

Симплициальный комплекс — это такой набор симплексов произвольной размерности в некотором \mathbb{R}^n , что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются,

либо пересекаются по целой грани. Здесь мы будем рассматривать только конечные симплициальные комплексы. Говорят, что некоторое подмножество пространства \mathbb{R}^n *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют симплициальный комплекс.

Барицентром симплекса Δ^k с вершинами x_0, x_1, \dots, x_k называется точка $\frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \dots + x_k)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса Δ^k называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса Δ^k ; при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение нульмерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k -мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Эти конструкции обладают следующими двумя свойствами. Во-первых, линейное (аффинное) отображение симплекса Δ^k в любое \mathbb{R}^n определяется своими значениями на вершинах. Во-вторых, если диаметр симплекса Δ^k (максимальное расстояние между его точками) равен r , то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{k}{k+1}r$. Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Доказательство леммы 4.11. Прежде всего заметим, что отображение $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$, совпадающее с φ вне V , будет автоматически гомотопно φ относительно $U \setminus V$; достаточно взять «прямолинейную» гомотопию, при которой точка $\varphi(u)$ движется к точке $\psi(u)$ по отрезку, соединяющему $\varphi(u)$ с $\psi(u)$.

Теперь построим в шаре $B \subset \text{int } D^k$ концентрические шары $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$ радиусов $r/5, 2r/5, 3r/5, 4r/5$, где r — радиус шара B . Компактное подмножество $V = \varphi^{-1}(B) \subset U$ содержится в некотором n -мерном симплексе в \mathbb{R}^n . Многократно применяя к этому симплексу барицентрическое подразбиение, мы можем выбрать в нём симплициальный подкомплекс K (триангулированное множество), удовлетворяющий следующим условиям: $V \subset K \subset U$ и для любого симплекса $\Delta \subset K$ имеем $\text{diam } \varphi(\Delta) < r/5$. Пусть K_1 — объединение симплексов построенной триангуляции множества K , φ -образы которых пересекаются с B_4 . Тогда $B_4 \cap \varphi(U) \subset \varphi(K_1) \subset B$, где последнее включение следует из того, что $\text{diam } \varphi(\Delta) < r/5$ для $\Delta \subset K_1$. Рассмотрим отображение $\varphi': K_1 \rightarrow B$, совпадающее с φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\varphi|_{K_1}$ и φ' гомотопны — они соединяются прямолинейной гомотопией

$$\varphi_t: K_1 \rightarrow B, \quad \varphi_0 = \varphi|_{K_1}, \quad \varphi_1 = \varphi'.$$

Теперь «сошьём» отображения φ и φ' в отображение $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$:

$$\psi(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{если } \varphi(u) \notin B_3, \\ \varphi'(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_2, \\ \varphi_{3-5r(u)}(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_3 \setminus B_2. \end{cases}$$

Здесь $r(u)$ — расстояние от $\varphi(u)$ до центра шара B . Отображение ψ определено и непрерывно для всех $u \in U$ (отображение φ_t определено только на подмножестве

$K_1 \subset U$, но если $\varphi(u) \in B_3$, то $u \in K_1$). При этом ψ совпадает с φ на $U \setminus V$ (если $u \in U \setminus V$, то $\varphi(u) \notin B_3$) и $\psi(U) \cap B_1 = \varphi'(K_1) \cap B_1$ (если $\varphi(u) \in B_3 \setminus B_2$, то $\psi(u) = \varphi_{3-5r(u)}(u) \notin B_1$ из-за условия на диаметры). Так как φ' линейно на симплексах триангуляции, $\varphi'(K_1) \cap B_1$ представляет собой конечное число кусков n -мерных плоскостей и не может совпадать со всем k -мерным шаром B_1 ($k > n$). Поэтому $\psi(U)$ не покрывает всего шара B_1 , а значит, и всего шара B . \square

Предложение 4.12. Любое отображение $S^k \rightarrow S^n$ при $k < n$ гомотопно отображению в точку.

Доказательство. Применим теорему о клеточной аппроксимации к клеточным разбиениям сфер с двумя клетками. При $k < n$ клеточное отображение есть отображение в точку. \square

Задачи и упражнения.

4.13. Докажите, что любое компактное подмножество клеточного пространства принадлежит некоторому конечному подпространству.

4.14. Докажите эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X :

- подмножество $Y \subset X$ замкнуто (соответственно открыто);
- пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто (соответственно открыто) для любого n ;
- прообраз $\Phi_i^{-1}(Y)$ при характеристическом отображении $\Phi_i: D^q \rightarrow X$ любой клетки e_i^q замкнут (соответственно открыт) в D^q .

4.15. Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом остове.

4.16. Докажите, что пространство, получаемое в результате приклеивания клетки к хаусдорфовому пространству, хаусдорфово.

4.17. Докажите, что для пространства, получаемого конечной итерацией операции приклеивания клетки из пустого множества, аксиомы (C) и (W) выполнены автоматически.

4.18. Докажите, что бесконечный букет отрезков $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не метризуем.

4.19. Докажите, что клеточное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно локально конечно.

4.20. Введите разбиение на клетки факторпространства X/Y клеточного пространства X по клеточному подпространству Y и докажите, что X/Y является клеточным пространством.

4.21. Докажите, что стандартное разбиение на клетки произведения $X \times Y$ с топологией произведения не удовлетворяет аксиоме (W) в случае $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ (букет счётного числа отрезков) и $Y = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} I_{\alpha}$ (букет континуального числа отрезков).

4.22. Докажите, что бесконечномерная сфера S^{∞} стягиваема.

4.23. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

4.24. Определите кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ и докажите, что $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

4.25. Докажите, что свойство продолжения гомотопии не выполнено для пар (I, A) , где $A = (0, 1]$ или $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.

4.26. Докажите, что если X хаусдорфово и $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$, то A замкнуто в X .

4.27. Докажите, что факторпространство S^2/S^0 гомотопически эквивалентно букету $S^1 \vee S^2$.

4.28. Докажите, что если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии и вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно отображению в точку, то имеется гомотопическая эквивалентность $X/A \simeq X \vee \Sigma A$.

4.29. Симметрическим квадратом пространства X называется факторпространство $(X \times X)/\sim$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Докажите, что симметрический квадрат окружности S^1 гомеоморфен листу Мёбиуса (односторонней поверхности, получаемой склейкой одной пары противоположных сторон квадрата с обращением ориентации, т.е. I^2/\sim , где $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$.)

4.30. Докажите, что симметрический квадрат двумерной сферы S^2 гомеоморфен комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

4.31. Рассмотрим клеточное разбиение окружности S^1 с двумя клетками. Убедитесь, что диагональное отображение $\Delta: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$, $t \mapsto (t, t)$, не является клеточным. Постройте явно его клеточную аппроксимацию.

4.32. Докажите, что топология на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, определяемая как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$, совпадает с топологией, происходящей из угловой метрики (расстояние между прямыми равно углу между ними).

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

5.1. Определение и основные свойства. Напомним, что петлём в точке x_0 пространства X называется отображение (путь) $\varphi: I \rightarrow X$, $t \mapsto \varphi(t)$, для которого $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Петли φ и φ' называются *гомотопными* (обозначение: $\varphi \sim \varphi'$), если существует такая гомотопия $\varphi_s: I \rightarrow X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_s(0) = \varphi_s(1) = x_0$ при $0 \leq s \leq 1$ (последнее условие означает, что гомотопия постоянна на концах путей). Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ — это петля χ , у которой $\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ и $\chi(t) = \psi(2t - 1)$ при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно (с удвоенной скоростью).

Предложение 5.1. Произведение петель (в точке x_0) обладает свойствами:

- если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$;
- $(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$ для любых петель φ, ψ, χ ;
- если ε — постоянная петля, т.е. $\varepsilon(t) = x_0$ при $0 \leq t \leq 1$, то $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ ;
- для петли φ определим петлю $\bar{\varphi}$ как $\bar{\varphi}(t) = \varphi(1 - t)$; тогда $\varphi\bar{\varphi} \sim \bar{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.

Доказательство. Проверим свойство а). Пусть φ_s — гомотопия между φ и φ' , а ψ_s — гомотопия между ψ и ψ' . Тогда гомотопия χ_s между $\chi = \varphi\psi$ и $\chi' = \varphi'\psi'$ задаётся

формулой

$$\chi_s(t) = \begin{cases} \varphi_s(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_s(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Проверим свойство б). Пусть $\xi = (\varphi\psi)\chi$ и $\xi' = \varphi(\psi\chi)$, т. е.

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(4t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \psi(4t-1) & \text{при } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \chi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \xi'(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(4t-2) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \chi(4t-3) & \text{при } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия ξ_s ($0 \leq s \leq 1$) между ξ и ξ' задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \psi(4t-1-s) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(см. рис. 2).

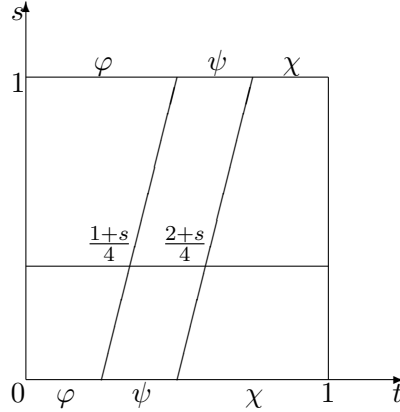


Рис. 2.

Проверим свойство в). Гомотопия между $\varphi\varepsilon$ и φ задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \\ \varepsilon(t) = x_0 & \text{при } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Проверим свойство г). Гомотопия между $\chi = \varphi\bar{\varphi}$ и ε задаётся формулой

$$\chi_s(t) = \begin{cases} \varphi(2t(1-s)) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(2(1-t)(1-s)) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Другими словами, в момент s гомотопии мы проходим по петле φ от точки x_0 до точки $\varphi(1-s)$, а затем проходим по ней обратно до x_0 . \square

Мы будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентности петли φ относительно гомотопии петель. Из предложения 5.1 следует, что множество классов гомотопных петель в точке $x_0 \in X$ образует группу относительно произведения $[\varphi][\psi] = [\varphi\psi]$ с единицей $[\varepsilon]$ и обратным элементом $[\varphi]^{-1} = [\bar{\varphi}]$. Эта группа обозначается $\pi_1(X, x_0)$ и называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0 .

Скажем, что гомотопия φ_s отображения $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ пространств с отмеченными точками *сохраняет отмеченные точки*, если $\varphi_s(x_0) = y_0$ при $0 \leq s \leq 1$.

Предложение 5.2.

- а) *Отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм групп $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.*
- б) *Тождественное отображение $\text{id}: X \rightarrow X$ индуцирует тождественный гомоморфизм фундаментальных групп, а композиция отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$, индуцирует композицию гомоморфизмов фундаментальных групп, т. е. $(gf)_* = g_*f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$.*
- в) *Если отображения $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ гомотопны с сохранением отмеченных точек, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. а) Определим отображение f_* , переводящее петлю $\varphi: I \rightarrow X$ в петлю $f \circ \varphi: I \rightarrow Y$. Если петли φ и φ' гомотопны при помощи гомотопии $F: I \times I \rightarrow X$, то петли $f \circ \varphi$ и $f \circ \varphi'$ гомотопны при помощи гомотопии $f \circ F$. Поэтому отображение f_* корректно определено на классах гомотопии петель, $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$. Далее, f_* есть гомоморфизм, так как

$$f_*([\varphi][\psi]) = f_*([\varphi\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f_*([\varphi])f_*([\psi]).$$

$$\text{б) } (gf)_*[\varphi] = [g \circ f \circ \varphi] = g_*[f \circ \varphi] = g_*f_*[\varphi].$$

в) Пусть $G: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия между f и g , сохраняющая отмеченные точки, т. е. $G(x_0, s) = y_0$ при $0 \leq s \leq 1$. Тогда для любой петли $\varphi: I \rightarrow X$ петли $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$ гомотопны: гомотопия задаётся формулой $H: I \times I \rightarrow Y$, $H(t, s) = G(\varphi(t), s)$. Следовательно, $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g_*[\varphi]$ и $f_* = g_*$. \square

5.2. Зависимость от отмеченной точки.

Теорема 5.3. *Если пространство X линейно связно, то $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ (изоморфны) для любых точек $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. Пусть $\alpha: I \rightarrow X$ — путь из x_0 в x_1 , т. е. $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = x_1$. Для каждой петли φ в точке x_0 мы положим $b_\alpha(\varphi) = (\bar{\alpha}\varphi)\alpha$. Здесь $\bar{\alpha}$ — «обратный» путь, $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$, а умножение путей определяется так же, как и умножение петель, при условии, что второй путь начинается там, где кончается первый. Тогда $b_\alpha(\varphi)$ — петля в точке x_1 , причём её гомотопический класс зависит только от гомотопических классов петли φ и пути α (где в последнем случае подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами). Получаем отображение «замены отмеченной точки»

$$b_\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1),$$

которое зависит только от гомотопического класса пути α .

Отображение b_α является гомоморфизмом, так как

$$b_\alpha([\varphi][\psi]) = [\bar{\alpha}\varphi\psi\alpha] = [\bar{\alpha}\varphi\alpha\bar{\alpha}\psi\alpha] = [\bar{\alpha}\varphi\alpha][\bar{\alpha}\psi\alpha] = b_\alpha([\varphi])b_\alpha([\psi]).$$

Кроме того, формула $b_\alpha^{-1}([\chi]) = [\alpha\chi\bar{\alpha}]$ задаёт обратный гомоморфизм, так что b_α — изоморфизм. \square

Изоморфизм b_α зависит от гомотопического класса пути α . Если β — другой путь из x_0 в x_1 , то $\gamma = \bar{\alpha}\beta$ — петля в точке x_1 и мы имеем

$$b_\beta([\varphi]) = [\bar{\beta}\varphi\beta] = [\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}\varphi\alpha\bar{\alpha}\beta] = [\bar{\beta}\alpha][\bar{\alpha}\varphi\alpha][\bar{\alpha}\beta] = [\gamma]^{-1}b_\alpha([\varphi])[\gamma].$$

В частности, если фундаментальная группа коммутативна, то изоморфизм b_α вообще не зависит от α . В этом случае мы можем говорить о фундаментальной группе,

не фиксируя отмеченной точки. В общем случае о фундаментальной группе линейно связного пространства без отмеченной точки можно говорить только как об абстрактной группе (т. е. можно сказать, что она, например, конечна или нильпотентна, но нельзя фиксировать в ней определённый элемент).

Далее мы часто будем использовать сокращённое обозначение $\pi_1(X)$ для фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ в случае, когда выбор отмеченной точки x_0 не влияет на результат или ясен из контекста.

Предложение 5.4. *Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ является изоморфизмом для любой точки $x_0 \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим такие отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\text{id}_X: X \rightarrow X$ и $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ соответственно. Если бы эти гомотопии сохраняли отмеченные точки, то согласно предложению 5.2 мы бы получили, что $g_*f_* = \text{id}$ и $f_*g_* = \text{id}$ — тождественные изоморфизмы, откуда бы следовало, что f_* — изоморфизм.

В общем случае гомотопия $F: X \times I \rightarrow X$ между id_X и gf может не сохранять отмеченную точку. Рассмотрим путь $\alpha(t) = F(x_0, t)$, который проходит отмеченная точка x_0 при этой гомотопии. Тогда $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = g(f(x_0))$. Легко видеть, что $g_*f_* = b_\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$ — изоморфизм, построенный при доказательстве предложения 5.2. Отсюда следует, что отображение $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ инъективно для любой точки $x_0 \in X$ (а g_* сюръективно). Аналогично, рассматривая гомотопию между id_Y и fg , получим, что $f_*g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, fg(y_0))$ — изоморфизм. Отсюда получаем, что f_* сюръективно, а значит, f_* — изоморфизм. \square

Напомним, что пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Следствие 5.5. *Пусть X — стягиваемое пространство. Тогда $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ для любой точки $x_0 \in X$. В частности, $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \{1\}$.*

Предложение 5.6. $\pi_1(S^n) = \{1\}$ при $n \geq 2$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации (теорема 4.10). Действительно, любая петля $\varphi: I \rightarrow S^n$, $\varphi(0) = \varphi(1) = s_0$, рассматриваемая как отображение клеточных пространств, гомотопна клеточному отображению. Если на отрезке I ввести стандартную клеточную структуру, а на S^n — клеточную структуру с двумя клетками s_0 и $S^n \setminus \{s_0\}$, то единственным клеточным отображением $I \rightarrow S^n$ при $n \geq 2$ будет отображение в точку s_0 , т. е. постоянная петля. \square

5.3. Фундаментальная группа окружности.

Теорема 5.7. *Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел.*

Доказательство. Доказательство использует построение «универсального накрытия» над окружностью; этот метод будет развит и обобщён в §7.

Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Рассматривая прообразы, мы можем отождествлять точки окружности с вещественными числами, определёнными с точностью до слагаемых вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В качестве отмеченной точки окружности мы возьмём точку $(1, 0)$, соответствующую $t = 0$.

Таким образом, петлю $\varphi: I \rightarrow S^1$ можно считать многозначной функцией на отрезке I , значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого

$2\pi k$ и значением которой в точках 0 и 1 служит само множество чисел вида $2\pi k$. У этой многозначной функции существует непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке I , значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений многозначной функции φ в этой точке. Такая однозначная функция $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$ будет определена единственным образом, если наложить условие $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

Для построения функции $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$ мы выберем такое n , что при $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}$ точки $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ не диаметрально противоположны (нужно рассмотреть открытое покрытие отрезка I , состоящее из всех множеств вида $\varphi^{-1}(A)$, где A — открытая полуокружность, и выделить конечное подпокрытие). Положив $\tilde{\varphi}(0) = 0$, при $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ мы берём в качестве $\tilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t , которое отличается от 0 меньше чем на π . Далее, при $\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}$ мы берём в качестве $\tilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t , которое отличается от $\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})$ меньше чем на π , и т. д.

По построению $f(\tilde{\varphi}(t)) = \varphi(t)$; в частности, $\tilde{\varphi}(1) = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, всякая непрерывная функция $\chi: I \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\chi(0) = 0$ и $\chi(1) = 2\pi k$, имеет вид $\tilde{\varphi}$ для некоторой петли φ , а именно для петли $\varphi(t) = f(\chi(t))$.

Теперь построим отображение $g: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, положив $g([\varphi]) = \tilde{\varphi}(1)/2\pi$. Чтобы убедиться, что g — изоморфизм групп, заметим следующее. Во-первых, число $\tilde{\varphi}(1)/2\pi$ не меняется при гомотопии, поскольку область возможных значений $\tilde{\varphi}(1)$ дискретна. Таким образом, число $\tilde{\varphi}(1)/2\pi$ зависит только от гомотопического класса $[\varphi]$ и отображение g определено корректно. Во-вторых, отображение g сюръективно, т.е. любое число $k \in \mathbb{Z}$ лежит в его образе. Действительно, достаточно взять $\varphi = \psi_k$, где $\tilde{\psi}_k(t) = 2\pi kt$. В-третьих, если $\tilde{\varphi}_1(1) = \tilde{\varphi}_2(1)$, то $\varphi_1 \sim \varphi_2$, а потому g инъективно. Действительно, функции $\tilde{\varphi}_1(t)$ и $\tilde{\varphi}_2(t)$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (если $\tilde{\varphi}(1) = 2\pi k$, то $\tilde{\varphi} \sim \tilde{\psi}_k$; гомотопия задаётся формулой $\tilde{\varphi}_s(t) = (1-s)\tilde{\varphi}(t) + s2\pi kt$). Наконец, в-четвёртых, g является гомоморфизмом, так как $g([\varphi]) = g([\psi_k])$ для некоторого k , а $\psi_k \psi_l \sim \psi_{k+l}$, так как $\tilde{\psi}_k \tilde{\psi}_l(1) = \tilde{\psi}_{k+l}(1)$. \square

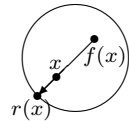
Предложение 5.8. *Окружность $S^1 \subset D^2$ не является ретрактом диска D^2 .*

Доказательство. Допустим, существует ретракция $r: D^2 \rightarrow S^1$, т.е. композиция $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$ есть тождественное отображение. Тогда согласно предложению 5.2 композиция $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$ есть тождественный изоморфизм. Но это невозможно, так как $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = \{1\}$. \square

В качестве следствия мы получаем классический результат, доказательство которого было одним из первых триумфов алгебраической топологии.

Теорема 5.9 (Брауэр). *Любое непрерывное отображение $f: D^2 \rightarrow D^2$ имеет неподвижную точку, т.е. точку x , для которой $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Тогда можно определить отображение $r: D^2 \rightarrow S^1$, взяв в качестве $r(x)$ точку окружности S^1 , в которой луч, идущий из точки $f(x)$ в точку x , пересекает диск D^2 . При этом, очевидно, $r(x) = x$, если $x \in S^1$, т.е. r — ретракция. Это противоречит предложению 5.8. \square



Фундаментальная группа окружности используется в следующем топологическом доказательстве «основной теоремы алгебры».

Теорема 5.10. Любой непостоянный многочлен $p(z)$ с коэффициентами в \mathbb{C} имеет комплексный корень.

Доказательство. Можно считать, что $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. Предположим, что $p(z)$ не имеет корней в \mathbb{C} . Тогда для каждого вещественного $r \geq 0$ можно определить следующую петлю с началом в точке 1 на единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$(3) \quad \varphi_r: I \rightarrow S^1, \quad \varphi_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}.$$

При изменении r получаем гомотопию петель с началом и концом в точке 1. Петля φ_0 тривиальна, поэтому $[\varphi_r] = [\varphi_0] = 0$ в $\pi_1(S^1)$ для всех r .

Теперь выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|, 1\}$. Тогда при $|z| = r$ получаем

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|z^{n-1}| > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|.$$

Отсюда следует, что при $0 \leq t \leq 1$ многочлен $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$ не имеет корней на окружности $|z| = r$. Заменяя p на p_t в формуле (3), мы получим функцию $\varphi_r(s, t)$. При изменении t от 1 до 0 эта функция задаёт гомотопию петли $\varphi_r(s) = \varphi_r(s, 1)$ в петлю $\varphi_r(s, 0) = \psi_n(s) = e^{2\pi ins}$, которая представляет собой n -ю степень образующей группы $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Так как $[\psi_n] = [\varphi_r] = 0$, мы получаем $n = 0$. Таким образом, единственные многочлены без корней в \mathbb{C} — это константы. \square

Задачи и упражнения.


5.11. Докажите, что если отображения $f, f': X \rightarrow Y$ гомотопны посредством гомотопии $F: X \times I \rightarrow Y$, то индуцированные гомоморфизмы $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ и $f'_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f'(x_0))$ удовлетворяют соотношению $f'_* = b_\alpha f_*$, где $\alpha(t) = F(x_0, t)$ — путь из $f(x_0)$ в $f'(x_0)$.

5.12. Докажите, что если X и Y линейно связны, то $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

5.13. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.14. Докажите, что если X — дискретное пространство, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.15. Докажите, что пространство \mathbb{R}^2 не гомеоморфно \mathbb{R}^n при $n \neq 2$.

5.16. Докажите, что любое непрерывное отображение пространства  (три отрезка с отождествлённым началом) в себя имеет неподвижную точку.

5.17. Топологической группой называется пространство G с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, и взятия обратного $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, являются непрерывными. Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1(G)$ топологической группы абелева.

6. ТЕОРЕМА ВАН КАМПЕНА

Теорема ван Кампена позволяет вычислять фундаментальную группу пространства, представленного в виде объединения своих подмножеств, по фундаментальным группам этих подмножеств.

Нам понадобится ряд алгебраических понятий.

6.1. Свободное произведение групп. Пусть дан конечный или бесконечный набор групп $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ (если групп конечное число, то используется обозначение $G_1 * G_2 * \dots * G_k$) состоит из всех конечных слов $g_1 g_2 \dots g_m$ произвольной длины $m \geq 0$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq e$, причём соседние буквы g_i и g_{i+1} лежат в разных группах, т.е. $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются *приведёнными*; неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе G_{α_i} , на их произведение в G_{α_i} и удалив тривиальные буквы. Слово разрешается быть пустым; пустое слово будет единицей в группе $*_\alpha G_\alpha$. Умножение в группе $*_\alpha G_\alpha$ — это приставление, т.е. запись одного слова за другим: $(g_1 \dots g_m)(h_1 \dots h_n) = g_1 \dots g_m h_1 \dots h_n$, с последующим преобразованием в приведённое слово. Например, в произведении $(g_1 \dots g_m)(g_m^{-1} \dots g_1^{-1})$ всё сокращается и мы получаем единицу группы $*_\alpha G_\alpha$, т.е. пустое слово. Отсюда следует существование обратного элемента для любого слова. Нетривиальной является проверка ассоциативности умножения в $*_\alpha G_\alpha$.

Лемма 6.1. *Определённая выше операция умножения приведённых слов (приставление с последующим приведением) ассоциативна.*

Доказательство. Пусть W — множество приведённых слов $g_1 \dots g_m$, включая пустое слово. Каждому элементу $g \in G_\alpha$ сопоставим отображение $L_g : W \rightarrow W$, задаваемое умножением слева, $L_g(g_1 \dots g_m) = gg_1 \dots g_m$, с последующим приведением. При этом мы имеем $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ для любых $g, g' \in G_\alpha$, т.е. $g(g'(g_1 \dots g_m)) = (gg')(g_1 \dots g_m)$; это следует из ассоциативности умножения в G_α . Из формулы $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ вытекает, что отображение L_g обратимо с обратным отображением $L_{g^{-1}}$. Поэтому сопоставление $g \mapsto L_g$ задаёт гомоморфизм группы G_α в группу $P(W)$ всех перестановок множества W . Теперь определим отображение $L : W \rightarrow P(W)$ формулой $L(g_1 \dots g_m) = L_{g_1} \dots L_{g_m}$. Отображение L инъективно, так как перестановка $L(g_1 \dots g_m)$ отображает пустое слово в $g_1 \dots g_m$ и поэтому не является тождественной, если само слово $g_1 \dots g_m$ не является пустым. Операция умножения в W при отображении L переходит в композицию в $P(W)$, так как $L_{gg'} = L_g L_{g'}$. Так как композиция перестановок ассоциативна, мы получаем, что умножение в W ассоциативно. \square

Каждая группа G_α отождествляется с подгруппой свободного произведения $*_\alpha G_\alpha$, состоящей из пустого слова и однобуквенных слов $g \in G_\alpha$.

Любой набор гомоморфизмов $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi : *_\alpha G_\alpha \rightarrow H$. А именно, значение гомоморфизма φ на слове $g_1 \dots g_m$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, полагается равным $\varphi_{\alpha_1}(g_1) \dots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Таким образом, свободное произведение является *копроизведением* в категории групп.

Например, включения $G \hookrightarrow G \times H$ и $H \hookrightarrow G \times H$ индуцируют эпиморфизм $G * H \rightarrow G \times H$.

Пример 6.2. Если каждая из групп G_α есть бесконечная циклическая группа \mathbb{Z} (группа целых чисел), то свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ называется *свободной группой*. Элементами свободной группы являются слова вида $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$, где $a_i \in G_{\alpha_i} \cong \mathbb{Z}$ — образующая, $n_i \neq 0$ — целые числа и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ для любого i . Набор $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$, в который входит по одной образующей a_α каждой из групп $G_\alpha = \mathbb{Z}$, называется *базисом* свободной группы, а мощность $|A|$ базиса называется *рангом* свободной группы. При этом базис свободной группы определён неоднозначно, и тот факт, что все базисы имеют одинаковую мощность, нуждается в доказательстве, которое мы

здесь не приводим. Свободная группа конечного ранга k будет обозначаться F_k или $F(a_1, \dots, a_k)$, если необходимо явно указать образующие. Заметим, что $F_1 \cong \mathbb{Z}$, а группа F_2 неабелева.

Всякую группу G можно получить как факторгруппу свободной группы. Для этого надо выбрать *набор образующих* группы G , т.е. такой набор элементов $g_i, i \in I$, что любой другой элемент $g \in G$ представляется в виде произведения элементов g_i и g_i^{-1} (например, в качестве набора образующих можно взять все элементы группы G). Тогда мы имеем эпиморфизм $f: F \rightarrow G$ из свободной группы F с базисом $a_i, i \in I$, в группу G , переводящий i -ю образующую a_i группы F в g_i . Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой $R \subset F$; мы имеем $G \cong F/R$. В теореме 7.16 мы покажем, что любая подгруппа свободной группы является свободной. Элементы группы R называются *соотношениями* между образующими g_i . При гомоморфизме f элемент $r \in R$ переходит в произведение элементов g_i, g_i^{-1} , которое равно 1 в группе G . Подгруппа $R \subset F$ является нормальной, как ядро гомоморфизма, т.е. вместе с каждым элементом $r \in R$ содержит все его сопряжённые $ara^{-1}, a \in F$.

Пусть задан набор $\{r_j: j \in J\}$ где каждое r_j является конечным произведением элементов $g_i, g_i^{-1}, i \in I$. Говорят, что группа G *задана образующими g_i и соотношениями r_j* , если она представлена в виде факторгруппы свободной группы с образующими g_i по её минимальной нормальной подгруппе, содержащей все элементы r_j . Используется запись

$$G = \langle g_i, i \in I \mid r_j, j \in J \rangle.$$

Если G — произвольная группа и $\{r_j: j \in J\}$, — набор её элементов, то *факторгруппой группы G по соотношениям $r_j = 1$* называется факторгруппа группы G по минимальной нормальной подгруппе, содержащей элементы $r_j, j \in J$.

Абеленизацией группы G называется факторгруппа группы G по всем соотношениям $ghg^{-1}h^{-1} = 1, g, h \in G$, т.е. факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всеми *коммутаторами* $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}, g, h \in G$. Эта подгруппа называется *коммутантом* группы G и обозначается $[G, G]$ или G' . Абеленизация свободной группы $F = *_\alpha \mathbb{Z}$ — это свободная абелева группа $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$, базисом которой служит то же самое множество образующих.

6.2. Формулировка и доказательство теоремы. Пусть пространство X представлено в виде объединения линейно связных открытых подмножеств A_α , каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$. Гомоморфизмы $i_\alpha: \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, индуцированные включениями, продолжаются до гомоморфизма

$$\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X).$$

Если

$$i_{\alpha\beta}: \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$$

— гомоморфизм, индуцированный включением $A_\alpha \cap A_\beta \rightarrow A_\alpha$, то $i_\alpha i_{\alpha\beta} = i_\beta i_{\beta\alpha}$, так как обе эти композиции индуцированы включением $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Таким образом, ядро гомоморфизма Φ содержит элементы вида $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, где $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

Теорема 6.3 (ван Кампен). *Пусть X — объединение линейно связных открытых множеств A_α , каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$.*

- а) *Если каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, то отображение $\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

- б) Если, кроме того, каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, то ядро гомоморфизма Φ — это нормальная подгруппа N , порождённая всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, а потому Φ индуцирует изоморфизм

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

Доказательство. Докажем утверждение а), т.е. сюръективность отображения Φ . Мы утверждаем, что для данной петли $f: I \rightarrow X$ в отмеченной точке x_0 существует такое разбиение $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ отрезка I , что образ каждого отрезка $[s_{i-1}, s_i]$ при отображении f целиком содержится в одном из множеств A_α . Действительно, так как f непрерывно, каждая точка $s \in I$ имеет окрестность $U(s) \subset I$, для которой $f(U(s))$ лежит в одном из множеств A_α . Из компактности отрезка следует, что конечное число таких интервалов покрывает I . Тогда концы этих интервалов задают требуемое разбиение отрезка I .

Пусть $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$, и обозначим $f_i = f|_{[s_{i-1}, s_i]}$. Тогда $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_m$, где $f_i \subset A_i$. Так как каждое пространство $A_i \cap A_{i+1}$ линейно связно, мы можем соединить x_0 с $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ путём g_i в $A_i \cap A_{i+1}$. Теперь рассмотрим петлю

$$(f_1 \cdot \bar{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \bar{g}_3) \cdot \dots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m),$$

гомотопную f . Эта петля является композицией петель, каждая из которых расположена в одном из множеств A_α ; такие петли заключены в скобки. Следовательно, $[f]$ лежит в образе отображения Φ , а потому Φ сюръективно.

Теперь докажем утверждение б), т.е. проверим, что при описанном там условии ядро гомоморфизма Φ совпадает с N . Мы будем рассматривать *факторизации* элементов $[f] \in \pi_1(X)$, т.е. формальные разложения вида $[f] = [f_1] \cdot \dots \cdot [f_k]$, где

- каждый множитель f_i — это петля с началом и концом в x_0 , целиком содержащаяся в одном из множеств A_α , с гомотопическим классом $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$;
- петля f гомотопна $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ в X .

Таким образом, факторизация гомотопического класса $[f]$ — это слово в $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, возможно приводимое, которое переходит в $[f]$ при отображении Φ . Утверждение а) показывает, что у каждого элемента $[f] \in \pi_1(X)$ есть факторизация.

Назовём две факторизации класса $[f]$ *эквивалентными*, если они связаны последовательностью преобразований следующих двух видов или обратных к ним:

- 1) соседние члены $[f_i][f_{i+1}]$ объединяются в один член $[f_i \cdot f_{i+1}]$, если $[f_i]$ и $[f_{i+1}]$ лежат в одной группе $\pi_1(A_\alpha)$;
- 2) член $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ рассматривается как лежащий в группе $\pi_1(A_\beta)$, а не в $\pi_1(A_\alpha)$, если f_i — петля в $A_\alpha \cap A_\beta$.

Первое преобразование не изменяет элемент группы $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, задаваемый факторизацией. Второе преобразование не изменяет образ этого элемента в факторгруппе $Q = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$ согласно определению подгруппы N . Таким образом, эквивалентные факторизации дают один и тот же элемент группы Q .

Мы покажем, что любые две факторизации класса $[f]$ эквивалентны. Отсюда будет следовать, что отображение $Q \rightarrow \pi_1(X)$, индуцированное отображением Φ , инъективно. Тем самым утверждение б) будет доказано.

Пусть $[f_1] \cdot \dots \cdot [f_k]$ и $[f'_1] \cdot \dots \cdot [f'_\ell]$ — две факторизации класса $[f]$. Пусть $F: I \times I \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ с $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_\ell$. Существуют такие разбиения $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, что образ каждого

из прямоугольников $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ при отображении F лежит в одном множестве A_α , которое мы обозначим A_{ij} . Эти разбиения можно получить, покрыв $I \times I$ конечным числом прямоугольников $[a, b] \times [c, d]$, каждый из которых отображается в одно множество A_α , используя рассуждения с компактностью, а затем разделив $I \times I$ всеми горизонтальными и вертикальными прямыми, содержащими стороны этих прямоугольников. Можно считать, что s -разбиение является подразбиением тех разбиений, которые дают произведения $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ и $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_\ell$. Так как F отображает окрестность прямоугольника R_{ij} в A_{ij} , мы можем пошевелить вертикальные стороны прямоугольников R_{ij} так, чтобы каждая точка квадрата $I \times I$ принадлежала не более чем трём прямоугольникам R_{ij} . Можно считать, что есть по крайней мере три ряда прямоугольников, поэтому мы можем шевелить только прямоугольники в промежуточных рядах, оставляя верхний и нижний ряды без изменений. Занумеруем теперь прямоугольники R_1, R_2, \dots, R_{mn} , как показано на рисунке.

9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Если γ — путь в $I \times I$, идущий из точки левой стороны в точку правой стороны, то $F|_\gamma$ является петлёй с началом и концом в отмеченной точке x_0 , так как F отображает левую и правую стороны квадрата $I \times I$ в x_0 . Пусть γ_r — путь, отделяющий первые r прямоугольников R_1, \dots, R_r от остальных прямоугольников. Тогда γ_0 — нижняя сторона квадрата $I \times I$, а γ_{mn} — его верхняя сторона. Будем переходить от γ_r к γ_{r+1} , протаскивая этот путь по прямоугольнику R_{r+1} .

Далее *вершинами* будем называть вершины прямоугольников R_r . Для каждой вершины v , для которой $F(v) \neq x_0$, рассмотрим путь g_v из x_0 в $F(v)$. Мы можем выбрать путь g_v так, чтобы он принадлежал пересечению двух или трёх множеств A_{ij} в соответствии с тем, сколько прямоугольников R_r содержат вершину v , так как мы предполагаем, что двойные и тройные пересечения множеств A_{ij} линейно связны. Вставим в $F|_{\gamma_r}$ пути вида $\bar{g}_v g_v$ в последовательных вершинах v , как при доказательстве сюръективности отображения Φ . В результате мы получим факторизацию класса $[F|_{\gamma_r}]$. Петли в этой факторизации соответствуют вертикальным и горизонтальным отрезкам между соседними вершинами, через которые проходит путь γ_r . Петлю, соответствующую отрезку между соседними вершинами, можно рассматривать как лежащую в A_{ij} для любого из прямоугольников R_s , содержащих этот отрезок. Если мы выберем другой из этих прямоугольников R_s , то факторизация класса $[F|_{\gamma_r}]$ заменится на эквивалентную факторизацию. При протаскивании пути по прямоугольнику R_{r+1} факторизация $F|_{\gamma_r}$ заменяется на $F|_{\gamma_{r+1}}$ посредством гомотопии в пределах множества A_{ij} , соответствующего R_{r+1} . Это множество A_{ij} можно выбрать одним и тем же для всех отрезков путей γ_r и γ_{r+1} , лежащих в R_{r+1} . Таким образом, факторизации, соответствующие последовательным путям γ_r и γ_{r+1} , эквивалентны.

Мы можем добиться, чтобы факторизация, соответствующая γ_0 , была эквивалентна факторизации $[f_1] \cdot \dots \cdot [f_k]$, выбирая путь g_v для каждой вершины v вдоль нижней стороны квадрата $I \times I$ так, чтобы он принадлежал не только двум множествам A_{ij} , соответствующим прямоугольнику R_s , содержащему v , но также и множеству A_α , соответствующему пути f_i , в области определения которого лежит точка v . В случае, когда v — общий конец областей определения двух последовательных путей f_i , выполняется равенство $F(v) = x_0$, т. е. путь g_v выбирать не нужно. Аналогично мы

можем считать, что факторизация, соответствующая последнему пути γ_{mn} , эквивалентна $[f'_1] \dots [f'_\ell]$. Так как факторизации, соответствующие всем путям γ_r , эквивалентны, мы получаем, что факторизации $[f_1] \dots [f_k]$ и $[f'_1] \dots [f'_\ell]$ эквивалентны. \square

Сформулируем отдельно частный случай теоремы ван Кампена, когда покрытие пространства X состоит всего из двух множеств, $X = A \cup B$. В этом случае условие пункта б) теоремы выполнено автоматически. Кроме того, не нужно требовать, чтобы каждое из множеств A и B содержало отмеченную точку, так как можно выбрать новую отмеченную точку в пересечении $A \cap B$.

Следствие 6.4. Пусть $X = A \cup B$, где множества A и B , а также их пересечение $A \cap B$ открыты и линейно связны. Тогда

$$\pi_1(X) \cong (\pi_1(A) * \pi_1(B))/N,$$

где N — нормальная подгруппа, порождённая элементами вида $i_{AB}(\omega)i_{BA}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A \cap B)$, а $i_{AB}: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$ и $i_{BA}: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями $A \cap B \hookrightarrow A$ и $A \cap B \hookrightarrow B$.

Группа $(\pi_1(A) * \pi_1(B))/N$ называется амальгамированным произведением групп $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ над $\pi_1(A \cap B)$, см. упражнение 6.13.

Замечание. В случае, когда покрытие пространства X состоит более чем из двух множеств A_α , условие, что каждое A_α содержит отмеченную точку x_0 , существенно. Из этого условия следует, что все тройные пересечения непусты.

В качестве ещё одного следствия мы получаем описание фундаментальной группы букета $\bigvee_\alpha X_\alpha$ пространств X_α с отмеченными точками x_α .

Следствие 6.5. Если каждая точка $x_\alpha \in X_\alpha$ является деформационным ретрактом своей окрестности $U_\alpha \subset X_\alpha$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_1\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong *_{\alpha} \pi_1(X_\alpha).$$

В частности, для букета окружностей $\bigvee_\alpha S^1$ группа $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1)$ свободная.

Доказательство. Каждое пространство X_α является деформационным ретрактом своей окрестности $A_\alpha = X_\alpha \vee \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta \subset \bigvee_\alpha X_\alpha$. Пересечение двух и более различных множеств A_α — это пространство $\bigvee_\alpha U_\alpha$, которое стягиваемо. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что $\Phi: *_{\alpha} \pi_1(X_\alpha) \rightarrow \pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ — изоморфизм. \square

6.3. Фундаментальная группа клеточного пространства. Здесь мы научимся задавать фундаментальные группы клеточных пространств образующими и соотношениями. Это позволит нам явно вычислять фундаментальную группу, задав клеточную структуру.

Вначале выведем ещё одно важное следствие теоремы о клеточной аппроксимации.

Предложение 6.6. Всякое линейно связанное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.

Доказательство. Выберем в X нульмерную клетку e_0 и соединим её путями с остальными нульмерными клетками (пути могут пересекаться). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном остове X^1 . Пусть γ_i — путь, соединяющий нульмерную клетку e_0 с нульмерной

клеткой e_i . Для каждого i приклеим к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути γ_i . Получим новое клеточное пространство \tilde{X} , которое содержит X и, кроме того, клетки e_i^1, e_i^2 (верхние полуокружности и внутренности приклеенных дисков).

Ясно, что X есть деформационный ретракт в \tilde{X} : каждый приклеенный диск можно стянуть на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыкающих клеток e_i^1 (верхних полуокружностей). Очевидно, Y стягиваемо. Следовательно, $\tilde{X}/Y \simeq \tilde{X} \simeq X$. Но у \tilde{X}/Y всего одна нульмерная клетка. \square

Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0 . Отображение $\varphi: S^1 \rightarrow X$, переводящее отмеченную точку 0 окружности в x_0 , можно рассматривать как петлю в (X, x_0) , и поэтому оно задаёт элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Если же отображение $\varphi: S^1 \rightarrow X$ переводит 0 в какую-то другую точку $\varphi(0)$, то мы получаем элемент группы $\pi_1(X, \varphi(0))$, которая связана с $\pi_1(X, x_0)$ неканоническим изоморфизмом (см. обсуждение после теоремы 5.3). Таким образом, любое отображение $\varphi: S^1 \rightarrow X$ задаёт элемент группы $\pi_1(X, x_0)$, определённый с точностью до сопряжения.

Пусть X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой $e^0 = x_0$, одномерными клетками $e_i^1, i \in I$, и двумерными клетками $e_j^2, j \in J$. Характеристические отображения $D^2 \rightarrow X$ двумерных клеток определяют отображения приклеивания $f_j: S^1 \rightarrow X^1$ (см. §4), которые задают элементы $\beta_j \in \pi_1(X^1)$ с точностью до сопряжения. При этом X^1 — это букет окружностей \bar{e}_i^1 и группа $\pi_1(X^1, x_0)$ есть свободная группа с множеством образующих I в силу следствия 6.5.

Теорема 6.7. *Пусть (X, x_0) — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой в отмеченной точке x_0 . Группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна факторгруппе свободной группы $\pi_1(X^1, x_0)$ с образующими, отвечающими одномерным клеткам, по соотношениям $\beta_j = 1, j \in J$, отвечающим двумерным клеткам.*

Доказательство. Проведём доказательство по индукции по приклеиваемым клеткам размерности $n \geq 2$. Если таких клеток нет, то пространство $X = X^1$ — букет сфер и $\pi_1(X)$ — свободная группа с образующими, отвечающими одномерным клеткам.

Пусть $X' = X \cup_f D^n$ получено из X приклеиванием n -мерной клетки e^n при помощи отображения $f: S^{n-1} \rightarrow X$, т. е. мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X'. \end{array}$$

Внутри клетки e^n выберем точку y . Пусть $A = X' \setminus \{y\}$ и $B = X' \setminus X$. Тогда A деформационно ретрагируется на X , а B стягиваемо. Теперь применим теорему ван Кампена к покрытию $X' = A \cup B$. Так как $\pi_1(A) = \pi_1(X)$, а $\pi_1(B) = \{1\}$, мы получаем, что $\pi_1(X')$ изоморфно факторгруппе группы $\pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(X)$ по нормальной подгруппе, порождённой образом отображения $\pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$.

Далее сначала рассмотрим случай приклеивания двумерной клетки e^2 , т. е. $n = 2$. В этом случае $A \cap B$ деформационно ретрагируется на окружность в $e^2 \setminus \{y\}$, и мы получаем, что образ группы $\pi_1(A \cap B)$ в $\pi_1(A)$ — это нормальная подгруппа, порождённая классом петли, задаваемой отображением $f: S^1 \rightarrow X^1$. Таким образом,

при приклеивании новой двумерной клетки e^2 к соотношениям в группе $\pi_1(X) = \pi_1(A)$ добавляется ещё одно соотношение $\beta = 1$, отвечающее этой двумерной клетке.

После того как мы приклеили все двумерные клетки, дальнейшее приклеивание клеток e^n размерности $n \geq 3$ не меняет группу $\pi_1(X)$. Это следует из того, что $A \cap B$ деформационно ретрагируется на $(n-1)$ -мерную сферу в $e^n \setminus \{y\}$; таким образом, $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ при $n \geq 3$ согласно предложению 5.6. \square

Пример 6.8. Вычислим фундаментальную группу ориентируемой поверхности S_g рода g (сферы с g ручками). Она имеет клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками a_1, \dots, a_g и b_1, \dots, b_g и одной двумерной клеткой, см. пример 4.4.6 и рис. 1 г). Одномерный остов — это букет $2g$ окружностей; его фундаментальная группа — свободная группа F_{2g} с образующими a_1, \dots, a_g и b_1, \dots, b_g . Двумерная клетка приклеена по петле, заданной произведением коммутаторов этих образующих. Поэтому $\pi_1(S_g)$ — факторгруппа свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

В частности, фундаментальная группа тора $T^2 = S_1$ изоморфна факторгруппе группы F_2 по соотношению $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т.е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это, конечно, следует из простой формулы $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ (см. упражнение 5.12).

Предложение 6.9. *Поверхность S_g не гомеоморфна и даже не гомотопически эквивалентна поверхности $S_{g'}$, если $g \neq g'$.*

Доказательство. Группа $\pi_1(S_g)$ получается из свободной группы F_{2g} факторизацией по одному соотношению, которое представляет собой произведение коммутаторов, а значит, лежит в коммутанте F'_{2g} . Поэтому абелизация группы $\pi_1(S_g)$ совпадает с абелизацией свободной группы F_{2g} и представляет собой группу \mathbb{Z}^{2g} — свободную абелеву группу ранга $2g$. Если $S_g \simeq S_{g'}$, то $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{g'})$, а значит, и абелизации этих групп изоморфны, откуда следует равенство $g = g'$. \square

Пример 6.10. Используя клеточное разбиение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (см. пример 4.4.6 и рис. 1 б)), мы получаем, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ изоморфна факторгруппе группы \mathbb{Z} (свободной группы с одной образующей a) по одному соотношению $a^2 = 1$. Таким образом, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$.

Отсюда следует, что проективная плоскость не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g .

Задачи и упражнения.

6.11. Докажите, что абелизацией группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ является $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите ядро гомоморфизма абелизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

6.12. Покажите, что гомоморфизм $\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связны.

6.13. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1: H \rightarrow G_1$ и $f_2: H \rightarrow G_2$. Определим амальгамированное произведение $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.

Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_1 *_H G_2, \end{array}$$

т. е. обладает соответствующим универсальным свойством, см. диаграмму (2).

6.14. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & X. \end{array}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированного произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(A_1) \\ \downarrow (i_2)_* & & \downarrow \\ \pi_1(A_2) & \longrightarrow & \pi_1(A_1) *_\pi_1(B) \pi_1(A_2) \\ & \searrow (j_2)_* & \nearrow (j_1)_* \\ & & \pi_1(X). \end{array}$$

(дashed arrow h from $\pi_1(A_1) *_\pi_1(B) \pi_1(A_2)$ to $\pi_1(X)$)

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h: \pi_1(A_1) *_\pi_1(B) \pi_1(A_2) \rightarrow \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом ($X = A_1 \cup_B A_2$). Таким образом, функтор π_1 переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

6.15. Найдите фундаментальную группу дополнения окружности в \mathbb{R}^3 .

6.16. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в \mathbb{R}^3 не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

6.17. Найдите фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в \mathbb{R}^3 .

6.18. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

6.19. Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна K , используя клеточное разбиение из примера 4.4.6 и рис. 1 в). Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^2 c_2^2 \rangle.$$

Опишите абелизацию группы $\pi_1(K)$ и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g .

6.20. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками (см. пример 4.4.6). Докажите, что фундаментальная группа поверхности P_g или K_g изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими c_1, \dots, c_k по одному соотношению $c_1^2 \cdot \dots \cdot c_k^2 = 1$, где $k = 2g + 1$ для P_g и $k = 2g + 2$ для K_g . Докажите, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.

6.21. Вычислите фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

6.22. Постройте клеточное пространство с фундаментальной группой \mathbb{Z}_3 (циклическая группа из трёх элементов).

6.23. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

7. НАКРЫТИЯ

7.1. Определение и примеры. Линейно связное пространство \tilde{X} называется *накрывающим пространством* для линейно связного пространства X , если задано такое отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причём диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times \Gamma \\ & \searrow p & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, $p^{-1}(U)$ является объединением непересекающихся открытых множеств в \tilde{X} , каждое из которых p гомеоморфно отображает на U . Отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *накрытием*.

Пример 7.1.

1. Отображение $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Это накрытие использовалось при доказательстве изоморфизма $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (теорема 5.7).

2. Отображение $q_k: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

3. Отображение $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую в \mathbb{R}^{n+1} , проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$ (см. пример 4.4.3).

Ясно, что если $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ и $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ — накрытия, то и $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ — накрытие. В частности, квадрат накрытия из примера 7.1.1 даёт накрытие $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ тора $T^2 = S^1 \times S^1$ плоскостью.

7.2. Свойство поднятия гомотопии. Говорят, что отображение $p: Y \rightarrow X$ обладает *свойством поднятия гомотопии* (covering homotopy property, ЧНП) по отношению к пространству Z , если для любого отображения $f: Z \rightarrow Y$ и такой гомотопии $F: Z \times I \rightarrow X$, что $p \circ f = F_0$, существует *накрывающая гомотопия* $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow Y$, для которой $\tilde{F}_0 = f$ и $p \circ \tilde{F} = F$. Это описывается следующей диаграммой:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

где i_0 — вложение $z \mapsto (z, 0)$.

Ниже мы покажем, что накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ обладают свойством поднятия гомотопии, причём накрывающая гомотопия единственна. При $Z = pt$ свойство поднятия гомотопии (4) превращается в *свойство поднятия путей*:

Лемма 7.2. *Для любого пути $\gamma: I \rightarrow X$ и любой такой точки $\tilde{x} \in \tilde{X}$, что $p(\tilde{x}) = \gamma(0)$, существует единственный путь $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$, для которого $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ и $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Доказательство. Окрестности из определения накрытия мы будем называть *элементарными*. Для каждого $t \in I$ найдём элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $\gamma(t)$. В силу компактности отрезка I из этих окрестностей можно выбрать последовательность U_1, \dots, U_N таким образом, что $U_i \supset \gamma(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфен дискретному набору таких же окрестностей. Пусть \tilde{U}_1 — та из них, которая содержит точку \tilde{x} . Определим $\tilde{\gamma}: [0, t_2] \rightarrow \tilde{U}_1$ как прообраз куска $\gamma|_{[0, t_2]}$ пути γ от $0 = t_1$ до t_2 , который попадает в U_1 . Затем сделаем то же самое с окрестностью U_2 , точкой $\tilde{\gamma}(t_2)$ и куском пути $\gamma|_{[t_2, t_3]}$ и т.д. Так как число окрестностей конечно, процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, путь с нужными свойствами существует только один. \square

Теорема 7.3 (о поднятии гомотопии). *Накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любому пространству Z , причём накрывающая гомотопия $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow \tilde{X}$ (см. диаграмму (4)) единственна.*

Доказательство. Пусть даны отображение $f: Z \rightarrow \tilde{X}$ и гомотопия $F: Z \times I \rightarrow X$. Перейдя к сопряжённому, получаем отображение $F': Z \rightarrow X^I$, переводящее точку $z \in Z$ в путь $t \mapsto F(z, t)$ в пространстве X . В силу леммы 7.2 этот путь единственным образом поднимается до пути в \tilde{X} , который начинается в точке $f(z) \in \tilde{X}$. Таким образом, существует единственное отображение $\tilde{F}': Z \rightarrow \tilde{X}^I$, входящее в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{p_0} & \tilde{X}^I \\ \uparrow f & \nearrow \tilde{F}' & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{F'} & X^I \end{array}$$

где p_0 — отображение, сопоставляющее пути его начальную точку. Переходя обратно от сопряжённых отображений к исходным, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

которая и выражает требуемое свойство поднятия гомотопии с единственной накрывающей гомотопией. Необходимо проверить непрерывность построенных отображений \tilde{F}' и \tilde{F} ; это будет следовать из более общей теоремы 7.6 о поднятии отображения, доказываемой ниже. \square

7.3. Накрытия и фундаментальная группа.

Теорема 7.4. *Гомоморфизм*

$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

индуцированный накрытием $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, является мономорфизмом. Подгруппа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в $\pi_1(X, x_0)$ состоит из гомотопических классов петель в X с началом в x_0 , поднятия которых в \tilde{X} с началом в \tilde{x}_0 являются петлями.

Доказательство. Надо доказать, что если петля $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \tilde{X}$ с началом \tilde{x}_0 проектируется в петлю $\varphi: I \rightarrow X$, гомотопную нулю (т.е. гомотопную постоянной петле), то и сама петля $\tilde{\varphi}$ гомотопна нулю. Фиксируем гомотопию $\varphi_t: I \rightarrow X$, для которой $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $\varphi_1(I) = x_0$. По теореме о поднятии гомотопии существует гомотопия $\tilde{\varphi}_t: I \rightarrow \tilde{X}$, для которой $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}$ и $p \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t$. Таким образом, для любого $t \in [0, 1]$ петля $\varphi_t: I \rightarrow X$ поднимается до пути $\tilde{\varphi}_t: I \rightarrow \tilde{X}$. При изменении t начало $\tilde{\varphi}_t(0)$ поднятого пути проходит некоторый путь в слое $p^{-1}(x_0)$ над x_0 . Но так как слой — дискретное пространство, этот путь в слое постоянен (непрерывное отображение из связного пространства I в дискретное пространство является постоянным). Поэтому $\tilde{\varphi}_t(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$. Аналогично $\tilde{\varphi}_t(1) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{x}_0$. Наконец, $\tilde{\varphi}_1(I) = \tilde{x}_0$ по тем же соображениям ($\tilde{\varphi}_1$ есть непрерывное отображение из I в $p^{-1}(x_0)$). Таким образом, $\tilde{\varphi}_t: I \rightarrow \tilde{X}$ есть гомотопия петли $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$ в постоянную петлю $\tilde{\varphi}_1$.

Докажем теперь второе утверждение. Петли с началом и концом в x_0 , поднимающиеся до петель с началом и концом в \tilde{x}_0 , очевидно, представляют элементы образа отображения $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Наоборот, петля, представляющая элемент образа отображения p_* , гомотопна петле, у которой есть такое поднятие, поэтому согласно свойству поднятия гомотопии и у неё самой должно быть такое поднятие. \square

Напомним, что *индексом* подгруппы $H \subset G$ называется мощность множества смежных классов Hg , $g \in G$. Если H — нормальная подгруппа, то индекс подгруппы H в G — это порядок факторгруппы G/H .

Предложение 7.5. *Число точек в прообразе $p^{-1}(x_0)$ при накрытии $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ равно индексу подгруппы $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в $\pi_1(X, x_0)$.*

Доказательство. Пусть $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Для петли φ в X с началом и концом в x_0 пусть $\tilde{\varphi}$ — её поднятие в \tilde{X} , начинающееся в точке \tilde{x}_0 . Определим отображение Φ из множества смежных классов $\{H[\varphi], [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)\}$ в $p^{-1}(x_0)$, переводящее $H[\varphi]$ в $\tilde{\varphi}(1)$. Отображение Φ определено корректно, поскольку произведение $\psi \cdot \varphi$, где $[\psi] \in H$, имеет поднятие $\tilde{\psi} \cdot \tilde{\varphi}$, заканчивающееся в той же точке, что и $\tilde{\varphi}$, так как $\tilde{\psi}$ — петля.

Из линейной связности пространства \tilde{X} следует, что Φ сюръективно, так как точку \tilde{x}_0 можно соединить с любой точкой в $p^{-1}(x_0)$ путём $\tilde{\varphi}$, проектирующимся в петлю φ с началом и концом в x_0 . Кроме того, Φ инъективно: из равенства $\Phi(H[\varphi]) = \Phi(H[\varphi'])$ следует, что $\varphi \cdot \varphi'$ поднимается до петли в \tilde{X} с началом и концом в \tilde{x}_0 , поэтому $[\varphi][\varphi']^{-1} \in H$, а значит, $H[\varphi] = H[\varphi']$. Итак, Φ — биекция. \square

7.4. Теорема о поднятии отображений. Выясним, как обстоит дело с поднятием произвольных отображений, а не только гомотопий.

Пространство X называется *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x найдётся линейно связная окрестность $V \subset U$.

Теорема 7.6 (о поднятии отображения). Пусть $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — накрытие и $f: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ — отображение из линейно связного пространства Z с отмеченной точкой z_0 .

- а) Существует не более одного такого отображения $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, что $p \circ \tilde{f} = f$ (поднятия).
- б) Если Z локально линейно связно, то для существования поднятия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$f_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Пусть \tilde{f} и \tilde{f}' — два поднятия. Если $z \in Z$ — произвольная точка и $\gamma: I \rightarrow Z$ — путь из z_0 в z , то пути $\tilde{f}\gamma$ и $\tilde{f}'\gamma$ накрывают путь $f\gamma$ и имеют общее начало, вследствие чего они совпадают. Поэтому $\tilde{f}(z) = (\tilde{f}\gamma)(1) = (\tilde{f}'\gamma)(1) = \tilde{f}'(z)$.

Теперь докажем утверждение б). Мы можем попытаться построить отображение \tilde{f} следующим образом. Пусть $z \in Z$. Возьмём путь $\gamma: I \rightarrow Z$ из z_0 в z и для пути $f\gamma: I \rightarrow X$ построим поднятие $\tilde{f}\gamma: I \rightarrow \tilde{X}$ с началом в точке \tilde{x}_0 . Затем положим $\tilde{f}(z) = \tilde{f}\gamma(1)$. Для того чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $\gamma': I \rightarrow Z$ из z_0 в z соответствующий путь $\tilde{f}\gamma'$ заканчивался в той же точке, что и $\tilde{f}\gamma$, т.е. чтобы петля $f \circ (\gamma\bar{\gamma}')$ накрывалась в \tilde{X} петлёй. Это равносильно условию, указанному в части б) теоремы.

Кроме того, необходимо проверить непрерывность отображения \tilde{f} . Пусть $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ — окрестность точки $\tilde{f}(z)$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, мы можем считать, что $p: \tilde{U} \rightarrow U$ — гомеоморфизм на некоторую окрестность U точки $f(z) \in X$. Выберем линейно связную окрестность V точки z , для которой $f(V) \subset U$. В качестве путей из z_0 в разные точки $z' \in V$ можно взять фиксированный путь γ из z_0 в z , который продолжается разными путями η в V из точки z в z' . Тогда пути $(f\gamma) \cdot (f\eta)$ в X имеют поднятия $(\tilde{f}\gamma) \cdot (\tilde{f}\eta)$, где $\tilde{f}\eta = p^{-1}(f\eta)$ и $p^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}$ — отображение, обратное к $p: \tilde{U} \rightarrow U$. Таким образом, $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$, поэтому отображение \tilde{f} непрерывно в точке z . \square

7.5. Универсальное накрытие. Так как отображение $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, возникает вопрос, любая ли подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$ реализуется в виде $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ для некоторого накрытия $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$. Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен. Вначале рассмотрим вопрос о реализуемости тривиальной подгруппы $\{1\}$. Так как p_* — мономорфизм, это сводится в вопросу о существовании односвязного накрывающего пространства для X .

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует такая меньшая окрестность $U \subset V$, что индуцированное включением отображение $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ тривиально. Открытые множества U с этим свойством образуют базу топологии полулокально односвязного пространства X .

Теорема 7.7. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ с односвязным пространством \tilde{X} .

Доказательство. Пусть $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — накрытие с односвязным \tilde{X} . Тогда любую точку $\tilde{x} \in \tilde{X}$ можно соединить путём с \tilde{x}_0 и этот путь единствен с точностью до гомотопии, сохраняющей концы путей. Поэтому \tilde{X} можно отождествить с множеством гомотопических классов путей в \tilde{X} с фиксированным началом \tilde{x}_0 . С другой стороны, такие гомотопические классы — это в точности гомотопические классы путей в X с фиксированным началом x_0 в силу единственности поднятия путей. Мы приходим к следующему определению:

$$\tilde{X} = \{[\gamma]: \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\},$$

где, как обычно, $[\gamma]$ обозначает гомотопический класс пути γ относительно гомотопий, которые оставляют начало и конец пути неподвижными. Мы имеем отображение

$$p: \tilde{X} \rightarrow X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Так как X линейно связно, конец $\gamma(1)$ может быть любой точкой в X , поэтому отображение p сюръективно. Ниже мы введём топологию на \tilde{X} и докажем, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие, а \tilde{X} односвязно.

Пусть \mathcal{U} — набор всех таких линейно связных открытых подмножеств $U \subset X$, что отображение $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ тривиально. Так как X локально линейно связно и полулокально односвязно, \mathcal{U} — база топологии на X (т.е. любое открытое множество из X представляется в виде объединения множеств из \mathcal{U}).

Пусть даны $U \subset \mathcal{U}$ и путь γ в X из точки x_0 в некоторую точку в U . Положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]: \eta \text{ — путь в } U, \text{ для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Отображение $p: U_{[\gamma]} \rightarrow U$ сюръективно, так как U линейно связно, и инъективно, так как все пути η из $\gamma(1)$ в $x \in U$ гомотопны в X , поскольку отображение $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ тривиально. Имеется следующее свойство:

(*) $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$, если $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$. Действительно, если $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, то элементы множества $U_{[\gamma']}$ имеют вид $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma]}$. Аналогично элементы множества $U_{[\gamma]}$ имеют вид $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \bar{\eta} \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \bar{\eta} \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma']}$.

Мы зададим топологию на \tilde{X} , взяв в качестве базы набор множеств $U_{[\gamma]}$. Чтобы проверить, что этот набор можно взять в качестве базы, нужно доказать, что в любом пересечении $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ содержится множество такого вида. Пусть $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ и $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Пусть $W \in \mathcal{U}$ содержится в $U \cap V$ и содержит $\gamma''(1)$. Тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$.

Взаимно однозначное отображение $p: U_{[\gamma]} \rightarrow U$ является гомеоморфизмом, так как оно задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ и множествами $V \in \mathcal{U}$, содержащимися в U . Следовательно, отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ непрерывно. Оно является накрытием, так как для фиксированного $U \in \mathcal{U}$ множества $U_{[\gamma]}$ для разных $[\gamma]$ задают разбиение $p^{-1}(U)$ на непересекающиеся множества, потому что если $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, то $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ по свойству (*).

Остаётся показать, что \tilde{X} односвязно. Для данной точки $[\gamma] \in \tilde{X}$ пусть γ_t — путь в X , который совпадает с γ на $[0, t]$ и остаётся в одной и той же точке $\gamma(t)$ на $[t, 1]$. Тогда отображение $t \mapsto [\gamma_t]$ есть путь в \tilde{X} , который является поднятием пути γ , начинается в $[x_0]$ (гомотопическом классе постоянного пути в x_0) и заканчивается в $[\gamma]$. Так как $[\gamma] \in \tilde{X}$ — произвольная точка, это показывает, что \tilde{X} линейно связно. Чтобы

проверить, что $\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$, достаточно показать, что $p_*\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$. Элементы в образе гомоморфизма p_* представлены петлями γ в (X, x_0) , которые поднимаются до петель в $(\tilde{X}, [x_0])$. Мы уже отметили, что путь $t \mapsto [\gamma_t]$ является поднятием пути γ и начинается в $[x_0]$. То, что этот путь является петлёй, означает, что $[\gamma] = [x_0]$. Следовательно, петля γ стягиваема и образ гомоморфизма p_* тривиален. \square

Предложение 7.8. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с односвязным \tilde{X} . Тогда для любого другого накрытия $q: Y \rightarrow X$ существует такое накрытие $r: \tilde{X} \rightarrow Y$, что $q \circ r = p$.

Доказательство. Это следует из теоремы 7.6 (о поднятии отображения). \square

Благодаря этому свойству накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ с односвязным \tilde{X} называется *универсальным* накрытием над X . Из доказанной ниже теоремы 7.11 следует, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Пример 7.9. Накрытие $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, из примера 7.1.1 универсально, так как \mathbb{R} односвязно. Рассмотрим k -листное накрытие $q_k: S^1 \rightarrow S^1$ из примера 7.1.2. Тогда поднятие $r_k: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ имеет вид $t \mapsto (\cos \frac{2\pi t}{k}, \sin \frac{2\pi t}{k})$, $q_k \circ r_k = p$.

Пример 7.10. Отображение $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ из примера 4.4.3 является универсальным накрытием при $n \geq 2$. Так как это накрытие двулистно, из предложения 7.5 следует, что тривиальная подгруппа имеет индекс 2 в $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$.

7.6. Классификация накрытий. *Изоморфизмом* накрытий $p_1: Y_1 \rightarrow X$ и $p_2: Y_2 \rightarrow X$ называется такой гомеоморфизм $f: Y_1 \rightarrow Y_2$, что $p_1 = p_2 f$. Аналогично определяется изоморфизм $f: (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ накрытий $p_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0)$ и $p_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x_0)$ над пространством с отмеченной точкой.

Теорема 7.11. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных накрытий $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ (с сохранением отмеченной точки) и множеством подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$. При этом соответствии накрытие p переходит в подгруппу $p_*\pi_1(Y, y_0)$.

Доказательство. Сначала покажем, что соответствие сюръективно, т.е. для любой подгруппы $H \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, что $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Зададим следующее отношение эквивалентности на односвязном (универсальном) накрывающем пространстве \tilde{X} , введённом в теореме 7.7:

$$[\gamma] \sim [\gamma'], \text{ если } \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ и } [\gamma][\gamma']^{-1} \in H.$$

Положим $Y = \tilde{X}/\sim$. Заметим, что если $\gamma(1) = \gamma'(1)$, то $[\gamma] \sim [\gamma']$ тогда и только тогда, когда $[\gamma\eta] \sim [\gamma'\eta]$. Это означает, что если какие-либо две точки в базовых открытых множествах $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ отождествляются в Y , то эти открытые множества отождествляются целиком. Следовательно, проекция $p: \tilde{X}/\sim = Y \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, является накрытием.

Возьмём в качестве отмеченной точки $y_0 \in Y$ класс эквивалентности $[x_0]$ постоянного пути в точке x_0 . Тогда $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Действительно, для петли γ в (X, x_0) её поднятие в \tilde{X} , начинающееся в $[x_0]$, заканчивается в $[\gamma]$, поэтому образ этого поднятого пути в $Y = \tilde{X}/\sim$ будет петлёй тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, а это эквивалентно тому, что $[\gamma] \in H$.

Теперь покажем, что соответствие инъективно, т. е. накрытия $p_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0)$ и $p_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x_0)$, для которых $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$, изоморфны. Действительно, по теореме о поднятии отображения мы можем поднять p_1 до отображения $\tilde{p}_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$, для которого $p_2\tilde{p}_1 = p_1$. Аналогично получаем отображение $\tilde{p}_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (Y_1, y_1)$, для которого $p_1\tilde{p}_2 = p_2$. Отсюда следует, что $p_2\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = p_2$. Тогда согласно единственности поднятия мы имеем $\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = \text{id}$. Аналогично $\tilde{p}_2\tilde{p}_1 = \text{id}$. Таким образом, \tilde{p}_1 и \tilde{p}_2 — обратные изоморфизмы. \square

7.7. Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера. В качестве приложения теории накрытий мы докажем важную алгебраическую теорему о том, что подгруппа свободной группы свободна. Доказательство будет использовать ряд фактов из теории графов, которые мы легко докажем, используя результаты о клеточных пространствах.

Графом называется одномерное клеточное пространство X . Нульмерные клетки называются *вершинами* графа X , а одномерные клетки — его *рёбрами*. *Подграф* графа X — это клеточное подпространство $Y \subset X$ (замкнутое подмножество, которое является объединением вершин и рёбер). *Дерево* — это стягиваемый граф. Подграф-дерево в X называют *максимальным*, если оно содержит все вершины графа X .

Предложение 7.12. *Любой связный граф X содержит максимальное дерево, и любое дерево в графе содержится в некотором максимальном дереве.*

Доказательство. Мы опишем конструкцию, которая для каждого подграфа $X_0 \subset X$ даёт подграф $Y \subset X$, содержащий все вершины графа X , и деформационную ретракцию $Y \xrightarrow{\sim} X_0$. В частности, взяв в качестве X_0 одну вершину или любое поддерево, мы получим требуемое утверждение.

Вначале построим последовательность подграфов $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$, где X_{i+1} получается из X_i добавлением замыканий \bar{e}_α всех рёбер $e_\alpha \subset X \setminus X_i$, имеющих по крайней мере один конец в X_i . Объединение $\bigcup_i X_i$ открыто в X , так как каждая точка из X_i имеет окрестность, содержащуюся в X_{i+1} . Более того, множество $\bigcup_i X_i$ замкнуто по аксиоме (W) клеточного пространства, как объединение замыканий клеток. Поэтому $X = \bigcup_i X_i$, так как граф X связан.

Теперь, чтобы построить Y , положим вначале $Y_0 = X_0$. Предположим по индукции, что уже построен граф $Y_i \subset X_i$, содержащий все вершины графа X_i . Рассмотрим граф Y_{i+1} , который получается из Y_i путём добавления для каждой вершины из $X_{i+1} \setminus X_i$ одного ребра, соединяющего эту вершину с Y_i . Очевидно, что имеется деформационная ретракция $Y_{i+1} \xrightarrow{\sim} Y_i$. Теперь положим $Y = \bigcup_i Y_i$. Тогда можно получить деформационную ретракцию графа Y на $Y_0 = X_0$, деформационно ретрагируя Y_{i+1} на Y_i в течение времени из промежутка $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$. Тогда точка $x \in Y_{i+1} \setminus Y_i$ остаётся неподвижной до этого промежутка, во время которого она перемещается в Y_i , а после этого продолжает перемещаться, пока не достигнет Y_0 . Полученная гомотопия $h_t: Y \rightarrow Y$ непрерывна, так как она непрерывна на замыкании каждого ребра. \square

Предложение 7.13. *Пусть X — связный граф с максимальным деревом T . Тогда $\pi_1(X)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют ребрам из $X \setminus T$.*

Доказательство. Проекция $X \rightarrow X/T$ является гомотопической эквивалентностью согласно следствию 4.8. Факторпространство X/T является графом с одной вершиной, а потому является букетом окружностей. Поэтому $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют рёбрам, не попавшим в T . \square

Следствие 7.14. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда он односвязен.*

Лемма 7.15. *Любое накрывающее пространство графа X также является графом.*

Доказательство. Пусть $p: Y \rightarrow X$ — накрытие. В качестве вершин графа Y мы берём дискретное множество $Y^0 = p^{-1}(X^0)$. В качестве рёбёр графа Y мы берём всевозможные поднятия характеристических отображений $I_\alpha \rightarrow X$ одномерных клеток e_α пространства X (т.е. рёбёр графа X). Такие поднятия начинаются и заканчиваются в точках из Y^0 , причём для каждой точки из $p^{-1}(x)$, где $x \in e_\alpha$, существует единственное поднятие, проходящее через эту точку. Это задаёт структуру графа на Y . Получающаяся при этом топология на Y та же самая, что и исходная топология, так как обе топологии имеют одни и те же базовые открытые множества, поскольку проекция $p: Y \rightarrow X$ является локальным гомеоморфизмом. \square

Теорема 7.16 (Нильсен–Шрайер). *Любая подгруппа свободной группы F свободна.*

Доказательство. Пусть X — граф, для которого $\pi_1(X) = F$, например букет окружностей. Для каждой подгруппы $G \subset F$ согласно теореме 7.11 существует накрытие $p: Y \rightarrow X$, для которого $p_*\pi_1(Y) = G$, т.е. $\pi_1(Y) \cong G$, так как p_* инъективно. По предыдущей лемме Y — граф, поэтому группа $G \cong \pi_1(Y)$ свободна согласно предложению 7.13. \square

В отличие от ситуации со свободными абелевыми группами, подгруппа $G \subset F$ свободной группы F может иметь больший ранг, чем группа F . Примеры приведены в задачах ниже.

Задачи и упражнения.

7.17. Постройте накрытие букета двух окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geq 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geq 2$.

7.18. Докажите, что для накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$. Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия* p .

7.19. Накрытие $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ называется *регулярным*, если подгруппа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ является нормальной в $\pi_1(X, x_0)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в \tilde{X} .

7.20. Докажите, что если $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует такое свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ на пространстве \tilde{X} , что $X = \tilde{X}/G$ (т.е. орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). (Определение действия группы и пространства орбит см. в примере 1.10. Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ имеем $gx \neq x$.)

7.21. Действие группы G на пространстве Y называется *дискретным*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U , что множества gU , $g \in G$, попарно не пересекаются. Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p: Y \rightarrow X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.

7.22. Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

7.23. Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства X необходимо для существования односвязного накрывающего пространства \tilde{X} .

7.24. Постройте пример не полулокально односвязного пространства.

7.25. Пространство X называется *локально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует такая меньшая окрестность $U \subset V$, что $\pi_1(U, x) = 0$. Постройте пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

7.26. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^2$.

7.27. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$.

7.28. Докажите следующую версию теоремы 7.11, в которой не учитываются отмеченные точки: имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных накрытий $p: Y \rightarrow X$ и классами сопряжённости подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

7.29. Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.

7.30. Пусть $G \subset F_2$ — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими a и b), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы G . Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

7.31. Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

8. РАССЛОЕНИЯ

Накрытие локально устроено как произведение на дискретное множество Γ . Обобщение понятия накрытия, при котором дискретное множество заменяется на произвольное топологическое пространство F , приводит к понятию расслоения.

8.1. Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии. Локально тривиальным расслоением называется четвёрка (E, B, F, p) , где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \rightarrow B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

Пространство E называется *тотальным пространством*, B — *базой*, а F — *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p: E \rightarrow B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой x* ; очевидно, этот слой гомеоморфен F .

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в приведённой выше диаграмме можно положить $U = B$; это, в частности, означает, что $E \cong B \times F$.

Пример 8.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F .

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 : z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 : z_1 \neq 0\}$.

Как и накрытия, локально тривиальные расслоения обладают свойством поднятия гомотопии (см. теорему 7.3). Однако, во-первых, накрывающая гомотопия, вообще говоря, не единственна, а во-вторых, необходимо наложить некоторые дополнительные условия на отображаемое пространство Z или на базу расслоения B . Мы докажем следующую теорему.

Теорема 8.2. *Локально тривиальное расслоение $p: E \rightarrow B$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z :*

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \tilde{G} \nearrow & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B. \end{array}$$

Доказательство. Вначале мы сведём свойство поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z к случаю $Z = D^k$.

Свойство поднятия гомотопии является частным случаем более общего свойства поднятия для пары (X, A) , которое описывается следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \tilde{g} \nearrow & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B, \end{array}$$

где $i: A \hookrightarrow X$ — вложение. Тогда свойство поднятия гомотопии — это свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z)$. Для проведения индукции по клеткам нам понадобится относительная версия свойства поднятия гомотопии, когда требуется поднять гомотопию $G: Z \times I \rightarrow B$ до гомотопии $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E$, начинающейся с данного отображения

$f: Z \rightarrow E$ и продолжающей поднятие $\tilde{G}: A \times I \rightarrow E$, уже заданное на подпространстве $A \subset Z$. Это не что иное, как свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z \times 0 \cup A \times I)$:

$$\begin{array}{ccc} Z \times 0 \cup A \times I & \xrightarrow{\tilde{G}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B. \end{array}$$

Теперь будем вести индукцию по клеткам пространства Z . Предположим, что поднятие гомотопии $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E$ уже задано на Z , а мы хотим продолжить его на пространство $Z' = Z \cup e^k$, получаемое из Z приклеиванием одной клетки e^k при помощи отображения $\partial D^k \rightarrow Z$. Так как характеристическое отображение $D^k \rightarrow Z \cup e^k$ этой клетки является гомеоморфизмом на внутренности шара, свойство поднятия для пары $(Z' \times I, Z' \times 0 \cup Z \times I)$ эквивалентно свойству поднятия для пары $(D^k \times I, D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I)$:

$$\begin{array}{ccc} D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I & \longrightarrow & (Z \cup e^k) \times 0 \cup Z \times I \xrightarrow{\tilde{G}} E \\ \downarrow i & & \downarrow i \quad \nearrow \tilde{G} \quad \downarrow p \\ D^k \times I & \longrightarrow & (Z \cup e^k) \times I \xrightarrow{G} B. \end{array}$$

Вместо шара D^k нам будет удобнее рассматривать куб I^k ; соответствующее свойство поднятия выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{G} & B. \end{array}$$

Выберем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства B вместе с локальными тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$. Так как $I^k \times I$ компактно, мы можем разбить I^k на меньшие кубы C , а I — на отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ так, чтобы отображение G переводило каждое произведение $C \times I_j$ в одно множество U_α . Применяя индукцию по k , мы можем предположить, что гомотопия $\tilde{G} = \tilde{g}_t$ уже построена на ∂C для каждого из малых кубов C . Чтобы продолжить эту гомотопию \tilde{g}_t на куб C , мы можем строить \tilde{g}_t последовательно на каждом отрезке I_j . Этот аргумент позволяет нам свести всё к случаю, когда отображение G переводит весь куб $I^k \times I$ в одно множество U_α . Тогда нам уже дано поднятие $\tilde{G}: I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, которое необходимо продолжить до поднятия $\tilde{G}: I^k \times I \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$. Взяв композицию с локальной тривиализацией $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$, мы сводим всё к случаю тривиального расслоения:

$$\begin{array}{ccc} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I & \xrightarrow{f} & U_\alpha \times F \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{G} & U_\alpha. \end{array}$$

Требуемое поднятие $\tilde{G}: I^k \times I \rightarrow U_\alpha \times F$ задаётся парой отображений $I^k \times I \rightarrow U_\alpha$ и $I^k \times I \rightarrow F$. Первое из этих отображений определим как данное нам отображение G ,

а второе — как композицию

$$I^k \times I \longrightarrow I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \xrightarrow{f} U_\alpha \times F \longrightarrow F,$$

где первое отображение — ретракция, а последнее — проекция. \square

8.2. Расслоения в смысле Гуревича и Серра. Отображение $p: E \rightarrow B$ называется *расслоением в смысле Гуревича*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому пространству Z .

Отображение $p: E \rightarrow B$ называется *расслоением в смысле Серра*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому клеточному пространству Z .

Согласно теореме 8.2 локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра. (Имеет место более общая теорема Гуревича–Хюбша, согласно которой локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Гуревича, если база B паракомпактна.) Вот важный пример расслоения в смысле Гуревича, которое, вообще говоря, не является локально тривиальным.

Пример 8.3 (расслоение путей). Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0 . Напомним, что пространством путей на X называется подпространство $PX \subset \mathcal{C}(I, X)$, состоящее из путей $\gamma: I \rightarrow X$, для которых $\gamma(0) = x_0$. Рассмотрим отображение

$$p: PX \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

Тогда p является расслоением в смысле Гуревича. В самом деле, пусть даны отображения $f: Z \rightarrow PX$ и $G: Z \times I \rightarrow X$, см. (5). Тогда накрывающая гомотопия $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow PX$ может быть задана следующей формулой «продолжения путей»:

$$\tilde{G}(z, t)(s) = \begin{cases} (f(z))(s(1+t)) & \text{при } s(1+t) \leq 1, \\ G(z, s(1+t) - 1) & \text{при } s(1+t) \geq 1 \end{cases}$$

(сначала проходим путь $f(z)$ от отмеченной точки до точки $f(z)(1) = G(z, 0)$, а затем путь $G(z, I)$). Расслоение $p: PX \rightarrow X$ называется *расслоением путей* для X . Его слой $p^{-1}(x_0)$ над отмеченной точкой $x_0 \in X$ является пространство петель ΩX . Слой $p^{-1}(x_1)$ над любой другой точкой представляет собой пространство путей из x_0 в x_1 ; легко видеть, что это пространство гомотопически эквивалентно пространству петель ΩX .

Согласно одной из задач в конце этого параграфа, все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

8.3. Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации. До конца этого параграфа под расслоением мы будем понимать расслоение в смысле Гуревича, т. е. отображение $p: E \rightarrow B$, удовлетворяющее свойству поднятия гомотопии (5) для любого Z .

Двойственное понятие *корасслоения* определяется как отображение $i: A \rightarrow X$, удовлетворяющее свойству продолжения гомотопии. Мы определяли последнее для пар (X, A) в §4. В более общей ситуации говорят, что отображение $i: A \rightarrow X$ обладает *свойством продолжения гомотопии* по отношению к пространству Z , если для любого отображения $f: X \rightarrow Z$ и такой гомотопии $F: A \times I \rightarrow Z$, что $f \circ i = F_0$,

существует гомотопия $\widehat{F}: X \times I \rightarrow Z$, для которой $\widehat{F}_0 = f$ и $\widehat{F} \circ (i \times \text{id}) = F$. Это описывается коммутативной диаграммой

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F'} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow \widehat{F}' & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Z, \end{array}$$

где $Z^I = \mathcal{C}(I, Z)$, F' — сопряжённое отображение к F (происходящее из экспоненциального закона $\mathcal{C}(A \times I, Z) \cong \mathcal{C}(A, Z^I)$, т.е. $F'(a) = \gamma$, где $\gamma(t) = F(a, t) \in Z$), отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$, а \widehat{F}' — сопряжённое отображение к \widehat{F} .

Пример 8.4.

1. Вложение $i: A \rightarrow X$ клеточного подпространства A клеточного пространства X является корасслоением согласно теореме 4.7.

2. Вложение верхнего основания цилиндра

$$i: X \rightarrow X \times I, \quad x \mapsto (x, 1),$$

является корасслоением. Этот пример двойствен к расслоению путей (пример 8.3).

3. Отображение $X \rightarrow pt$ в точку всегда является расслоением: в качестве покрывающей гомотопии $\widetilde{G}: Z \times I \rightarrow X$ можно взять постоянную гомотопию $\widetilde{G}(z, t) = f(z)$. Однако «двойственное» отображение вложения точки $pt \rightarrow X$ является корасслоением только для достаточно хороших пространств (например, клеточных).

Предложение 8.5.

а) Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение, $f: B' \rightarrow B$ — отображение и

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

— декартов квадрат, т.е. $E' = \{(e, b') \in E \times B' : p(e) = f(b')\}$. Тогда $p': E' \rightarrow B'$ тоже расслоение.

б) Пусть $i: A \rightarrow X$ — корасслоение, $g: A \rightarrow A'$ — отображение и

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$

— кодекартов квадрат (т.е. $X' = X \sqcup A' / \sim$, где $x \sim a'$, если $x = i(a)$ и $a' = g(a)$ для некоторого $a \in A$). Тогда $i': A' \rightarrow X'$ тоже корасслоение.

Доказательство. Докажем а). Рассмотрим свойство поднятия гомотопии для p' :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \widetilde{G} & \downarrow p' & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Так как $p: E \rightarrow B$ — расслоение, существует поднятие $Z \times I \rightarrow E$, которое вместе с универсальным свойством декартова квадрата (см. диаграмму (1)) даёт требуемое поднятие $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E'$.

Утверждение б) доказывается аналогично, используя универсальное свойство ко-декартова квадрата (см. диаграмму (2)). \square

Расслоение $p': E' \rightarrow B'$ называется *индуцированным* расслоением p при помощи отображения $f: B' \rightarrow B$.

Следующая теорема о факторизации показывает, что любое отображение можно разложить в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения, а также в композицию корасслоения и гомотопической эквивалентности.

Теорема 8.6 (о факторизации отображения).

- а) Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ существуют такие гомотопическая эквивалентность $h: X \rightarrow \tilde{X}$ и расслоение $p: \tilde{X} \rightarrow Y$, что $f = p \circ h$.
- б) Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ существуют такие корасслоение $i: X \rightarrow \hat{Y}$ и гомотопическая эквивалентность $h: \hat{Y} \rightarrow Y$, что $f = h \circ i$.

Доказательство. Докажем а). Пусть \tilde{X} — множество пар (x, γ) , состоящих из точки $x \in X$ и пути $\gamma: I \rightarrow Y$ с $\gamma(0) = f(x)$. Это описывается декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

где Y^I — пространство всех путей $\gamma: I \rightarrow Y$, а отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$.

Тогда гомотопическая эквивалентность $h: X \rightarrow \tilde{X}$ задаётся формулой $h(x) = (x, c_{f(x)})$, где $c_{f(x)}: I \rightarrow Y$ — постоянный путь $t \mapsto f(x)$, и мы имеем расслоение $p: \tilde{X} \rightarrow Y$, $p(x, \gamma) = \gamma(1)$ (свойство поднятия гомотопии проверяется так же, как и для расслоения путей в примере 8.3).

Докажем б). Пусть \hat{Y} — факторпространство пространства $(X \times I) \sqcup Y$, получаемое при отождествлении $(x, 0) \in X \times I$ с $f(x) \in Y$. Это описывается кодекартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & \hat{Y}, \end{array}$$

где отображение i_0 переводит x в $(x, 0)$.

Гомотопическая эквивалентность $h: \hat{Y} \rightarrow Y$ задаётся формулами $h(x, t) = f(x)$ и $h(y) = y$, и мы имеем корасслоение $i: X \rightarrow \hat{Y}$, $i(x) = (x, 1)$ (сравните с примером 8.4.2). \square

Пространство $\hat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$, построенное в доказательстве утверждения б) выше, называется *цилиндром отображения f* .

Задачи и упражнения.

8.7. Это обобщение примера 8.1.3. Положим $E = S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^n$, $p(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$. Докажите, что $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — локально тривиальное расслоение со слоем $F = S^1$. Оно также называется *расслоением Хопфа*.

8.8. Докажите, что расслоение $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ из предыдущего упражнения (в частности, расслоение Хопфа) нетривиально.

8.9. Докажите, что локально тривиальное расслоение над кубом I^k тривиально.

8.10. Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича над линейно связным пространством гомотопически эквивалентны.

8.11. Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра $i: X \rightarrow X \times I$, $x \mapsto (x, 1)$, является корасслоением.

8.12. Докажите, что если X — клеточное пространство и $x \in X$, то вложение $i: x \rightarrow X$ является корасслоением.

8.13. Приведите пример пространства с отмеченной точкой (X, x_0) , для которого вложение $i: x_0 \rightarrow X$ не является корасслоением.

8.14. Докажите, что разложение из теоремы 8.6 а) естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & f' \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X' & & \\ f \downarrow & \searrow h & \downarrow f' & \searrow h' & \\ & \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}' & \\ & \swarrow p & \downarrow & \swarrow p' & \\ Y & \longrightarrow & Y' & & \end{array}$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для разложения из теоремы 8.6 б).

8.15. Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ из теоремы 8.6 а), называется *гомотопическим слоем* отображения $f: X \rightarrow Y$ и обозначается $\text{hofib } f$. Докажите, используя естественность конструкции \tilde{X} (см. предыдущую задачу), что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения $f = p' \circ h'$ в композицию гомотопической эквивалентности h' и расслоения p' пространство $\text{hofib } f$ гомотопически эквивалентно слою расслоения p' .

8.16. Докажите, что гомотопический слой отображения $f: X \rightarrow Y$ есть пространство F , входящее в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & PY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

где $PY \rightarrow Y$ — расслоение путей.

8.17. Факторпространство $G = \widehat{Y}/i(X) = \widehat{Y}/(X \times 1)$ пространства $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ из теоремы 8.6 б) (цилиндра отображения) по его верхнему основанию называется *конусом отображения* $f: X \rightarrow Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения f , называется его *гомотопическим кослом*. Таким образом, мы имеем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & G, \end{array}$$

где $X \rightarrow CX$ — вложение X в основание конуса. Проверьте корректность определения гомотопического косла по аналогии с задачей 8.15.

8.18. Найдите гомотопический слой вложения точки $pt \rightarrow X$.

8.19. Найдите гомотопический кослой проекции в точку $X \rightarrow pt$.

8.20. Найдите гомотопический слой вложения букета $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$.

8.21. Найдите гомотопический слой вложения букета $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

8.22. Докажите, что гомотопическая эквивалентность $h: X \rightarrow \widetilde{X}$ из теоремы 8.6 а) является корасслоением, а гомотопическая эквивалентность $h: \widehat{Y} \rightarrow Y$ из теоремы 8.6 б) — расслоением в смысле Серра.

9. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

9.1. Определение. Коммутативность. Для пространства X с отмеченной точкой x_0 определим $\pi_n(X, x_0)$ как множество гомотопических классов отображений $f: S^n \rightarrow X$, переводящих отмеченную точку s_0 сферы S^n в x_0 . Сами эти отображения называются *сфероидами*. По-другому сфероид можно представить как отображение пар $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, переводящее границу куба ∂I^n в x_0 .

При $n \geq 1$ сумма двух сфероидов $f, g: S^n \rightarrow X$ определяется как композиция

$$f + g: S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X,$$

где отображение c стягивает экватор S^{n-1} в сфере S^n в точку, и мы выбираем отмеченную точку s_0 на S^n так, чтобы она принадлежала этому экватору. На кубическом языке операция суммы выглядит следующим образом: если $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ и (t_1, \dots, t_n) — координаты в кубе I^n , то сумма $f + g$ определяется как отображение $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, заданное формулой

$$(7) \quad (f + g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{при } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Так как в операции суммы участвует только первая координата, те же самые рассуждения, что и для π_1 (см. предложение 5.1), показывают, что сумма определена корректно на гомотопических классах сфероидов и $\pi_n(X, x_0)$ — группа, причём единичный элемент — постоянное отображение $I^n \rightarrow x_0$, а обратный элемент задаётся формулой $-f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Группа $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, называется *n-й гомотопической группой* пространства X . Ясно, что $\pi_1(X, x_0)$ — это фундаментальная группа, а $\pi_0(X, x_0)$ — просто множество компонент линейной связности пространства X (на нём, вообще говоря, нет естественной групповой операции).

Предложение 9.1. *Гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ коммутативна при $n \geq 2$.*

Доказательство. Мы имеем $f + g \simeq g + f$ посредством гомотопии, изображённой на рис. 3. Сначала гомотопия сжимает области определения отображений f и g в

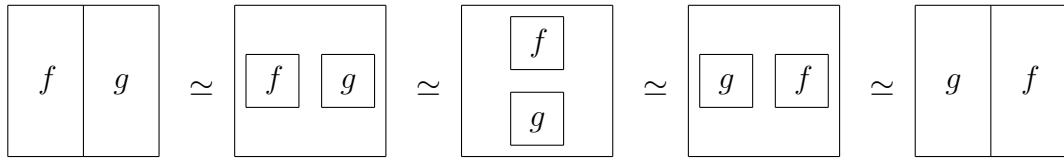


Рис. 3.

меньшие кубы в I^n , а область вне этих кубов отображается в отмеченную точку x_0 . В результате появляется свободное пространство, в котором можно двигать эти два куба как угодно, лишь бы они не пересекались. При $n \geq 2$ их можно переставить местами. Затем области определения отображений f и g можно снова увеличить до их исходного размера. Всю эту процедуру можно проделать, используя лишь координаты t_1 и t_2 и оставляя другие координаты без изменений. \square

Если пространство X линейно связно, то для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ группы $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ изоморфны: изоморфизм задаётся выбором пути из x_0 в x_1 (упражнение). Этот изоморфизм, вообще говоря, зависит от пути, вернее, от его гомотопического класса. Таким образом, если X односвязно (т.е. $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$), то все группы $\pi_n(X, x_0)$ с различными x_0 канонически изоморфны.

Предложение 9.2. *Отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм групп $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. Если отображения $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для фундаментальной группы (предложение 5.2). \square

Следствие 9.3. *Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом.*

Предложение 9.4. *Для любых пространств (X, x_0) и (Y, y_0) имеем*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

Доказательство. Отображение $Z \rightarrow X \times Y$ — это то же самое, что пара отображений $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y$. Взяв в качестве Z пространства S^n и $S^n \times I$, получим требуемое. \square

Предложение 9.5. $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации аналогично доказательству предложения 5.6. \square

9.2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары. Пусть (X, A) — пара пространств с отмеченной точкой $x_0 \in A$. Определим $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 1$, как множество гомотопических классов отображений пар $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$, переводящих отмеченную точку $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ в x_0 . Эти отображения называются *относительными сфероидами*. На кубическом языке относительный сфероид — это отображение $f: I^n \rightarrow X$, переводящее ∂I^n в A и переводящее $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0 , где грань I^{n-1} задаётся уравнением $t_n = 0$. Стягивание подпространства $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в точку преобразует тройку $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1})$ в (D^n, S^{n-1}, s_0) , поэтому отображение $(D^n, S^{n-1}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ — это то же самое, что отображение $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$.

Операция суммы определяется в $\pi_n(X, A, x_0)$ той же формулой (7), что и для $\pi_n(X, x_0)$, за исключением того, что координата t_n играет теперь особую роль и её больше нельзя использовать для операции суммы. Таким образом, $\pi_n(X, A, x_0)$ — группа при $n \geq 2$, и эта группа коммутативна при $n \geq 3$. Группа $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 2$, называется *относительной гомотопической группой* пары (X, A) .

При $n = 1$ мы получаем $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ и $\partial I^1 \setminus I^0 = \{1\}$. Следовательно, $\pi_1(X, A, x_0)$ — это множество гомотопических классов путей в X из переменной точки в A в фиксированную точку $x_0 \in A$. Вообще говоря, это множество нельзя превратить в группу естественным способом.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \dots$$

называется *точной*, если $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i+1}$ для любого i .

Для пары пространств (X, A) и $n \geq 1$ определены отображения

$$i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad j_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad \partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0),$$

где i_* — отображение, индуцированное вложением $A \hookrightarrow X$, отображение j_* переводит гомотопический класс сфероидов $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ в гомотопический класс относительного сфероидов $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, а отображение ∂ переводит гомотопический класс относительного сфероидов $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ в гомотопический класс сфероидов $f|_{S^{n-1}}: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (A, x_0)$. Говоря на кубическом языке, отображение ∂ переводит $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ в $f|_{I^{n-1}}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$. Отображение i_* является гомоморфизмом при $n \geq 1$, а j_* и ∂ являются гомоморфизмами при $n \geq 2$.

Теорема 9.6 (гомотопическая последовательность пары). *Последовательность*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

точна для любой пары пространств (X, A) .

Замечание. Множество $\pi_1(X, A, x_0)$ не является группой, и точность в этом члене означает, что для любого элемента $[f] \in \pi_1(X, A, x_0)$, где $f: (D^1, S^0, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$,

Проверим, что $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$. Пусть $[g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ лежит в $\text{Ker } i_*$, т.е. задана гомотопия $g_t: I^{n-1} \rightarrow X$ в X между $g_0 = g: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ и отображением в точку $g_1: I^{n-1} \rightarrow x_0$. Тогда эта гомотопия задаёт отображение $f: I^{n-1} \times I \rightarrow X$, $f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = g_{t_n}(t_1, \dots, t_{n-1})$, представляющее собой относительный сфероид $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, сужение которого на I^{n-1} есть g . Иначе говоря, $\partial[f] = [f|_{I^{n-1}}] = [g]$, т.е. $[g] \in \text{Im } \partial$. \square

9.3. Гомотопическая последовательность расслоения. Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение в смысле Серра, $b_0 \in B$ и $e_0 \in E$ — отмеченные точки, $p(e_0) = b_0$ и $F = p^{-1}(b_0)$ — слой над b_0 . Имеем отображение пар

$$p: (E, F) \rightarrow (B, b_0).$$

Лемма 9.7. *Отображение $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ является изоморфизмом при $n \geq 1$.*

Доказательство. Докажем, что p_* — мономорфизм. Пусть $p_*[\tilde{f}] = 0$ для некоторого элемента $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$, представленного относительным сфероидом $\tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$. Так как $p_*[\tilde{f}] = 0$, сфероид $f = p \circ \tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ гомотопен нулю в B посредством гомотопии $F: D^n \times I \rightarrow B$ или $f_t: D^n \rightarrow B$, где $f_0 = f$ и $f_1: D^n \rightarrow b_0$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{F} & B. \end{array}$$

Это даёт нам гомотопию $\tilde{f}_t: D^n \rightarrow E$ между отображением $\tilde{f} = \tilde{f}_0: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$ и отображением \tilde{f}_1 , для которого $\tilde{f}_1(D^n) \subset F$ (так как $f_1(D^n) = b_0$). Таким образом, $[\tilde{f}] = [\tilde{f}_1] = 0$ в $\pi_n(E, F, e_0)$ и p_* — мономорфизм.

Теперь докажем, что $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ — эпиморфизм. Пусть элемент $[f]: \pi_n(B, b_0)$ представлен отображением $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \partial I^n \setminus I^{n-1} \xlongequal{\quad} I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I & \xrightarrow{c} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^n \xlongequal{\quad} I^{n-1} \times I & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

где c — постоянное отображение в точку $e_0 \in E$ (здесь мы используем то, что пары $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I)$ и $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1)$ гомеоморфны). Это даёт нам отображение $\tilde{f}: I^n \rightarrow E$, для которого $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$, так как $f(\partial I^n) = b_0$. Таким образом, мы получаем относительный сфероид $\tilde{f}: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (E, F, e_0)$, для которого $p_*[\tilde{f}] = [f]$, так как $p \circ \tilde{f} = f$. Итак, p_* — эпиморфизм. \square

Теорема 9.8 (гомотопическая последовательность расслоения). *Для расслоения в смысле Серра $p: E \rightarrow B$ над линейно связной базой B со слоем F имеет место*

точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0). \end{aligned}$$

Доказательство. Это вытекает из гомотопической последовательности пары (E, F) и предыдущей леммы. \square

Замечание. Из доказательства леммы 9.7 вытекает следующее описание граничного отображения $\partial: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ представлен сфероидом $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. Рассмотрим f как гомотопию $I^{n-1} \times I \rightarrow B$, состоящую из отображений $g_t: I^{n-1} \rightarrow B$, где g_0 и g_1 — постоянные отображения в точку b_0 . Поднимем эту гомотопию до гомотопии $\tilde{g}_t: I^{n-1} \rightarrow E$, начиная с постоянного отображения $\tilde{g}_0: I^{n-1} \rightarrow e_0$. Отображение \tilde{g}_1 уже не будет постоянным отображением, но будет переводить I^{n-1} в F . Тогда сфероид $\tilde{g}_1: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, e_0)$ представляет элемент $\partial[f] \in \pi_{n-1}(F, e_0)$.

Пример 9.9.

1. Рассмотрим гомотопическую последовательность накрытия $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ со слоем счётное дискретное множество Z :

$$\dots \rightarrow \pi_n(Z) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_{n-1}(Z) \rightarrow \dots$$

Так как $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ при всех n и $\pi_k(Z) = 0$ при $k > 0$, из точности последовательности вытекает, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$.

2. Рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательности расслоения Хопфа $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 (см. пример 8.1.3):

$$\pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3)$$

Так как $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$ и $\pi_1(S^3) = \pi_2(S^3) = 0$, мы получаем последовательность

$$0 \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Так как эта последовательность точна, мы получаем, что $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$. (На самом деле $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$, но пока мы этого доказать не можем.) Аналогично получаем $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ при $n \geq 3$.

9.4. Теорема Уайтхеда.

Теорема 9.10 (Уайтхед). *Отображение $f: X \rightarrow Y$ связных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда индуцированные отображения $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ являются изоморфизмами для всех n .*

Доказательство. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то согласно следствию 9.3 $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом для всех n . Предположим теперь, что $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом для всех n .

По теореме о клеточной аппроксимации мы можем считать отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточным. Далее применим теорему о факторизации отображения (теорему 8.6 б)) и разложим f в композицию $X \rightarrow \hat{Y} \rightarrow Y$, где $\hat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ — цилиндр отображения f , отображение $\hat{Y} \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью, а $X \rightarrow \hat{Y}$ — вложение клеточного подпространства.

Тем самым мы свели доказательство к случаю, когда f — включение клеточного подпространства $X \subset Y$. Так как f_* — изоморфизм для всех n , из гомотопической последовательности пары (Y, X) вытекает, что все относительные группы $\pi_n(Y, X)$ нулевые. Мы докажем, что тогда существует деформационная ретракция $Y \rightarrow X$. Другими словами, докажем, что тождественное отображение $\text{id}: Y \rightarrow Y$ гомотопно относительно X отображению в X .

Предположим по индукции, что мы уже построили гомотопию относительно X между отображением $\text{id}: Y \rightarrow Y$ и отображением $g: Y \rightarrow Y$, для которого $g(Y^{k-1}) \subset X$. Пусть e^k — некоторая k -мерная клетка из $Y \setminus X$ и $\Phi: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (Y, Y^{k-1})$ — её характеристическое отображение. Так как $\pi_k(Y, X) = 0$, композиция

$$g \circ \Phi: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (Y, Y^{k-1}) \rightarrow (Y, X)$$

гомотопна относительно ∂D^k отображению в X . Так как $Y^{k-1} \cup e^k = Y^{k-1} \sqcup D^k / \sim$, эта гомотопия индуцирует гомотопию между отображением $g|_{Y^{k-1} \cup e^k}: Y^{k-1} \cup e^k \rightarrow Y$ и отображением в X . Произведя такую гомотопию одновременно для всех клеток $e^k \subset Y \setminus X$ и взяв постоянную гомотопию на X , мы получим гомотопию между отображением $g|_{Y^k \cup X}$ и отображением в X . Согласно свойству продолжения гомотопии (теорема 4.7) эту гомотопию можно продолжить до гомотопии, определённой на всём пространстве Y , и тем самым доказательство шага индукции завершено.

Применив конечное число шагов индукции, получим доказательство в случае, когда размерность клеток из $Y \setminus X$ ограничена. В общем случае мы выполняем гомотопию на k -м шаге индукции в течение времени t из отрезка $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$. Любой конечный остов Y^k в конце концов станет стационарным при этих гомотопиях, поэтому мы получаем корректно определённую гомотопию g_t , $t \in [0, 1]$, причём $g_1(Y) \subset X$. \square

Теорема Уайтхеда не утверждает, что клеточные пространства X и Y с изоморфными гомотопическими группами будут гомотопически эквивалентными: изоморфизмы должны индуцироваться отображением $X \rightarrow Y$. Например, пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы (упражнение), но не гомотопически эквивалентны (этого мы пока доказать не можем).

Задачи и упражнения.

9.11. Докажите, что если пространство X линейно связно, то любой путь из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$, который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концом и началом). Указание: постройте и используйте отображение $\omega: S^n \rightarrow S^n \vee I$.

9.12. Докажите, что если $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — накрытие, то индуцированное отображение $p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм при $n \geq 2$.

9.13. Докажите, что $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0$ при $n \geq 2$.

9.14. Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

9.15. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах* или *5-лемма*. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

- а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
 б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

9.16. Введите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки* (X, A, B) (где $A \subset B \subset X$):

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, B, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, B, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, B, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0). \end{array}$$

9.17. Используя бесконечное расслоение Хопфа $p: S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1 , докажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

9.18. Докажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы.

9.19. Докажите, что $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$ для любого X при $n \geq 0$.

9.20. Докажите, что $\Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$.

9.21. Докажите трёхмерную теорему Брауэра: любое непрерывное отображение $f: D^3 \rightarrow D^3$ имеет неподвижную точку.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абеленизация (группы), 35, 40
амальгама (пространств), 9
амальгамированное произведение (групп), 40
- база (расслоения), 51
база (топологии), 6
базис (свободной группы), 34
барицентрическое подразбиение, 26
букет (пространств), 14, 38
бутылка Клейна, 21
- вложение (пространств), 3
- гомеоморфизм, 3
гомотопия, 16
гомотопическая группа, 58
 относительная, 59
гомотопическая эквивалентность, 16, 31
гомотопический кослой, 57
гомотопический тип, 16
гомотопический слой, 56
гомотопия,
 относительно подпространства, 24
 петель, 28
граф, 48
- действие (группы на пространстве), 5
 дискретное, 50
 свободное, 49
декартов квадрат, 9, 54
дерево, 48
 максимальное, 48
джойн (соединение), 13
 пространств с отмеченной точкой, 14
- индекс (подгруппы), 44
- категория, 6
клетка, 17
клеточное отображение, 18
клеточное подпространство, 18
клеточное пространство, 17
 локально конечное, 18
 конечное, 18
коамальгама, 9
кодекартов квадрат, 9, 41, 54
коммутант (группы), 35, 50
конус, 12
 отображения, 57
копроизведение
 групп, 34
 пространств, 9, 14
корасслоение, 22, 53
- лемма о 5 гомоморфизмах, 63
лист Мёбиуса, 28, 51
- морфизм, 6
- надстройка, 12
 пространства с отмеченной точкой, 14
накрытие, 42
 регулярное, 49
 универсальное, 47
- однородные координаты, 19
окрестность (точки), 3
орбита (действия), 6
отображение (пространств),
 открытое, 5
 непрерывное, 3
 собственное, 10
- пара (пространств), 22
 клеточная, 23
пара Борсука, 22
петля, 14, 28
подмножество (пространства)
 замкнутое, 3
 открытое, 3
предбаза (топологии), 10
предельная точка, 3
приведённое произведение, 14
приклеивание клетки, 17
проективная плоскость, 21
проективное пространство
 вещественное, 19
 бесконечномерное, 20
 комплексное, 20
произведение
 петель, 28
 пространств, 7
 с отмеченными точками, 14
пространство (топологическое)
 компактное, 3
 линейно связное, 14
 локально компактное, 12
 локально линейно связное, 44
 локально односвязное, 50
 односвязное, 41
 полулокально односвязное, 45
 с отмеченной точкой, 14
 связное, 3
 стягиваемое, 16, 31
 хаусдорфово, 3
пространство орбит, 6
пространство петель, 15, 53

- пространство путей, 15, 53
 путь (в пространстве), 14
- ранг (свободной группы), 34
- расслоение
 в смысле Гуревича, 53
 в смысле Серра, 53
 индуцированное, 55
 локально тривиальное, 50
 путей, 53
 тривиальное, 51
 Хопфа, 51, 56
- расслоенное произведение, 9
- ретракция, 22, 32
 деформационная, 22
- свободная группа, 34
- свободное произведение (групп), 34
- свойство поднятия гомотопии (СНР), 42, 51
- свойство продолжения гомотопии (НЕР), 22, 53
- симметрический квадрат (пространства), 28
- симплекс, 25
- симплициальный комплекс, 25
- склейка (пространств), 9
- слой (расслоения), 51
- смэш-произведение, 14
- сфера, 13, 19
 бесконечномерная, 20
- сфера с ручками, 21
- сфероид, 57
 относительный, 59
- теорема
 Брауэра, 32
 ван Кампена, 35
 Нильсена–Шрайера, 49
 о клеточной аппроксимации, 24, 38
 Тихонова, 11
 Уайтхеда, 62
- топологическая группа, 33
- топологическое пространство, 3
- топология, 3
 антидискретная, 3
 грубая, 3
 дискретная, 3
 индуцированная, 3
 компактно-открытая, 10
 произведения, 7
 прямого предела, 20
 тонкая, 3
- тотальное пространство (расслоения), 51
- точная последовательность, 59
- фактортопология, 5
- фундаментальная группа, 29
- функтор, 6
 ковариантный, 6
 контравариантный, 6
- характеристическое отображение (клетки), 17
- цилиндр, 12
 цилиндр отображения, 55
- шар, 13
- экспоненциальный закон, 12