Список задач к экзамену по курсу «Введение в топологию»[1]
(осень 2016, 2 курс, 2 поток; лектор – проф. А. А. Гайфуллин)

1. Перечислите все наборы подмножеств трёхэлементного множества такие, что существуют топологии, в которых эти наборы являются полными наборами замкнутых множеств.

2. Докажите, что любое открытое подмножество прямой есть объединение попарно непересекающихся интервалов.

3. Докажите, что любую базу обычной топологии на прямой можно уменьшить.

4. Докажите, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ набор всевозможных открытых кругов и набор всевозможных открытых квадратов со сторонами, параллельными координатным осям, задают две базы одной и той же топологии.

5. Покажите, что в любом множестве X набор его подмножеств является предбазой некоторой топологии тогда и только тогда, когда объединение всех подмножеств из этого набора есть всё множество X.

6. Докажите, что множество открытых шаров метрического пространства является базой некоторой топологии.

7. Расстоянием Хаусдорфа между ограниченными подмножествами A и B метрического пространства (X, ρ) называется число
$$d_\rho(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho(a,b)\right\}.$$
Докажите, что для любого метрического пространства X расстояние Хаусдорфа является метрикой на множестве его ограниченных замкнутых подмножеств.

8. Докажите, что для любого топологического пространства X и любого его подмножества A замыкание множества A совпадает с дополнением к внутренности множества $X \setminus A$.

9. Правда ли, что для любых подмножеств A и B произвольного топологического пространства справедливы равенства $\operatorname{Int}(A\cap B) = \operatorname{Int}(A)\cap\operatorname{Int}(B)$ и $\operatorname{Int}(A\cup B) = \operatorname{Int}(A)\cup\operatorname{Int}(B)$, где через $\operatorname{Int}(\cdot)$ обозначена внутренность подмножества?

10. Существует ли подмножество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что множества A, $\operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Int}\operatorname{Cl} A$ попарно различны, где Int обозначает внутренность, а Cl — замыкание?

11. Докажите, что $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$ для любого подмножества A любого топологического пространства, где Int обозначает внутренность, а Cl — замыкание.

12. Докажите, что пересечение счётного семейства открытых всюду плотных в пространстве $\mathbb{R}$ подмножеств всюду плотно.

13. Докажите, что граница замкнутого множества нигде не плотна. Верно ли это утверждение для границы (а) открытого множества; (б) произвольного множества?

[1]Все задачи взяты из книги О. Я. Виро, О. А. Иванова, Н. Ю. Нецветаева и В. М. Харламова «Элементарная топология»

14. Докажите, что прямая не является объединением счётного числа нигде не плотных подмножеств.

15. Докажите, что образ всюду плотного множества при сюръективном непрерывном отображении всюду плотен.

16. Существует ли в отрезке $[0;1]$ (с топологией, индуцированной топологией прямой) нигде не плотное подмножество A, допускающее такое непрерывное отображение $f\colon [0;1] \to [0;1]$, что $f(A) = [0;1]$?

17. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $a \in X$. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке a (по отношению к метрическим топологиям на X и Y) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in X$ с $\rho_X(x, a) < \delta$ имеет место неравенство $\rho_Y\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$.

18. Пусть $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, — непрерывные отображения. Докажите, что подмножество тоологического пространства X, состоящее из всех решений системы уравнений $f_1(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$, замкнуто.

19. Докажите, что $(0;1) \cong \mathbb{R}$ и $[0;1) \cong [0;+\infty)$, где $\cong$ обозначает гомеоморфность.

20. Докажите, что n-мерная сфера с выколотой точкой гомеоморфна n-мерному аффинному пространству $\mathbb{R}^n$.

21. Докажите, что замкнутый круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ гомеоморфен квадрату $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$.

22. Докажите, что бесконечный «крест»

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| > 1\}$$

гомеоморфен квадрату $[0,1]^2$, из которого выколоты все четыре вершины.

23. Докажите, что если K и L — конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.

24. Постройте два негомеоморфных пространства X и Y, для которых существуют непрерывные биекции $X \to Y$ и $Y \to X$.

25. Докажите, что замыкание связного подмножества топологического пространства связно.

26. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

27. Пусть $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — такая последовательность связных подмножеств некоторого топологического пространства, что $A_k \cap A_{k+1} \neq \varnothing$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что множество $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ связно.

28. Докажите, что подмножество прямой связно тогда и только тогда, когда оно является промежутком (т. е. отрезком, интервалом, полуинтервалом, замкнутым лучом, открытым лучом или всей прямой).

29. Докажите, что окружность не гомеоморфна никакому подмножеству прямой.

30. Докажите, что если $n > 1$, то пространства $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.

31. Докажите, что график Γ функции $f(x) = \sin(1/x)$ в области $x > 0$ линейно связен, а множество $\Gamma \cup \{(0,0)\}$ связно.

32. Докажите, что для открытых подмножеств евклидовых пространств связность равносильна линейной связности.

33. Постройте нерегулярное хаусдорфово пространство.

34. Пусть $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ — открытая верхняя полуплоскость, задаваемая неравенством $y > 0$, а $\mathcal{L}$ — ось абсцисс. *Пространством Немыцкого* называется множество $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cup \mathcal{L}$ с топологией, база которой состоит из открытых кругов, содержащихся в $\mathcal{H}$, и множеств вида $\{x\} \cup D$, где $x \in \mathcal{L}$ и D — открытый круг в $\mathcal{H}$, касающийся прямой $\mathcal{L}$ в точке x. Докажите, что пространство Немыцкого (а) регулярно; (б) не является нормальным.

35. Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ секвенциально непрерывно, если для любой точки $a \in X$ и любой последовательности a_n точек пространства X, стремящейся к точке a, последовательность $f(a_n)$ стремится к $f(a)$. Постройте пример секвенциально непрерывного, но не непрерывного отображения.

36. Пусть A и B — компактные подмножества пространства X. Верно ли, что компактны (а) множество $A \cup B$; (б) множество $A \cap B$?

37. Докажите, что компактное подмножество метрического пространства ограничено.

38. Постройте замкнутое ограниченное подмножество метрического пространства, не являющееся компактным.

39. Докажите, что на компактном множестве X всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений.

40. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в топологическое пространство Y и $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства Y. Докажите, что существует такое число $\delta > 0$, что образ $f(A)$ любого множества $A \subset X$ диаметра меньше δ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$.

41. Докажите, что для метрических пространств компактность и секвенциальная компактность равносильны.

42. Докажите, что всякое компактное метрическое пространство полно.

43. Докажите, что полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в нём существует конечная ε-сеть.

44. Докажите, что для всякого нормального пространства и всякого его локально конечного открытого покрытия существует разбиение единицы, подчинённое этому покрытию[2].

45. Докажите, что слои $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$ прямого произведения $X \times Y$ канонически гомеоморфны сомножителям X и Y соответственно и каноническими гомеоморфизмами служат сужения проекций.

46. Докажите (без ссылки на теорему Тихонова), что прямое произведение двух компактных пространств компактно.

47. Докажите, что пространство $GL_+(n) = \{A \in GL(n) \mid \det A > 0\}$ гомеоморфно пространству $SO(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, где $SO(n)$ — пространство ортогональных матриц с определителем 1.

48. Докажите, что пространство $SO(4)$ гомеоморфно $S^3 \times SO(3)$, где $SO(n)$ — пространство ортогональных матриц размера $n \times n$ с определителем 1.

49. Докажите, что фактопространство D^n/S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n.

50. Докажите, что факторпространство $I^2/[(0,t) \sim (1,t),\ (t,0) \sim (t,1)]$, то есть пространство, получаемое при склеивании (с сохранением направления) двух пар противоположных сторон квадрата, гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times S^1$.

51. Докажите, что пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно факторпространству n-мерного шара D^n по разбиению на одноточечные подмножества внутренности шара D^n и пары антиподальных точек граничной сферы S^{n-1}.

52. Докажите, что пространство $\mathbb{R}P^n$ (с топологией фактопространства сферы S^n по разбиению на пары противоположных точек) гомеоморфно пространству прямых пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат, с метрикой, которая определяется как угол между прямыми.

53. Докажите, что пространство $SO(3)$ ортогональных 3×3-матриц с определителем 1 гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

54. Докажите, что комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфна S^2.

55. В пространстве $C(I,I)$ непрерывных отображений $I \to I$ (где I=[0;1]) введём две топологии. Предбазой первой топологии — *топологии поточечной сходимости* — служат всевозможные множества

$$W(x,U) = \{f\colon I \to I \mid f(x) \in U\},$$

где $x \in I$ и U — открытое в I подмножество. Предбазой второй топологии — *компактно-открытой топологии* служат всевозможные множества

$$W(K,U) = \{f\colon I \to I \mid f(K) \subset U\},$$

[2] Открытое покрытие называется *локально конечным*, если каждая точка пространства содержится лишь в конечном числе элементов покрытия. Семейство неотрицательных непрерывных функций $f_\alpha\colon X \to [0;+\infty)$ называется *разбиением единицы*, если для каждого $x \in X$ лишь конечное число значений $f_\alpha(x)$ отличны от нуля и их сумма равна 1. Разбиение единицы $\{f_\alpha\}$ подчинено покрытию $\mathcal{U}$, если носитель каждой функции f_α (замыкание множества всех точек x таких, что $f_\alpha(x) \neq 0$) содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$.

где $K \subset I$ — компактное подмножество и U — открытое в I подмножество. Докажите, что топологии, задаваемые этими двумя предбазами различны.

56. Докажите, что отношение гомотопности на множестве непрерывных отображений $X \to Y$ является отношением эквивалентности.

57. Докажите, что любые два непрерывных отображения $X \to \mathbb{R}^n$ гомотопны.

58. Докажите, что для любых двух многочленов p и q над $\mathbb{C}$ одной и той же степени существует такое число $r > 0$, что для всякого $R > r$ формулы $z \mapsto p(z)$ и $z \mapsto q(z)$ определяют гомотопные отображения $S^1_R \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где S^1_R есть окружность $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$.

59. Пусть X — произвольное топологическое пространство, а $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартная сфера радиуса 1. Докажите, что если непрерывные отображения $f, g\colon X \to S^n$ таковы, что $|f(x) - g(x)| < 2$ для всякого $x \in X$, то f гомотопно g.

60. Докажите, что два пути в пространстве X свободно гомотопны (т. е. гомотопны без всяких условий на поведение гомотопии на концах отрезка) тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной и той же компоненте линейной связности этого пространства.

61. Не пользуясь теоремой о клеточной апроксимации, докажите, что при $n \geq 2$ группа $\pi_1(S^n, x)$ тривиальна для любой отмеченной точки $x \in S^n$.

62. *Топологической группой* называется группа G, наделённая структурой топологического пространства такой, что отображение произведения $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$, и отображение взятия обратного элемента $i\colon G \to G$, $i(g) = g^{-1}$, непрерывны. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

63. Пусть X — линейно связное топологическое пространство, $x_0, x_1 \in X$. Докажите, что изоморфизм $\varphi_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ не зависит от выбора пути α из x_0 в x_1 тогда и только тогда, когда группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

64. Докажите, что для каждого натурального числа n отображение $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, определённое по формуле $z \mapsto z^n$, является накрытием.

65. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если у всякой точки пространства x имеется окрестность U, образ которой $f(U)$ открыт в Y, а ограничение $f|_U\colon U \to f(U)$ есть гомеоморфизм. Существуют ли локальные гомеоморфизмы, не являющиеся накрытиями?

66. Докажите, что для каждого $n \geq 2$ фундаментальная группа пространства $\mathbb{R}P^n$ является циклической группой порядка 2. Укажите петлю, класс гомотопии которой является порождающей этой группы.

67. Докажите, что фундаментальная группа пространства $GL(n, \mathbb{C})$ невырожденных комплексных матриц бесконечна.

68. Докажите, что подмножество A топологического пространства X является его ретрактом тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение $A \to Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$.

69. Является ли проективная прямая ретрактом проективной плоскости?

70. Докажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса не является ретрактом самой ленты Мёбиуса.

71. Докажите, что плоскость, из которой выколоты (удалены) s точек гомотопически эквивалентна букету s окружностей.

72. Докажите, что пространство, полученное из сферы S^2 путём отождествления каких-либо двух её точек, гомотопически эквивалентно букету окружности и сферы.

73. Докажите, что пространство комплексных квадратных трёхчленов со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями, то есть пространство

$$\{(p,q) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + pz + q = 0 \text{ имеет два различных корня}\}$$

гомотопически эквивалентно окружности.

74. Докажите, что пространство $GL(n,\mathbb{R})$ невырожденных вещественных $(n \times n)$-матриц гомотопически эквивалентно пространству ортогональных матриц $O(n)$.

75. Вычислите фундаментальную группу пространства Q всех квадратных трёхчленов $az^2 + bz + c$, $a \neq 0$, имеющих различные (комплексные) корни.

76. Накрытие называется *регулярным*, если соответствующая ему подгруппа фундаментальной группы базы нормальна. Постройте пример нерегулярного накрытия букета двух окружностей.

77. Пусть $p\colon X \to B$ — накрытие, а $f\colon A \to B$ — произвольное непрерывное отображение. Обозначим через W подпространство произведения $A \times X$, состоящее из всех точек (a,x) таких, что $f(a) = p(x)$. Пусть $q\colon W \to A$ — сужение проекции $A \times X \to A$. Докажите, что $q\colon W \to A$ является накрытием с таким же количеством листов, как и у накрытия p.

78. Пусть $X = A \cup_\varphi D^n$ — пространство, полученное в результате приклеивания n-мерного шара D^n к топологическому пространству A вдоль непрерывного отображения $\varphi\colon S^{n-1} \to A$. Докажите, что дополнение $X \setminus \{x\}$ всякой точки $x \in X \setminus A$ (строго) деформационно ретрагируется на A. (Ретракция $r\colon X \to A$ называется (строгой) *деформационной ретракцией*, если композиция $i \circ r$ отображения r с тавтологическим вложением $i\colon A \to X$ гомотопна тождественному отображению id_X, причём гомотопия постоянна на A.)

79. Докажите, что дополнение любой точки в пространстве $\mathbb{R}P^n$ гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$.

80. Докажите, что дополнение любой точки в пространстве $\mathbb{C}P^n$ гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$.

81. Пусть Y — топологическое пространство, $\varphi\colon S^n \to Y$ и $\psi\colon S^n \to Y$ — непрерывные отображения, и пусть $X_\varphi = Y \cup_\varphi D^{n+1}$, $X_\psi = Y \cup_\psi D^{n+1}$. Докажите, что если отображения φ и ψ гомотопны, то пространства X_φ и X_ψ гомотопически эквивалентны.

82. Докажите, что всякий конечный одномерный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен букету окружностей.