Введение в топологию / Топология-1

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
Независимый Московский университет

Последняя редакция: 20 декабря 2015 г.

Содержание

Предисловие

Это первая часть базового курса лекций по алгебраической топологии (курсы «Введение в топологию» на механико-математическом факультете МГУ и «Топология-1» в Независимом Московском университете).

Основная часть курса — начала теории гомотопий. Сюда входит теория клеточных пространств, фундаментальная группа, накрытия, гомотопическая теория расслоений и высшие гомотопические группы.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`

Список литературы

[1] В. А. Васильев. *Введение в топологию.* Москва, Фазис, 1997.
[2] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология.* Москва, МЦНМО, 2010.
[3] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, «Наука», 1989.
[4] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Москва, МЦНМО, 2011.

1. Необходимые сведения из общей топологии

Основные понятия.

Топологическим пространством называется множество X с выделенным набором подмножеств, называемых *открытыми*, которые удовлетворяют условиям:

(а) пустое множество $\varnothing$ и всё множество X являются открытыми;
(б) объединение любого набора открытых множеств является открытым;
(в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Набор $\mathcal{T}$ открытых подмножеств также называется *топологией* на пространстве X.

Если на множестве X введены две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, причём каждое подмножество из $\mathcal{T}_1$ лежит в $\mathcal{T}_2$, то говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ *грубее* (в другой терминологии *слабее*) топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ *тоньше* (*сильнее*) топологии $\mathcal{T}_1$.

Самой тонкой топологией на X является *дискретная*, в которой все подмножества открыты, а самой грубой — *антидискретная*, в которой открытыми являются только $\varnothing$ и X.

Любое открытое множество U, содержащее данную точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки.

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств *непрерывно*, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в X. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ также непрерывно. Для гомеоморфных пространств X и Y используется обозначение $X \cong Y$.

Далее под «пространством» мы будем понимать топологическое пространство, а под «отображением» — непрерывное отображение.

Каждое подмножество $A \subset X$ является топологическим пространством относительно *индуцированной* топологии, в которой открытые множества имеют вид $A \cap U$, где U открыто в X. При этом отображение *вложения* $i\colon A \hookrightarrow X$ непрерывно.

Подмножество $A \subset X$ *замкнуто*, если его дополнение открыто. Точка $x \in X$ называется *предельной* для подмножества $A \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точку из A, отличную от x. Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (упражнение).

Пространство X *связно*, если его нельзя представить в виде объединения $A \sqcup B$ непересекающихся подмножеств A и B, каждое из которых непусто, открыто и замкнуто.

Пространство X *компактно*, если из каждого его покрытия открытыми множествами $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ можно выделить конечное подпокрытие $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Пространство X *хаусдорфово*, если у любых его двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности, $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$.

Теорема 1.1. *Непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1.2. *Если X компактно и $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то A также компактно (в индуцированной топологии).*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i\in I} U_i$ — открытое покрытие. Имеем $U_i = V_i \cap A$, где V_i — открыто в X. Тогда $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} V_i$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $X = (X \setminus A) \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Тогда $A = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — конечное подпокрытие. □

Лемма 1.3. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение и X компактно, то Y также компактно.*

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup_{i\in I} U_i$ — открытое покрытие. Тогда $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ также является открытым покрытием. Выделим конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — конечное подпокрытие. □

Лемма 1.4. *Если Y хаусдорфово и $B \subset Y$ — компактное подмножество, то B замкнуто.*

Доказательство. Предположим, что для B найдётся предельная точка $y \in Y$, такая, что $y \notin B$. Для каждой точки $b \in B$ выберем открытые (в Y) подмножества $U_b \ni b$, $V_b \ni y$, $U_b \cap V_b = \varnothing$. Из открытого покрытия $B = \bigcup_{b\in B} U_b$ выделим конечное подпокрытие $B = U_{b_1} \cup \ldots \cup U_{b_n}$. Тогда $V = V_{b_1} \cap \ldots \cap V_{b_n}$ — окрестность точки y, не пересекающаяся с B. Противоречие. □

Доказательство теоремы 1.1. Надо доказать, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно. Другими словами, надо доказать, что f переводит открытые множества в открытые (такие отображения называются *открытыми*). Так как f взаимно однозначно, это эквивалентно тому, что f переводит замкнутые множества в замкнутые. Пусть $A \subset X$ замкнуто. Согласно лемме 1.2, A компактно. Согласно лемме 1.3, $f(A) \subset Y$ также компактно. Наконец, согласно лемме 1.4, $f(A)$ замкнуто. □

Пусть задано некоторое отношение эквивалентности $\sim$ на X. Обозначим через $X/{\sim}$ множество классов эквивалентности. Обозначим через $p\colon X \to X/{\sim}$ естественное отображение, которое сопоставляет точке её класс эквивалентности. Тогда на множестве $X/{\sim}$ определена *фактор-топология*, в которой множество $U \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в X. Отображение $p\colon X \to X/{\sim}$ непрерывно относительно фактор-топологии и называется *фактор-отображением.*

Вот два важнейших примера фактор-пространства:

Пример 1.5.

1. Пусть $A \subset X$, а отношение эквивалентности на X задано так: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$. Фактор-пространство $X/{\sim}$ обозначается X/A; говорят, что X/A получается из X *стягиванием A в точку.* Обратим внимание, что если $A = pt$ — точка, то X/pt гомеоморфно X, а $X/\varnothing$ гомеоморфно несвязному объединению X и точки.

2. Говорят, что группа G *действует слева* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$, такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Заметим, что каждое отображение α_g является гомеоморфизмом (с обратным $\alpha_{g^{-1}}$). Точка $\alpha_g(x)$ обозначается просто gx.

Орбитой точки $x \in X$ под действием G называется подмножество

$$Gx = \{gx\colon g \in G\}.$$

Орбиты разных точек не пересекаются или совпадают и тем самым задают отношение эквивалентности $\sim$ на X: $x \sim y$ если существует $g \in G$, такой, что $gx = y$.

Соответствующее фактор-пространство $X/{\sim}$ называется *пространством орбит* по действию G и обозначается X/G.

Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты.

Базой топологии $\mathcal{T}$ на X называется набор открытых подмножеств $U_i\colon i \in I$, такой, что любое открытое множество в X представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств U_i.

Произведением пространств X и Y называется множество $X \times Y$ (состоящее из пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$) с топологией, базу которой образуют подмножества вида $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y. Эта топология называется *топологией произведения*.

Предложение 1.6. *Топология произведения является самой грубой из всех топологий на $X \times Y$, относительно которых проекции $p_X\colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, и $p_Y\colon X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$, являются непрерывными.*

Предложение 1.7 (универсальное свойство произведения)**.** *Пусть даны отображения $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$. Тогда существует единственное отображение $h\colon Z \to X \times Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$. Это выражается коммутативной диаграммой:*

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

Данное универсальное свойство определяет понятие *категорного произведения*. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств. Доказательство последних двух утверждений оставляется в качестве упражнений.

По аналогии определяется произведение конечного числа пространств $X_1 \times \ldots \times X_n$. Можно также определить бесконечное произведение $\prod_{i \in I} X_i$, однако здесь имеется тонкость: для того чтобы такое произведение обладало свойством универсальности по отношению к проекциям $p_i\colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ в качестве базы топологии необходимо брать только произведения вида $\prod_{i \in I} U_i$, где каждое U_i открыто в X_i и *лишь конечное число U_i отлично от X_i* (упражнение). Именно эта топология называется *топологией произведения* в случае бесконечного числа пространств.

Обобщением произведения является понятие декартового квадрата:

(1)
$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "r"] \\
& Y \arrow[r, "s"] & A
\end{tikzcd}
$$

Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется *декартовым квадратом*, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком.

Пространство $X \times_A Y$ называется *расслоеным произведением* (или *коамальгамой*, в англ. терминологии *pullback*) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon X \to A$ и $s\colon Y \to A$.

Таким образом, расслоенное произведение $X \times_A Y$ — это такое пространство с заданными отображениями $p_X\colon X \times_A Y \to X$ и $p_Y\colon X \times_A Y$, что $r \circ p_X = s \circ p_Y$ и для любого пространства Z с отображениями $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$, такими, что $r \circ f = s \circ g$, существует единственное отображение $h\colon Z \to X \times_A Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Существование декартового квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства $X \times_A Y$, использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y \colon r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и *кодекартова квадрата*:

(2)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_A Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Пространство $X \cup_A Y$ называется *склейкой* (или *амальгамой*, в англ. терминологии *pushout*) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon A \to X$ и $s\colon A \to Y$.

Явная конструкция пространства $X \cup_A Y$ использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y/\!\sim, \quad \text{где } x \sim y, \text{ если } x = r(a) \text{ и } y = s(a) \text{ для некоторого } a \in A.$$

В частности, при $A = \varnothing$ получаем, что *копроизведением* пространств X и Y является их несвязное объединение $X \sqcup Y$.

Топология на пространстве отображений.

Предбазой топологии $\mathcal{T}$ на X называется набор открытых подмножеств $U_i\colon i \in I$, порождающих $\mathcal{T}$ (т.е. $\mathcal{T}$ является самой грубой топологией, в которой все U_i открыты). Более явно, предбаза — это набор открытых множеств, совокупность всевозможных конечных пересечений которых образует базу.

Рассмотрим множество всех непрерывных отображений $f\colon X \to Y$. Это множество обозначается $\mathcal{C}(X, Y)$ или Y^X. На нём можно ввести топологию следующим образом. Для каждого компактного подмножества $K \subset X$ и открытого открытого множества $U \subset Y$ рассмотрим подмножество отображений

$$W(K, U) = \{f \in Y^X \colon f(K) \subset U\}.$$

Топология на Y^X, порождённая набором всевозможных подмножеств $W(K, U)$ (т.е. для которой подмножества $W(K, U)$ образуют предбазу), называется *компактно-открытой топологией*. Далее будем предполагать, что на Y^X всегда введена компактно-открытая топология.

Предложение 1.8. *Если X — конечное множество (с дискретной топологией), то топология на Y^X совпадает с топологией произведения $\prod_{x \in X} Y$.*

Доказательство. Любое подмножество $K \subset X$ является компактным. Каждое множество $W(K, U)$ является конечным пересечением $\bigcap_{x \in K} W(x, U)$, а множества $W(x, U)$ порождают топологию конечного произведения $\prod_{x \in X} Y$. □

Задачи и упражнения.

1.9. Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

1.10. В хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

1.11. Привести пример непрерывного взаимно однозначного отображения между компактными пространствами, которое не является гомеоморфизмом.

1.12. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Доказать, что отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственно.

1.13. Открытое инъективное отображение является вложением (в смысле индуцированной топологии). Аналогично, замкнутое инъективное отображение является вложением.

1.14. Открытое сюръективное отображение является фактор-отображением (в смысле фактор-топологии). Аналогично, замкнутое сюръективное отображение является фактор-отображением.

1.15. Индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

1.16. Фактор-топология на $X/{\sim}$ является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \to X/{\sim}$ непрерывно.

1.17. Если $A \subset X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто. Однако X/A может быть не хаусдорфовым даже если X хаусдорфово, а $A \subset X$ — замкнуто.

1.18. Доказать предложения 1.6 и 1.7.

1.19. Доказать, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова* и является одним из самых значимых результатов общей топологии. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора (полезно самостоятельно вывести аксиому выбора из теоремы Тихонова или разобрать доказательство).

1.20. Канторово множество гомеоморфно произведению счётного числа дискретного пространства $\{0, 1\}$.

1.21. Проверить универсальные свойства расслоенного произведения $X \times_A Y$ и склейки $X \cup_A Y$.

1.22. Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

1.23. Верно ли предложение 1.8 для произвольного пространства X?

1.24. Имеет место гомеоморфизм
$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z) \qquad \text{или} \qquad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

1.25. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно.

Если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции
$$\varphi\colon \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$
непрерывно. В частности, *отображение вычисления*
$$e\colon Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \to Z, \qquad (y, f) \mapsto f(y)$$
непрерывно.

1.26 (экспоненциальный закон)**.** Определено каноническое отображение
$$\varPhi\colon \mathcal{C}(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \qquad \text{или} \qquad \varPhi\colon Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X,$$
при котором отображение $f\colon X \times Y \to Z$ переходит в отображение $\varPhi(f)\colon X \to \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$.

Доказать, что если X хаусдорфово, а Y хаусдорфово и локально компактно, то $\varPhi$ — гомеоморфизм.

2. Операции над топологическими пространствами

Конус, надстройка и джойн. Символ I обозначает у нас единичный отрезок $[0, 1]$.

Цилиндром над X называется произведение $X \times I$; подпространства $X \times 1$ и $X \times 0$ называются *(верхним и нижним) основаниями* цилиндра.

Конус CX над X — это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию: $CX = (X \times I)/(X \times 1)$. Образ основания $X \times 1$ называется *вершиной* конуса, а образ основания $X \times 0$ — *основанием* конуса.

Надстройкой $\varSigma X$ над X называется факторпространство конуса по его основанию: $\varSigma X = CX/(X \times 0)$. (Обратите внимание, что это — не то же самое, что факторпространство $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$.) Пространство X вкладывается в надстройку $\varSigma X$ в качестве $X \times \frac{1}{2}$. По-другому надстройку можно определить как склейку двух конусов по их основаниям: $\varSigma X = CX \cup_X CX$; таким образом мы имеем кодекартов квадрат
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & CX \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \varSigma X, \end{tikzcd}$$
где каждое из отображений i является вложением X на основание цилиндра.

Джойн (или *соединение*) $X * Y$ пространств X и Y удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y. Формально джойн определяется как факторпространство
$$X * Y = X \times Y \times I/\ (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0),\ (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$$
при любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $y, y_1, y_2 \in Y$. Произведение, $X \times Y$ вкладывается в джойн в качестве $X \times Y \times \frac{1}{2}$.

Пример 2.1.

1. Рассмотрим *n-мерную сферу*

$$S^n = \{\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

(При $n = 0$ получаем $S^0 =$ две точки.) Тогда $CS^n = D^{n+1}$ (шар размерности $n+1$), а надстройка ΣS^n гомеоморфна S^{n+1} (упражнение).

2. Джойн $S^k * S^l$ гомеоморфен сфере S^{k+l+1}.

Пространства с отмеченной точкой. В теории гомотопий часто имеют дело с *пространствами с отмеченной точкой*, т.е. считается, что во всех рассматриваемых пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. При этом операции, описанные выше, видоизменяются следующим образом.

Произведением пространств с отмеченными точками (X, x_0) и (Y, y_0) называется пространство $X \times Y$ с отмеченной точкой (x_0, y_0). В *конусе* и *надстройке* над (X, x_0) дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times I$, т.е.

$$C(X, x_0) = X \times I/(X \times 1 \cup x_0 \times I), \quad \Sigma(X, x_0) = CX/(X \times 0 \cup x_0 \times I).$$

При этом стянутое подпространство объявляется отмеченной точкой. В *джойне* $(X, x_0) * (Y, y_0)$ дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times y_0 \times I$.

Если из контекста ясно, что мы имеем дело с пространствами с отмеченными точками, то мы часто будем использовать обозначение X вместо (X, x_0) (также ΣX вместо $\Sigma(X, x_0)$ и т.д.).

Имеются следующие две дополнительные операции над пространствами с отмеченными точками.

Букетом пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \vee Y$, получаемое склейкой X и Y по отмеченным точкам x_0 и y_0:

$$X \vee Y = X \sqcup Y/(x_0 \sim y_0).$$

Букет $X \vee Y$ естественным образом вкладывается в произведение $X \times Y$ в качестве подпространства $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$; при этом отмеченная точка букета переходит в (x_0, y_0). Букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками (упражнение).

Приведённым произведением (или *смэш-произведением*) пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \wedge Y$, получаемое факторизацией произведения $X \times Y$ по вложенному букету $X \vee Y$:

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \times y_0 \cup x_0 \times Y).$$

Пространства путей и петель. *Путём* в пространстве X называется отображение $\varphi \colon I \to X$; точка $\varphi(0)$ называется *началом*, а $\varphi(1)$ — *концом* пути φ. *Петлёй* называется путь, начинающийся и заканчивающийся в одной точке.

Пространство X, любые две точки которого можно соединить путём, называется *линейно связным*. Линейно связное пространство связно, но обратное верно не всегда (упражнение).

Пусть X — пространство с отмеченной точкой. *Пространством путей* на X называется подпространство $PX \subset \mathcal{C}(I, X)$, состоящее из путей, начинающихся в отмеченной точке x_0. *Пространством петель* на X называется подпространство $\Omega X \subset PX$, состоящее из петель, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке x_0. Отмеченной точкой пространства ΩX является постоянная петля, $\varphi(x) = x_0$.

Теорема 2.2. *Если X хаусдорфово, то имеет место естественный по X и Y гомеоморфизм*

$$\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \to \mathcal{C}(X, \Omega Y),$$

переводящий отображение $f\colon X \times I \to \Sigma X \to Y$ в отображение $X \to \Omega Y$, $x \mapsto \varphi_x$, где φ_x — петля $I \to Y$, $t \mapsto f(x,t)$.

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону (задача 1.26), имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X \times I, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y)).$$

При этом подпространство $\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \subset \mathcal{C}(X \times I, Y)$, состоящее из отображений $f\colon X \times I \to Y$, для которых $f(x,0) = f(x,1) = f(x_0,t) = y_0$, переходит в подпространство $\mathcal{C}(X, \Omega Y) \subset \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y))$ отображений, переводящих X в петли с началом y_0 и переводящих x_0 в постоянную петлю.

Естественность по X и Y означает, что для отображений $X' \to X$ и $Y \to Y'$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathcal{C}(X, \Omega Y) \arrow[d] \\
\mathcal{C}(\Sigma X', Y') \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{C}(X', \Omega Y')
\end{tikzcd}$$

Детали остаются в качестве упражнения. □

Задачи и упражнения.

2.3. Докажите, что $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2.4. Докажите, что букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками, т.е. для него имеет место универсальное свойство

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \vee Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

где все стрелки являются отображениями пространств с отмеченными точками.

2.5. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

3. Гомотопии и гомотопические эквивалентности

Два отображения $f, g\colon X \to Y$ между пространствами X и Y называются *гомотопными* (обозначается $f \simeq g$), если существует отображение $F\colon X \times I \to Y$, такое, что $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией* между f и g. Для каждого $t \in I$ будем обозначать через F_t отображение $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$.

Гомотопия является отношением эквивалентности между отображениями. Мы будем обозначать через $[X, Y]$ множество классов гомотопных отображений из X в Y.

Замечание. Если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то имеем гомеоморфизм
$$\mathcal{C}(I \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y)).$$
Таким образом, в этом случае гомотопию можно рассматривать как путь в пространстве отображений $\mathcal{C}(X, Y)$, а множество классов гомотопных отображений $[X, Y]$ является множеством классов линейной связности пространства $\mathcal{C}(X, Y)$.

Два пространства X и Y *гомотопически эквивалентны*, если существуют отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ и $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$, соответственно. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на пространствах, и *гомотопическим типом* пространства X называется класс пространств, гомотопически эквивалентных X.

Пространство X *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример 3.1. Единичный шар $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon |\boldsymbol{x}| \leqslant 1\}$ стягиваем. Действительно, пусть $f\colon D^n \to pt$ — отображение в точку, а $g\colon pt \to D^n$ — отображение, переводящее точку в $\mathbf{0} \in D^n$. Тогда $f \circ g\colon pt \to pt$ — тождественное отображение, а $g \circ f\colon D^n \to D^n$ переводит каждую точку $\boldsymbol{x} \in D^n$ в $\mathbf{0}$. Гомотопия между $\mathrm{id}\colon D^n \to D^n$ и $g \circ f$ задаётся отображением $F\colon D^n \times I \to D^n$, $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto t\boldsymbol{x}$.

Задачи и упражнения.

3.2. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, а $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}.

3.3. Докажите, что надстройка над тором $S^1 \times S^1$ гомотопически эквивалентна букету сфер и опишите этот букет.

3.4. Пусть X — дополнение к 3 координатным осям в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету окружностей и найдите число окружностей в букете.

3.5. Пусть X — дополнение к 3 координатным осям в $\mathbb{C}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету сфер $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$.

4. Клеточные пространства

Определение и примеры. *Клеточным пространством* (*клеточным комплексом*, *CW-комплексом*) называется хаусдорфово топологическое пространство X, представленное в виде объединения $\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} e_i^q$ попарно непересекающихся подмножеств e_i^q, называемых *клетками*, таким образом, что для каждой клетки e_i^q существует отображение замкнутого q-мерного шара D^q в X, называемое *характеристическим отображением* клетки e_i^q, ограничение которого на внутренность шара $\operatorname{int} D^q$ есть гомеоморфизм на e_i^q. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

(C) граница $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток размерности $< q$;

(W) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

Замечание. Буквы «C» и «W» происходят из английской терминологии «closure finite» и «weak topology», восходящей к Дж. Уайтхеду. Топология, описываемая аксиомой (W), является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны (упражнение).

Объединение клеток размерности $\leqslant n$ в клеточном пространстве X называется *n-м остовом* пространства X и обозначается через $\mathrm{sk}^n X$ или X^n. Клеточное пространство X может быть получено из его 0-остова X^0 (который представляет собой дискретное пространство) последовательным применением операции *приклеивания клетки*: пространство Z получается из Y приклеиванием n-мерной клетки при помощи отображения $f\colon S^{n-1} \to Y$, если Z входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Мы будем использовать обозначение $Z = Y \cup_f D^n$.

Клеточным подпространством клеточного пространства X называется замкнутое подмножество, которое является объединением клеток из X. Каждый остов клеточного пространства X является клеточным подпространством.

Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток, и *локально конечным*, если каждая его точка вместе с некоторой окрестностью принадлежит конечному подпространству.

Отображение $f\colon X \to Y$ клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n.

Замечание. Разбиение диска D^2 на его внутренность и отдельные точки граничной окружности удовлетворяет аксиоме (W), но не удовлетворяет аксиоме (C).

Рассмотрим букет счётного числа отрезков $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ с топологией, происходящей из метрики: расстояние между точками $t \in I_k$ и $s \in I_l$ равно $|s-t|$, если $k = l$ и равно $t + s$, если $k \neq l$. Разбиение пространства X на внутренности отрезков и оставшиеся точки удовлетворяет (C), но не (W): последовательность точек $\frac{1}{k} \in I_k$ сходится к 0, т.е. является незамкнутым множеством, но её пересечение с замыканием любой клетки замкнуто. Конечно, на X можно определить другую топологию так, чтобы аксиома (W) выполнялась, но эта топология не будет происходить ни из какой метрики.

Если A, X, Y — клеточные пространства и $r\colon A \to X$, $s\colon A \to Y$ — клеточные отображения, то склейка (амальгама) $X \cup_A Y$ — тоже клеточное пространство. В частности, цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства.

Пусть X, Y — локально конечные клеточные пространства. Тогда разбиение произведения $X \times Y$ на клетки вида $e \times e'$, где e — клетка в X, а e' — клетка в Y, задаёт на $X \times Y$ структуру клеточного пространства. (Если пространства X и Y не являются локально конечными, может возникнуть проблема с аксиомой (W); соответствующий пример и обсуждение можно найти в книге Хатчера).

Пример 4.1.

1. Сфера S^n имеет клеточное разбиение из двух клеток: точки $e^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ и множества $e^n = S^n \setminus e^0$. Характеристическое отображение $D^n \to S^n$, соответствующее второй клетке, переводит границу шара в точку e^0. Например, можно взять отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \ldots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (-1, 0, \ldots, 0), & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

2. Другое клеточное разбиение сферы S^n состоит из $2n+2$ клеток $e^0_\pm, e^1_\pm, \ldots, e^n_\pm$: клетка $e^k_\pm$ состоит из точек $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$, у которых $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ и $\pm x_k > 0$. Здесь замыкание каждой клетки гомеоморфно шару.

3. *Вещественное проективное пространство* $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$. Топологию в $\mathbb{R}P^n$ можно ввести с помощи угловой метрики: расстояние между прямыми равно углу между ними.

Координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ направляющего вектора прямой (определённые с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки из $\mathbb{R}P^n$; при этом используется обозначение $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Точки, у которых i-я координата отлична от 0 составляют i-ю *аффинную карту.* Соответствие

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \leftrightarrow \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}\right)$$

определяет гомеоморфизм аффинной карты на $\mathbb{R}^n$ и задаёт в ней координаты.

Имеется отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую, проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$. При этом диаметрально противоположные точки сферы переходят в одну прямую. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получается из S^n отождествлением диаметрально противоположных точек. Верхняя полусфера $S^n_\geqslant = \{\boldsymbol{x} \in S^n \colon x_n \geqslant 0\}$ гомеоморфна шару D^n (посредством отображения проекции, забывающего последнюю координату). Сужение отображения $S^n \to \mathbb{R}P^n$ на $S^n_\geqslant$ задаёт отображение $D^n \to \mathbb{R}P^n$, при котором в одну точку отображаются только диаметрально противоположные точки граничной сферы $S^{n-1} \subset D^n$.

При отображении $S^n \to \mathbb{R}P^n$ клетки e^k_+ и e^k_- разбиения сферы S^n из предыдущего примера склеиваются и получается разбиение пространства $\mathbb{R}P^n$ на $n+1$ клетку, по одной клетке e^k в каждой размерности $k \leqslant n$. Мы имеем

$$e^k = \{[x_0, x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \colon x_k \neq 0,\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Другими словами, $e^k = \mathbb{R}P^k \backslash \mathbb{R}P^{k-1}$, где пространства $\mathbb{R}P^k$ образуют цепочку вложений $pt = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}P^n$. Характеристическим отображением для клетки e^k является композиция $D^k \to \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ проекции и вложения.

4. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^\infty$, представляющее собой объединение вложенных пространств $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \ldots$. Таким образом, $\mathbb{R}^\infty$ есть множество *финитных* (т.е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ вещественных чисел. Топология в $\mathbb{R}^\infty$ вводится правилом: подмножество $A \subset \mathbb{R}^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $A \cap \mathbb{R}^n$ замкнуты в своих пространствах $\mathbb{R}^n$ (это — самая тонкая топология, в которой все вложения $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ непрерывны, она называется *топологией прямого предела*).

Бесконечномерная сфера S^∞ — это объединение вложенных сфер $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \ldots$. По-другому, S^∞ — это единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Бесконечномерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ — это объединение вложенных проективных пространств $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \ldots$. Эквивалентно, $\mathbb{R}P^\infty$ — это множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{R}^\infty$. Пространство $\mathbb{R}P^\infty$ получается из S^∞ отождествлением диаметрально противоположных точек.

Клеточные разбиения сфер S^n и проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ из двух предыдущих примеров дают клеточные разбиения S^∞ и $\mathbb{R}P^\infty$. Первое разбиение имеет по две клетки e^k_+ и e^k_-, а второе — по одной клетке e^k в каждой размерности $k \geqslant 0$.

5. *Комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$. Как и в случае $\mathbb{R}P^n$, на пространстве $\mathbb{C}P^n$ имеются *однородные координаты* $[z_0\colon z_1\colon \ldots\colon z_n]$ (определённые с точностью до умножения на ненулевое комплексное число) и $\mathbb{C}P^n$ покрывается $n+1$ аффинными картами, каждая из которых гомеоморфна пространству $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим единичную сферу

$$S^{2n+1} = \bigl\{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\colon |z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\bigr\}.$$

Мы имеем отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_0\colon z_1\colon \ldots\colon z_n]$, при котором прообразом точки $[z_0\colon z_1\colon \ldots\colon z_n] \in \mathbb{C}P^n$ является окружность в S^{2n+1}, состоящая из точек $(z_0 z, z_1 z, \ldots, z_n z)$ с $|z| = 1$.

Рассмотрим также шар

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}\colon z_n \in \mathbb{R}, z_n \geqslant 0\}.$$

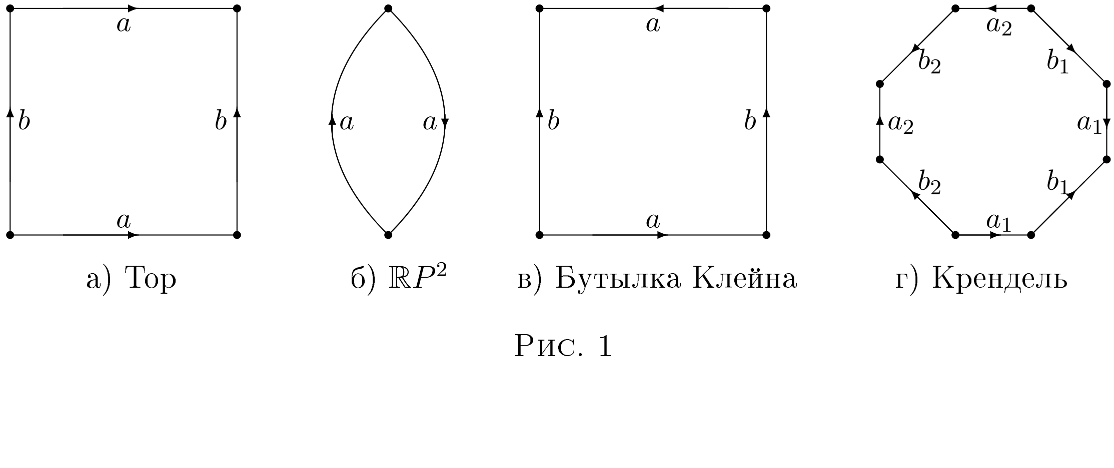
Тогда отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ ограничивается до отображения $D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$, которое взаимно однозначно на внутренности шара, а на границе S^{2n-1} происходит отождествление как описано выше (окружности переходят в точки).

Это даёт разбиение $\mathbb{C}P^n$ на клетки

$$e^{2k} = \{[z_0, z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n\colon z_k \neq 0,\ z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\},$$

по одной в каждой чётной размерности $2k \leqslant 2n$, с характеристическими отображениями $D^{2k} \to \mathbb{C}P^k \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.

6. Классические двумерные поверхности (сферы с ручками, проективные плоскости с ручками, бутылки Клейна с ручками) получаются путём отождествления рёбер на границе многоугольника. Это приводит к клеточным разбиениям поверхностей с одной двумерной клеткой.



а) Тор б) $\mathbb{R}P^2$ в) Бутылка Клейна г) Крендель

Рис. 1

На рис. 1 а) изображено клеточное разбиение тора, получаемое отождествлением ребёр квадрата в соответствии с буквами и направлением стрелок. Получаемое разбиение имеет одну 0-мерную клетку (в которую склеиваются все вершины), две 1-мерных клетки a и b и одну 2-мерную клетку (внутренность квадрата).

На рис. 1 б) изображено клеточное разбиение проективной плоскости с одной 0-мерной, одной 1-мерной и одной 2-мерной клетками. Это разбиение совпадает с разбиением из примера 3 при $n = 2$.

На рис. 1 в) изображено клеточное разбиение бутылки Клейна с одной 0-мерной, двумя 1-мерными и одной 2-мерной клетками.

На рис. 1 г) изображено клеточное разбиение сферы с двумя ручками (кренделя), получаемое отождествлением ребёр восьмиугольника. Оно содержит одну 0-мерную, четыре 1-мерные и одну 2-мерную клетками. Аналогично, разбиение сферы с g ручками (также называемой *ориентируемой поверхностью рода* g) можно получить отождествлением рёбер $4g$-угольника. Такое разбиение имеет $2g$ одномерных клеток $a_1, \dots, a_g$ и $b_1, \dots, b_g$. Разбиение проективной плоскости с g ручками можно получить отождествлением рёбер $4g+2$-угольника, а разбиение бутылки Клейна с g ручками — отождествлением рёбер $4g + 4$-угольника.

Свойство продолжения гомотопии. Подпространство A пространства X называется его *ретрактом*, если существует отображение $r\colon X \to X$, такое, что $r(X) = A$ и $r|_A = \mathrm{id}$ (т.е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$). Отображение r называется *ретракцией* X на A; оно удовлетворяет соотношению $r^2 = r$ и является топологическим аналогом проектора.

Если ретракция $r\colon X \to X$, $r(X) = A$, гомотопна тождественному отображению, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X. Если, сверх того, гомотопию $F\colon X \times I \to X$ между r и id можно сделать тождественной на A (т.е. $F(a,t) = a$ для любого $t \in I$), то A называется *строгим деформационным ретрактом* пространства X.

Парой пространств называется пара (X, A), где X — пространство, а A — его подпространство. *Отображением пар* $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ называется непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $f(A) \subset B$. Например, отображение пространств с отмеченными точками является отображением пар $(X, pt) \to (Y, pt)$.

Говорят, что пара (X, A) обладает *свойством продолжения гомотопии* (homotopy extension property, HEP), если для любого отображения $f\colon X \to Z$ и гомотопии $F\colon A \times I \to Z$, такой, что $F_0 = f|_A$, существует гомотопия $\widehat{F}\colon X \times I \to Z$, для которой $\widehat{F}_0 = f$ и $\widehat{F}|_{A\times I} = F$. Таким образом, (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии, если любое отображение $X \times 0 \cup A \times I \to Z$ можно продолжить до отображения $X \times I \to Z$. Пара (X, A), удовлетворяющая свойству продолжение гомотопии, также называется *парой Борсука*, а отображение $A \to X$ — *корасслоением* (смысл последнего термина будет объяснён позже, в разделе 9).

Предложение 4.2. *Пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии тогда и только тогда, когда $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт пространства $X \times I$.*

Доказательство. Свойство продолжения гомотопии влечёт, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon X \times 0 \cup A \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ продолжается до отображения $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$, а потому $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$.

Пусть теперь дана ретракция $r\colon X\times I\to X\times 0\cup A\times I$. Отображения $f\colon X\times 0\to Z$ и $F\colon A\times I\to Z$ согласованы на $A\times 0$, а потому склеиваются в отображение $X\times 0\cup_{A\times 0} A\times I\to Z$ (см. упражнение 1.21). Трудность может заключаться в том, что топология склейки $X\times 0\cup_{A\times 0} A\times I$ (фактор-топология несвязного объединения $X\times 0\sqcup A\times I$) может отличаться от топологии, индуцированной вложением $X\times 0\cup A\times I\hookrightarrow X\times I$. Однако при наличии ретракции $r\colon X\times I\to X\times 0\cup A\times I$ топология склейки грубее индуцированной топологии (это очевидно в случае, когда A замкнуто в X, и нам понадобится лишь этот случай), поэтому непрерывное отображение $X\times 0\cup_{A\times 0} A\times I\to Z$ из склейки будет также непрерывно в индуцированной топологии. В результате получаем композицию

$$X\times I\xrightarrow{r} X\times 0\cup A\times I\xrightarrow{f\cup F} Z,$$

которая задаёт требуемое продолжение гомотопии. $\square$

Клеточной парой называется пара (X,A), где X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство.

Теорема 4.3. *Клеточная пара (X,A) обладает свойством продолжения гомотопии.*

Доказательство. Мы докажем, что $X\times 0\cup A\times I$ является ретрактом (и даже деформационным ретрактом) пространства $X\times I$; тогда результат будет следовать из предложения 4.2.

Рассмотрим ретракцию $r\colon D^n\times I\to D^n\times 0\cup \partial D^n\times I$, задаваемую центральной проекцией из точки $(\mathbf{0},2)\in D^n\times\mathbb{R}$. Полагая $r_t=tr+(1-t)\,\mathrm{id}$, мы видим, что r является деформационной ретракцией. Эта деформационная ретракция даёт деформационную ретракцию $X^n\times I$ на $X^n\times 0\cup (X^{n-1}\cup A^n)\times I$, так как $X^n\times I$ получается из $X^n\times 0\cup(X^{n-1}\cup A^n)\times I$ приклеиванием экземпляров $D^n\times I$ вдоль $D^n\times 0\cup\partial D^n\times I$. Теперь будем совершать деформационную ретракцию $X^n\times I$ на $X^n\times 0\cup(X^{n-1}\cup A^n)\times I$ за время t из отрезка $[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]$. Взяв композицию по всем n, получим деформационную ретракцию $X\times I$ на $X\times 0\cup A\times I$. Полученное отображение будет непрерывно при $t=0$ даже если X бесконечномерно (и композиция бесконечна). Действительно, отображение $X\times I\to X\times 0\cup A\times I$ непрерывно на $X^n\times I$, так как деформационная ретракция там постоянна при $t\in[0,\frac{1}{2^{n+1}}]$, а отображение клеточных пространств непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его ограничения на все остовы. $\square$

Следствие 4.4. *Если пара (X,A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (например, если (X,A) — клеточная пара) и A стягиваемо, то отображение факторизации $q\colon X\to X/A$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Стягивание пространства A — это гомотопия между отображениями $\mathrm{id}\colon A\to A$ и $A\to pt$. Пусть $F_t\colon X\to X$ — продолжение этой гомотопии, причём $F_0=\mathrm{id}$. Так как $F_t(A)\subset A$ для всех t, композиция $qF_t\colon X\to X/A$ переводит A в точку, а значит представляется в виде композиции $X\xrightarrow{q} X/A\to X/A$. Обозначив последнее отображение через $\widehat{F}_t$, мы получаем коммутативную диаграмму слева, где

F_t и $\widehat{F}_t$ можно рассматривать как гомотопии:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\widehat{F}_t"] & X/A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\widehat{F}_1"] \arrow[ur, "g"] & X/A \end{tikzcd}$$

При $t = 1$ мы имеем $F_1(A) = pt$, а значит F_1 индуцирует отображение $g\colon X/A \to X$, причём $gq = F_1$, как на диаграмме справа. Кроме того, $qg = \widehat{F}_1$, так как $qg(\widehat{x}) = qgq(x) = qF_1(x) = \widehat{F}_1 q(x) = \widehat{F}_1(\widehat{x})$. Отображения $g\colon X/A \to X$ и $q\colon X \to X/A$ являются взаимно обратными гомотопическим эквивалентностями, так как $gq = F_1 \simeq F_0 = \mathrm{id}$ посредством F_t и $qg = \widehat{F}_1 \simeq \widehat{F}_0 = \mathrm{id}$ посредством $\widehat{F}_t$. $\square$

Следствие 4.5. *Если (X, A) — клеточная пара, то $X/A \simeq X \cup CA$, где CA — конус над A.*

Доказательство. Мы имеем $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$, где последняя гомотопическая эквивалентность вытекает из предыдущего следствия, применённого к клеточной паре $(X \cup CA, CA)$. $\square$

Теорема о клеточной аппроксимации. Если $A \subset X$ — подпространство, то *гомотопией относительно* A называется гомотопия $F_t\colon X \to Y$, такая, что что $F_t(a) = F_{t'}(a)$ для любых $t, t' \in I$ и $a \in A$ (т.е. гомотопия неподвижна на A).

Теорема 4.6. *Любое отображение $f\colon X \to Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному отображению. Если f уже является клеточным на клеточном подпространстве $A \subset X$, то можно выбрать гомотопию относительно A.*

Доказательство. Предположим по индукции, что $f\colon X \to Y$ уже клеточно на остове X^{n-1}, и пусть e^n — клетка в X. Замыкание $\overline{e}^n$ компактно в X, так как оно является образом характеристического отображения. Тогда $f(\overline{e}^n) \subset Y$ также компактно, а значит $f(e^n)$ пересекает только конечное число клеток в Y (упражнение 4.11). Пусть ϵ^k — клетка самой высокой размерности, с которой пересекается $f(e^n)$. Можно считать, что $k > n$, так как иначе f уже клеточно на e^n. Ниже мы покажем, что существует деформация (гомотопия) отображения $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1}, такая, что образ клетки e^n при деформированном отображении не содержит некоторую точку $y \in \epsilon^k$. Тогда можно деформировать отображение $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1} так, чтобы образ клетки e^n не содержал всю клетку ϵ^k, взяв композицию с деформационной ретракцией пространства $Y^k \setminus y$ на $Y^k \setminus \epsilon^k$ (такая деформационная ретракция существует, так как существует деформационная ретракция $D^k \setminus x \to \partial D^k$ для $x \in \operatorname{int} D^k$, а характеристическое отображение $D^k \to Y$ клетки ϵ^k является гомеоморфизмом на $\operatorname{int} D^k$). Повторяя этот процесс конечное число раз, мы добьёмся того, чтобы множество $f(e^n)$ не пересекалось со всеми клетками размерности больше n. Делая это для всех n-мерных клеток и оставляя при этом отображение неподвижными на n-мерных клетках из A, где оно уже клеточное, мы получим гомотопию отображения $f|X^n$ относительно $X^{n-1} \cup A^n$ в клеточное отображение. Далее мы пользуемся теоремой 4.3, чтобы продолжить эту гомотопию, вместе с постоянной гомотопией на A, до гомотопии на всём пространстве X. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, возможно, бесконечную последовательность гомотопий, которую можно реализовать как одну гомотопию, выполняя гомотопию с номером n в течение времени t из интервала

$[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}]$. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$.

Чтобы заполнить недостающий шаг в рассуждении, нам понадобится «лемма о свободной точке»:

Лемма 4.7. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\varphi\colon U \to \operatorname{int} D^k$ — такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно. Если $k > n$, то существует непрерывное отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, гомотопное φ, совпадающее с φ вне V и такое, что его образ не покрывает всего шара B^k.*

Доказательство леммы приводится ниже, а пока завершим доказательство теоремы. Из леммы о свободной точки и свойств характеристических отображений $h\colon D^n \to X$ и $g\colon D^k \to Y$ клеток e^n и ϵ^k вытекает, что отображение $f|_{A\cup X^{n-1}\cup e^n}$ гомотопно относительно $A \cup X^{n-1}$ отображению $f'\colon A \cup X^{n-1} \cup e^n \to Y$, такому, что $f'(e^n)$ пересекает те же клетки, что и $f(e^n)$, но не содержит всю клетку ϵ^k. Действительно, применим лемму к подмножеству $U = h^{-1}(f^{-1}(\epsilon^k) \cap e^n)$ и отображению $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h\colon U \to \operatorname{int} D^k$ (тогда для любого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно как замкнутое подмножество шара D^n). Лемма даёт нам отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$. Тогда мы определим отображение f' по формуле

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin h(U), \\ g \circ \psi \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U). \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, так как отображения f и $g \circ \psi \circ h^{-1}$ совпадают на множестве $h(U \setminus V)$. Кроме того, гомотопия между φ и ψ даёт гомотопию между f и f', а $f'(e^n)$ не покрывает ϵ^k, так как $\psi(U)$ не покрывает всего шара B^k. □

Для доказательства леммы о свободной точке мы используем кусочно-линейную аппроксимацию.

Напомним, что k-мерный *симплекс* Δ^k — это выпуклая оболочка набора из $k+1$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ в $\mathbb{R}^n$, не лежащих на одной $(k-1)$-мерной плоскости. Эти $k+1$ точек называются *вершинами* симплекса, а выпуклые оболочки поднаборов множества вершин называются *гранями*. Грани являются симплексами размерности $\leqslant k$.

Симплициальный комплекс — это такой набор симплексов произвольной размерности в некотором $\mathbb{R}^n$, что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Говорят, что некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют симплициальный комплекс.

Барицентром симплекса Δ^k с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_k$ называется точка $\frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \ldots + x_k)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса Δ^k называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса Δ^k; при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение 0-мерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k-мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично, индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Эти конструкции обладают следующими двумя свойствами. Во-первых, линейное отображение симплекса $\varDelta^k$ в любое пространство $\mathbb{R}^n$ определяется своими значениями на вершинах. Во-вторых, если диаметр симплекса $\varDelta^k$ (максимальное расстояние между его точками) равен r, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{k}{k+1}r$. Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Доказательство леммы 4.7. Прежде всего заметим, что отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, совпадающее с φ вне V, будет автоматически гомотопно φ относительно $U \setminus V$; достаточно взять «прямолинейную» гомотопию, при которой точка $\varphi(u)$ движется к точке $\psi(u)$ по отрезку, соединяющему $\varphi(u)$ с $\psi(u)$.

Теперь построим в шаре $B \subset \operatorname{int} D^k$ концентрические шары $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$ радиусов $r/5$, $2r/5$, $3r/5$, $4r/5$, где r — радиус шара B. Далее, покроем компактное подмножество $V = \varphi^{-1}(B) \subset U$ конечным числом n-мерных симплексов, содержащихся в U, и триангулируем объединение K этих симплексов (существование триангуляции — упражнение). Многократно применяя барицентрическое подразбиение, мы можем добиться того, чтобы для любого симплекса $\varDelta$ триангуляции выполнялось неравенство $\operatorname{diam} \varphi(\varDelta) < r/5$. Пусть K_1 — объединение симплексов построенной триангуляции множества K, φ-образы которых пересекаются с B_4. Тогда $B_4 \cap \varphi(U) \subset \varphi(K_1) \subset B$. Рассмотрим отображение $\varphi'\colon K_1 \to B$, совпадающее с φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\varphi|_{K_1}$ и φ' гомотопны — они соединяются прямолинейной гомотопией

$$\varphi_t\colon K_1 \to B, \quad \varphi_0 = \varphi|_{K_1}, \quad \varphi_1 = \varphi'.$$

Теперь «сошьём» отображения φ и φ' в отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$:

$$\psi(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{если } \varphi(u) \notin B_3, \\ \varphi'(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_2, \\ \varphi_{3-5r(u)}(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_3 \setminus B_2. \end{cases}$$

Здесь $r(u)$ — расстояние от u до центра шара B. Отображение ψ непрерывно, совпадает с φ на $U \setminus V$ и его образ пересекается с B_1 по конечному числу кусков n-мерных плоскостей, т.е. всего шара B_1 (а значит и всего шара B) не покрывает. ☐

Предложение 4.8. *Любое отображение $S^n \to S^k$ при $n < k$ гомотопно отображению в точку.*

Доказательство. Применим теорему о клеточной аппроксимации к клеточным разбиениям сфер с двумя клетками. При $n < k$ клеточное отображение есть отображение в точку. ☐

Задачи и упражнения.

4.9. Докажите, что топология, описываемая аксиомой (W) из определения клеточного пространства, является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

4.10. Докажите, что пространство, получаемое в результате приклеивания клетки к хаусдорфовому пространству, хаусдорфово.

4.11. Докажите, что любое компактное подмножество клеточного пространства принадлежит некоторому конечному подпространству.

4.12. Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом остове.

4.13. Докажите, что клеточное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно локально конечно.

4.14. Бесконечномерная сфера S^∞ стягиваема.

4.15. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

4.16. Определите кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ и докажите, что $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

4.17. Факторпространство S^2/S^0 гомотопически эквивалентно букету $S^1 \vee S^2$.

4.18. *Симметрическим квадратом* пространства X называется факторпространство $(X \times X)/{\sim}$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Докажите, что симметрический квадрат окружности S^1 гомеоморфен *листу Мёбиуса* (односторонней поверхности, получаемой склейкой одной пары противоположных сторон квадрата с обращением ориентации, т.е. $I^2/{\sim}$, где $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$.)

4.19. Докажите, что симметрический квадрат двумерной сферы S^2 гомеоморфен комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

4.20. Доказать, что свойство продолжения гомотопии не выполнено для пар (I, A), где $A = (0, 1]$ или $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.

4.21. Докажите, что если X хаусдорфово и $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$, то A замкнуто в X.

4.22. Рассмотрим клеточное разбиение окружности S^1 с двумя клетками. Убедитесь, что диагональное отображение $\Delta\colon S^1 \to S^1 \times S^1$, $t \mapsto (t, t)$, не является клеточным. Постройте явно его клеточную аппроксимацию.

4.23. Докажите, что объединение конечного числа как угодно пересекающихся симплексов в $\mathbb{R}^k$ обладает конечной триангуляцией.

5. Фундаментальная группа

Определение и основные свойства. Напомним, что петлёй в точке x_0 пространстве X называется отображение $\varphi\colon I \to X$ (путь), для которого $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Петли φ и φ' называются *гомотопными* (обозначение: $\varphi \sim \varphi'$), если существует такая гомотопия $\varphi_t\colon I \to X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Произведение* $\varphi\psi$ петель φ и ψ — это петля χ, у которой $\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и $\chi(t) = \psi(2t - 1)$ при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно.

Предложение 5.1. *Произведение петель (в точке x_0) обладает свойствами:*

а) *если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$,*

б) $(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$ *для любых петель φ, ψ, χ,* в) *если ε — постоянная петля, т.е. $\varepsilon(t) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ,*

г) *для петли φ определим петлю $\overline{\varphi}$ как $\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$; тогда $\varphi\overline{\varphi} \sim \overline{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.*

Доказательство. Проверим свойство б). Пусть $\xi = (\varphi\psi)\chi$ и $\xi' = \varphi(\psi\chi)$, т.е.

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(4t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ \psi(4t-1) & \text{при } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \chi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \xi'(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(4t-2) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ \chi(4t-3) & \text{при } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия ξ_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ между ξ и ξ' задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4}, \\ \psi(4t-1-s) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

(см. рис. 2).

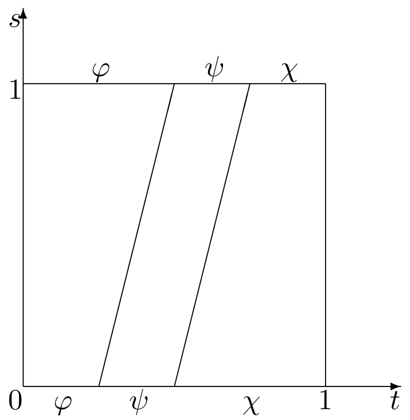


Рис. 2

Теперь проверим свойство г). Гомотопия между $\chi = \varphi\overline{\varphi}$ и ε задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\big(2t(1-s)\big) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi\big(2(1-t)(1-s)\big) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Другими словами, в момент s гомотопии мы проходим по петле φ от x_0 до точки $\varphi(1-s)$, а затем проходим по ней обратно до x_0.

Оставшиеся два свойства проверяются аналогично (упражнение). □

Мы будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентости петли φ относительно гомотопии петель. Из предложения 5.1 следует, что множество классов гомотопных петель в точке $x_0 \in X$ образует группу относительно произведения $[\varphi][\psi] = [\varphi\psi]$, с единицей $[\varepsilon]$ и обратным элементом $[\varphi]^{-1} = [\overline{\varphi}]$. Эта группа обозначается $\pi_1(X, x_0)$ и называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0.

Предложение 5.2. *Отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм групп $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. При отображении f_* петля $\varphi\colon I \to X$ переходит в петлю $f \circ \varphi\colon I \to Y$. Если петли φ и φ' гомотопны при помощи гомотопии $F\colon I \times I \to X$, то петли $f \circ \varphi$ и $f \circ \varphi'$ гомотопны при помощи гомотопии $f \circ F$. Мы имеем $f \circ (\varphi\psi) = (f \circ \varphi)(f \circ \psi)$, т.е. $f_*([\varphi][\psi]) = f_*([\varphi])f_*([\psi])$ и f_* — гомоморфизм.

Наконец, пусть $G\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между f и g (как отображениями пространств с отмеченными точками, т.е. $G(x_0, s) = y_0$ при $0 \leqslant 1 \leqslant s$). Тогда, для любой петли $\varphi\colon I \to X$, петли $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$ гомотопны: гомотопия задаётся формулой $H\colon I \times I \to Y$, $H(t, s) = G(\varphi(t), s)$. Следовательно, $f_* = g_*$. □

Следствие 5.3. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ является изоморфизмом.*

Предложение 5.4. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = 0$ *при* $n \geqslant 0$ *и* $\pi_1(S^n) = 0$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Тривиальность фундаментальной группы для $\mathbb{R}^n$ и D^n следует из того, что каждое из этих пространств стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке). Тривиальность фундаментальной группы сферы S^n при $n \geqslant 2$ вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации (см. предложение 4.8). □

Зависимость от отмеченной точки.

Теорема 5.5. *Если пространство X линейно связно, то $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ (изоморфны) для любых точек $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon I \to X$ — путь из x_0 в x_1, т.е. $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = x_1$. Для каждой петли φ в точке x_0 мы положим $f_\alpha(\varphi) = (\overline{\alpha}\varphi)\alpha$. Здесь $\overline{\alpha}$ — «обратный» путь, $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, а умножение путей определяется так же, как и умножение петель, при условии, что второй путь начинается там, где кончается первый. Тогда $f_\alpha(\varphi)$ — петля в точке x_1, причём её гомотопический класс зависит только от гомотопических классов петли φ и пути α (где в последнем случае подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами). Итак, мы получаем отображение $f_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, которое зависит только от гомотопического класса пути α.

Отображение f_α является гомоморфизмом, так как

$$f_\alpha([\varphi\psi]) = [\overline{\alpha}\varphi\psi\alpha] = [\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\psi\alpha] = f_\alpha([\varphi])f_\alpha([\psi]).$$

Кроме того, формула $f_\alpha^{-1}([\chi]) = [\alpha\chi\overline{\alpha}]$ задаёт обратный гомоморфизм, так что f — изоморфизм. □

Изоморфизм f_α зависит от гомотопического класса пути α. Если β — другой путь из x_0 в x_1, то $\gamma = \overline{\alpha}\beta$ — петля в точке x_1, и мы имеем

$$f_\beta([\varphi]) = [\overline{\beta}\varphi\beta] = [\overline{\beta}\alpha\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\beta] = [\overline{\beta}\alpha][\overline{\alpha}\varphi\alpha][\overline{\alpha}\beta] = [\gamma]^{-1}f_\alpha([\varphi])[\gamma].$$

В частности, если фундаментальная группа коммутативна, то изоморфизм f_α вообще не зависит от α. В этом случае мы можем говорить о фундаментальной группе, не фиксируя отмеченной точки. В общем случае о фундаментальной группе линейно связного пространства без отмеченной точки можно говорить только как об абстрактной группе (т.е. можно сказать, что она, например, конечна или нильпотентна, но нельзя фиксировать в ней определённый элемент).

Фундаментальная группа окружности.

Теорема 5.6. *Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Доказательство. Доказательство использует построение «универсального накрытия» над окружностью; этот метод будет развит и обобщён в следующем разделе.

Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Рассматривая прообразы, мы можем отождествлять точки окружности с вещественными числами, определёнными с точностью до слагаемых вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отмеченной точкой окружности мы будем считать $t = 0$. Таким образом, петлю $\varphi\colon I \to S^1$ можно считать многозначной функцией на отрезке I, значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого $2\pi k$ и значением которой в точках 0 и 1 служит само множество чисел вида $2\pi k$. У этой многозначной функции существует непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке I, значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений многозначной функции φ в этой точке. Такая однозначная функция $\widetilde{\varphi}$ будет определена единственным образом, если наложить условие $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. Для её построения мы выберем такое n, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$ точки $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ не диаметрально противоположны (нужно рассмотреть открытое покрытие отрезка I, состоящее из всевозможных множеств вида $\varphi^{-1}(A)$, где A — открытая полуокружность, и выделить конечное подпокрытие). Положив $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от 0 меньше, чем на π. Далее, при $\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от $\widetilde{\varphi}(\frac{1}{n})$ меньше, чем на π. И так далее.

По построению, $f(\widetilde{\varphi}(t)) = \varphi(t)$; в частности, $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, всякая непрерывная функция $\chi\colon I \to \mathbb{R}$, такая, что $\chi(1) = 2\pi k$, имеет вид $\widetilde{\varphi}$ для некоторой петли φ.

Теперь построим отображение $g\colon \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$, положив $g([\varphi]) = \widetilde{\varphi}(1)/2\pi$. Чтобы убедиться, что g — изоморфизм групп, заметим следующее. Во-первых, число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ не меняется при гомотопии, поскольку область возможных значений $\widetilde{\varphi}(1)$ дискретна. Таким образом, число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ зависит только от гомотопического класса $[\varphi]$ и отображение g определено корректно. Во-вторых, отображение g эпиморфно, т.е. любое число $k \in \mathbb{Z}$ лежит в его образе. Действительно, достаточно взять $\varphi = \psi_k$, где $\widetilde{\psi}_k(t) = 2\pi kt$. В-третьих, если $\widetilde{\varphi}_1(1) = \widetilde{\varphi}_2(1)$, то $\varphi_1 \sim \varphi_2$, а потому потому g мономорфно. Действительно, функции $\widetilde{\varphi}_1(t)$ и $\widetilde{\varphi}_2(t)$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (если $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$, то $\widetilde{\varphi} \sim \psi_k$; гомотопия задаётся формулой $\widetilde{\varphi}_s(t) = (1-s)\widetilde{\varphi}(t) + s2\pi kt$). Наконец, в-четвёртых, g является гомоморфизмом, так как $g([\varphi]) = g([\psi_k])$ для некоторого k, а $\psi_k\psi_l \sim \psi_{k+l}$, так как $\widetilde{\psi_k\psi_l}(1) = \widetilde{\psi}_{k+l}(1)$. $\square$

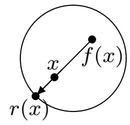
Предложение 5.7. *Окружность $S^1 \subset D^2$ не является ретрактом диска D^2.*

Доказательство. Допустим, существует ретракция $r\colon D^2 \to S^1$, т.е. композиция $S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$ есть тождественное отображение. Тогда, согласно предложению 5.2, композиция $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$ есть тождественный изоморфизм. Но это невозможно, так как $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = 0$. $\square$

В качестве следствия мы получаем классический результат, доказательство которого было одним из первых триумфов алгебраической топологии:

Теорема 5.8 (Брауэр). *Любое непрерывное отображение $f\colon D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку, т.е. точку x, для которой $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Тогда можно определить отображение $r\colon D^2 \to S^1$, взяв в качестве $r(x)$ точку окружности S^1, в которой луч, идущий из точки $f(x)$ в точку x, пересекает диск D^2. При этом, очевидно, $r(x) = x$, если $x \in S^1$, т.е. r — ретракция. Это противоречит предложению 5.7. □



Фундаментальная группа окружности используется в следующем топологическом доказательстве «основной теоремы алгебры»:

Теорема 5.9. *Любой непостоянный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{C}$ имеет комплексный корень.*

Доказательство. Можно считать, что многочлен имеет вид $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. Если $p(z)$ не имеет корней в $\mathbb{C}$, то для каждого вещественного $r \geqslant 0$ формула

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|} \tag{3}$$

задаёт петлю на единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ с началом и концом в точке 1. При изменении r получаем гомотопию петель с началом и концом в точке 1. Петля f_0 тривиальна, поэтому $[f_r] = [f_0] = 0$ в $\pi_1(S^1)$ для всех r. Теперь выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|, 1\}$. Тогда при $|z| = r$ получаем

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)|z^{n-1}| > |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|.$$

Отсюда следует, что многочлен $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)$ не имеет корней на окружности $|z| = r$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$. Заменив p на p_t в формуле (3), мы получим функцию $f_r(s,t)$. При изменении t от 1 до 0 эта функция задаёт гомотопию петли $f_r(s) = f_r(s,1)$ в петлю $f_r(s,0) = \psi_n(s) = e^{2\pi ins}$, которая представляет собой n-ю степень образующей группы $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Так как $[\psi_n] = [f_r] = 0$, мы получаем $n = 0$. Таким образом, единственные многочлены без корней в $\mathbb{C}$ — это константы. □

Задачи и упражнения.

5.10. Докажите, что если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$ (гомотопия петель), то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$.

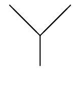
5.11. Докажите, что $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ, где ε — постоянная петля.

5.12. Если X и Y линейно связны, то $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

5.13. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то $\pi_1(X) = 0$.

5.14. Докажите, что если X — дискретное пространство, то $\pi_1(X) = 0$.

5.15. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$.

5.16. Докажите, любое непрерывное отображение пространства  (три отрезка с отождествлённым началом) в себя имеет неподвижную точку.

5.17. *Топологической группой* называется пространство G с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, и взятия обратного $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, являются непрерывными. Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1(G)$ топологической группы абелева.

6. Теорема ван Кампена

Теорема ван Кампена позволяет вычислять фундаментальную группу пространства, представленного в виде объединения своих подмножеств, по фундаментальным группам этих подмножеств.

Нам понадобится алгебраическое понятие свободного произведения групп.

Свободное произведение групп. Пусть дан конечный или бесконечный набор групп $\{G_\alpha\}$. *Свободное произведение* $*_\alpha G_\alpha$ (если групп конечное число, то используется обозначение $G_1 * G_2 * \ldots * G_k$) состоит из всех конечных слов $g_1 g_2 \ldots g_m$ произвольной длины $m \geqslant 0$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq e$, причём соседние буквы g_i и g_{i+1} лежат в разных группах, т.е. $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются *приведёнными*; неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе G_{α_i}, на их произведение в G_{α_i} и удалив тривиальные буквы. Слову разрешается быть пустым; пустое слово будет единице в группе $*_\alpha G_\alpha$. Произведение в группе $*_\alpha G_\alpha$ — это приставление, т.е. запись одного слова за другим: $(g_1 \ldots g_m)(h_1 \ldots h_n) = g_1 \ldots g_m h_1 \ldots h_n$, с последующим преобразованием в приведённое слово. Например, в произведении $(g_1 \ldots g_m)(g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})$ всё сокращается, и мы получаем единицу группы $*_\alpha G_\alpha$, т.е. пустое слово. Это даёт существование обратного элемента для любого слова. Нетривиальной является проверка ассоциативности произведения в $*_\alpha G_\alpha$:

Лемма 6.1. *Определённая выше операция умножения приведённых слов (приставление с последующим приведением) ассоциативна.*

Доказательство. Пусть W — множество приведённых слов $g_1 \ldots g_m$, включая пустое слово. Каждому элементу $g \in G_\alpha$ сопоставим отображение $L_g \colon W \to W$, задаваемое умножением слева, $L_g(g_1 \ldots g_m) = g g_1 \ldots g_m$, с последующим приведением. При этом мы имеем $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ для любых $g, g' \in G_\alpha$, т.е. $g(g'(g_1 \ldots g_m)) = (gg')(g_1 \ldots g_m)$; это следует из ассоциативности умножения в G_α. Из формулы $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ вытекает, что отображение L_g обратимо, с обратным отображением $L_{g^{-1}}$. Поэтому сопоставление $g \mapsto L_g$ задаёт гомоморфизм группы G_α в группу $P(W)$ всех перестановок множества W. Теперь определим отображение $L \colon W \to P(W)$ формулой $L(g_1 \ldots g_m) = L_{g_1} \ldots L_{g_m}$. Отображение L инъективно, так как перестановка $L(g_1 \ldots g_m)$ отображает пустое слово в $g_1 \ldots g_m$ и поэтому не является тождественной, если само слово $g_1 \ldots g_m$ не является пустым. Операция умножения в W при отображении L переходит в композицию в $P(W)$, так как $L_{gg'} = L_g L_{g'}$. Так как композиция перестановок ассоциативна, мы получаем, что умножение в W ассоциативно. □

Каждая группа G_α отождествляется с подгруппой свободного произведения $*_\alpha G_\alpha$, состоящей из пустого слова и однобуквенных слов $g \in G_\alpha$.

Любой набор гомоморфизмов $\varphi_\alpha \colon G_\alpha \to H$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi \colon *_\alpha G_\alpha \to H$. А именно, значение отображения φ на слове $g_1 \ldots g_m$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, равно $\varphi_{\alpha_1}(g_1) \ldots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Таким образом, свободное произведение является *копроизведением* в категории групп.

Например, включения $G \hookrightarrow G \times H$ и $H \hookrightarrow G \times H$ индуцируют эпиморфизм $G * H \to G \times H$.

Пример 6.2. Если каждая из групп G_α есть группа $\mathbb{Z}$, то свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ называется *свободной группой*. Набор, в который входит по одной образующей каждой из групп $G_\alpha = \mathbb{Z}$, называется *базисом* свободной группы, а число элементов базиса называется *рангом* свободной группы.

Всякую группу G можно получить как факторгруппу свободной группы. Для этого надо выбрать *набор образующих* группы G, т.е. такой набор элементов g_i, $i \in I$, что любой другой элемент $g \in G$ представляется в виде произведения элементов g_i и g_i^{-1} (например, в качестве набора образующих можно взять все элементы группы G). Тогда мы имеем эпиморфизм $f\colon F \to G$ из свободной группы F с множеством образующих I в G, переводящий i-ю образующую группы F в g_i. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой $H \subset F$; мы имеем $G \cong F/H$. Ниже мы покажем, что любая подгруппа свободной группы является свободной. Набор образующих h_j, $j \in J$, группы H называется *соотношениями* между образующими g_i. При гомоморфизме f элементы h_j переходят в произведения элементов g_i, g_i^{-1}, которые равны 1 в группе G. Часто используют запись

$$G = \langle\, g_i, i \in I \,|\, h_j, j \in J\,\rangle,$$

которая означает, что группа G *задана образующими* g_i *и соотношениями* h_j, т.е. представлена в виде факторгруппы свободной группы с образующими g_i по её нормальной подгруппе, порождённой элементами h_j.

Если G произвольная группа и g_i, $i \in I$, — набор её элементов, то *факторгруппой группы* G *по соотношениям* $g_i = 1$ называется факторгруппа группы G по нормальной подгруппе, порождённой элементами g_i, $i \in I$.

Абелианизацией группы G называется факторгруппа группы G по всевозможным соотношениям $ghg^{-1}h^{-1} = 1$, $g, h \in G$, т.е. факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всевозможными *коммутаторами* $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. Эта подгруппа называется *коммутантом* группы G и обозначается $[G,G]$. Абелианизация свободной группы $F = *_\alpha\mathbb{Z}$ — это свободная абелева группа $\oplus_\alpha\mathbb{Z}$, базисом которой служит то же самое множество образующих.

Формулировка и доказательство теоремы. Пусть пространство X представлено в виде объединения линейно связных открытых подмножеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$. Гомоморфизмы $i_\alpha\colon \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$, индуцированные включениями, продолжаются до гомоморфизма

$$\Phi\colon\ *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X).$$

Если

$$i_{\alpha\beta}\colon \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$$

— гомоморфизм, индуцированный включением $A_\alpha \cap A_\beta \to A_\alpha$, то $i_\alpha i_{\alpha\beta} = i_\beta i_{\beta\alpha}$, так как обе эти композиции индуцированы включением $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Таким образом, ядро гомоморфизма Φ содержит элементы вида $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, где $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

Теорема 6.3 (ван Кампен)**.** *Пусть X — объединение линейно связных открытых множеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$.*

а) *Если каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, то $\Phi\colon\ *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

б) *Если, кроме того, каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, то ядро гомоморфизма Φ — это нормальная подгруппа N, порождённая всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, а потому Φ индуцирует изоморфизм*

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

Доказательство. Докажем утверждение а), т.е. сюръективность отображения Φ. Мы утверждаем, что для данной петли $f\colon I \to X$ в отмеченной точке x_0 существует такое разбиение $0 < s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ отрезка I, что образ каждого отрезка $[s_{i-1}, s_i]$ при отображении f целиком содержится в одном из множеств A_α. Действительно, так как f непрерывно, каждая точка $s \in I$ имеет окрестность $U(s) \subset I$, для которой $f(U(s))$ лежит в одном из множеств A_α. В качестве $U(s)$ можно взять открытый интервал, замыкание которого отображается в одно из множеств A_α. Из компактности отрезка следует, что конечное число таких интервалов покрывает I. Тогда концы этих интервалов задают требуемое разбиение отрезка I.

Пусть $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$ и обозначим $f_i = f_{[s_{i-1},s_i]}$. Тогда $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$, где $f_i \subset A_i$. Так как каждое пространство $A_i \cap A_{i+1}$ линейно связно, мы можем соединить x_0 с $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ путём g_i в $A_i \cap A_{i+1}$. Теперь рассмотрим петлю

$$(f_1 \cdot \overline{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g}_3) \cdot \ldots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m),$$

гомотопную f. Эта петля является композицией петель, каждая из которых расположена в одном из множеств A_α; такие петли заключены в скобки. Следовательно, $[f]$ лежит в образе отображения Φ, а потому Φ сюръективно.

Теперь докажем утверждение б), т.е., что при описанном там условии ядро гомоморфизма Φ совпадает с N. Мы будем рассматривать *факторизации* элементов $[f] \in \pi_1(X)$, т.е. формальные разложения вида $[f] = [f_1] \ldots [f_k]$, где

- каждый множитель f_i — это петля с началом и концом в x_0, целиком содержащаяся в одном из множеств A_α, с гомотопическим классом $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$;
- петля f гомотопна $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ в X.

Таким образом, факторизация гомотопического класса $[f]$ — это слово в $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, возможно, приводимое, которое переходит в $[f]$ при отображении Φ. Утверждение а) показывает, что у каждого элемента $[f] \in \pi_1(X)$ есть факторизация.

Назовём две факторизации класса $[f]$ *эквивалентными*, если они связаны последовательностью преобразований следующих двух видов или обратных к ним:

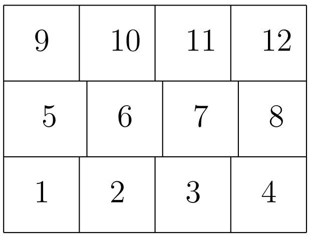
- соседние члены $[f_i][f_{i+1}]$ объединяются в один член $[f_i \cdot f_{i+1}]$, если $[f_i]$ и $[f_{i+1}]$ лежат в одной группе $\pi_1(A_\alpha)$;
- член $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ рассматривается как лежащий в группе $\pi_1(A_\beta)$, а не в $\pi_1(A_\alpha)$, если f_i — петля в $A_\alpha \cap A_\beta$.

Первое преобразование не изменяет элемент группы $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, задаваемый факторизацией. Второе преобразование не изменяет образ этого элемента в факторгруппе $Q = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$ согласно определению подгруппы N. Таким образом, эквивалентные факторизации дают один и тот же элемент группы Q.

Мы покажем, что любые две факторизации класса $[f]$ эквивалентны. Отсюда будет следовать, что отображение $Q \to \pi_1(X)$, индуцированное отображением Φ, инъективно. Тем самым утверждение б) будет доказано.

Пусть $[f_1] \ldots [f_k]$ и $[f'_1] \ldots [f'_\ell]$ — две факторизации класса $[f]$. Пусть $F\colon I \times I \to X$ — гомотопия, связывающая $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ с $f'_1 \cdot \ldots \cdot f'_\ell$. Существуют такие разбиения

$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, что образ каждого из прямоугольников $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ при отображении F лежит в одном множестве A_α, которое мы обозначим A_{ij}. Эти разбиения можно получить, покрыв $I \times I$ конечным числом прямоугольников $[a, b] \times [c, d]$, каждый из которых отображается в одно множество A_α, используя рассуждения с компактностью, а затем разделив $I \times I$ всеми горизонтальными и вертикальными прямыми, содержащими стороны этих прямоугольников. Можно считать, что s-разбиение является подразбиением тех разбиений, которые дают произведения $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ и $f'_1 \cdot \ldots \cdot f'_\ell$. Так как F отображает окрестность прямоугольника R_{ij} в A_{ij}, мы можем пошевелить вертикальные стороны прямоугольников R_{ij} так, чтобы каждая точка квадрата $I \times I$ принадлежала не более чем трём прямоугольникам R_{ij}. Можно считать, что есть по крайней мере три ряда прямоугольников, поэтому мы можем шевелить только прямоугольники в промежуточных рядах, оставляя верхний и нижний ряд без изменений. Занумеруем теперь прямоугольники $R_1, R_2, \ldots, R_{mn}$ как показано на рисунке.



Если γ — путь в $I \times I$, идущий из точки левой стороны в точку правой стороны, то $F|_\gamma$ является петлёй с началом и концом в отмеченной точке x_0, так как F отображает левую и правую стороны квадрата $I \times I$ в x_0. Пусть γ_r — путь, отделяющий первые r прямоугольников $R_1, \ldots, R_r$ от остальных прямоугольников. Тогда γ_0 — нижняя сторона квадрата $I \times I$, а γ_{mn} — его верхняя сторона. Будем переходить от γ_r к γ_{r+1}, протаскивая этот путь по прямоугольнику R_{r+1}.

Будем называть вершины прямоугольников R_r *вершинами*. Для каждой вершины v, для которой $F(v) \neq x_0$, рассмотрим путь g_v из x_0 в $F(v)$. Мы можем выбрать путь g_v так, чтобы он принадлежал пересечению двух или трёх множеств A_{ij} в соответствии с тем, сколько прямоугольников R_r содержат вершину v, так как мы предполагаем, что двойные и тройные пересечения множеств A_{ij} линейно связны. Вставим в $F|_{\gamma_r}$ пути вида $\overline{g}_v g_v$ в последовательных вершинах v, как при доказательстве сюръективности отображения Φ. В результате мы получим факторизацию класса $[F|_{\gamma_r}]$, рассматривая петлю, соответствующую горизонтальному или вертикальному отрезку между соседними вершинами, как лежащую в A_{ij} для любого из прямоугольников R_s, содержащих этот отрезок. Если мы выберем другой из этих прямоугольников R_s, то факторизация класса $[F|_{\gamma_r}]$ заменится на эквивалентную факторизацию. Более того, факторизации, соответствующие последовательным путям γ_r и γ_{r+1}, эквивалентны, так как протаскивание пути γ_r по прямоугольнику R_{r+1}, при котором получается путь γ_{r+1}, заменяет $F|_{\gamma_r}$ на $F|_{\gamma_{r+1}}$ посредством гомотопии в пределах множества A_{ij}, соответствующего R_{r+1}, и мы можем выбрать такое множество A_{ij} для всех отрезков путей γ_r и γ_{r+1}, лежащих в R_{r+1}.

Мы можем добиться, чтобы факторизация, соответствующая γ_0, была эквивалентна факторизации $[f_1] \ldots [f_k]$, выбирая путь g_v для каждой вершины v вдоль нижней стороны квадрата $I \times I$ так, чтобы он принадлежал не только двум множествам A_{ij}, соответствующим прямоугольнику R_s, содержащему v, но также принадлежал и множеству A_α, соответствующему пути f_i, в области определения которого лежит точка v. В случае, когда v — общий конец областей определения двух последовательных путей f_i, выполняется равенство $F(v) = x_0$, т.е. не нужно выбирать путь

g_v. Аналогично мы можем считать, что факторизация, соответствующая последнему пути γ_{mn}, эквивалентна $[f_1'] \dots [f_\ell']$. Так как факторизации, соответствующие всем путям γ_r, эквивалентны, мы получаем, что факторизации $[f_1] \dots [f_k]$ и $[f_1'] \dots [f_\ell']$ эквивалентны. □

Сформулируем отдельно частный случай теоремы ван Кампена, когда покрытие пространства X состоит всего из двух множеств, $X = A \cup B$. В этом случае условие пункта б) теоремы выполнено автоматически. Кроме того, не нужно требовать, чтобы каждое из множеств A и B содержало отмеченную точку, так как можно выбрать новую отмеченную точку в пересечении $A \cap B$:

Следствие 6.4. *Пусть $X = A \cup B$, где множества A и B, а также их пересечение $A \cap B$, открыты и линейно связны. Тогда*

$$\pi_1(X) \cong \big(\pi_1(A) * \pi_1(B)\big)/N,$$

где N — нормальная подгруппа, порождённая элементами вида $i_{AB}(\omega)i_{BA}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A \cap B)$, а $i_{AB} \colon \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ и $i_{BA} \colon \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями $A \cap B \hookrightarrow A$ и $A \cap B \hookrightarrow B$.

Группа $\big(\pi_1(A) * \pi_1(B)\big)/N$ называется *амальгамированным произведением* групп $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ над $\pi_1(A \cap B)$, см. упражнение 6.8.

Замечание. В случае, когда покрытие пространства X состоит из более двух множеств A_α, условие того, что каждое A_α содержит отмеченную точку x_0, существенно. Это условие влечёт, что все тройные пересечения непусты.

В качестве ещё одного следствия мы получаем описание фундаментальной группы букета $\bigvee_\alpha X_\alpha$ пространств X_α с отмеченными точками x_α:

Следствие 6.5. *Если каждая точка $x_\alpha \in X_\alpha$ является деформационным ретрактом своей окрестности $U_\alpha \subset X_\alpha$, то имеет место изоморфизм*

$$\pi_1\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big) \cong \mathop{*}_\alpha \pi_1(X_\alpha).$$

В частности, для букета окружностей $\bigvee_\alpha S^1$ группа $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1)$ свободная.

Доказательство. Каждое пространство X_α является деформационным ретрактом своей окрестности $A_\alpha = X_\alpha \vee \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta \subset \bigvee_\alpha X_\alpha$. Пересечение двух и более различных множеств A_α — это пространство $\bigvee_\alpha U_\alpha$, которое стягиваемо. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что $\Phi\colon\ *_\alpha\, \pi_1(X_\alpha) \to \pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ — изоморфизм. □

Задачи и упражнения.

6.6. Докажите, что абелианизацией группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ является $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите ядро гомоморфизма абелианизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

6.7. Покажите, что гомоморфизм $\Phi\colon\ *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связны.

6.8. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1 \colon H \to G_1$ и $f_2 \colon H \to G_2$. Определим *амальгамированное произведение* $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.

Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 *_H G_2, \end{tikzcd}$$

т.е. обладает соответствующим универсальным свойством, см. (2).

6.9. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"'] \\ A_2 \arrow[r, "j_2"] & X, \end{tikzcd}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированнго произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B) \arrow[r, "(i_1)_*"] \arrow[d, "(i_2)_*"] & \pi_1(A_1) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "(j_1)_*"] & \\ \pi_1(A_2) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(j_2)_*"'] & \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h\colon \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \to \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом (мы имеем $X = A_1 \cup_B A_2$). Таким образом, функтор π_1 переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

6.10. Найти фундаментальную группу дополнения окружности в $\mathbb{R}^3$.

6.11. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$ не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

6.12. Найти фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$.

7. Фундаментальная группа клеточного пространства

Здесь мы научимся задавать фундаментальные группы клеточных пространств образующими и соотношениями. Это позволит нам явно вычислять фундаментальную группу, задав клеточную структуру.

Вначале выведем ещё одно важное следствие теоремы о клеточной аппроксимации:

Предложение 7.1. *Всякое линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.*

Доказательство. Выберем в нашем линейно связном пространстве X нульмерную клетку e_0 и соединим с ней остальные нульмерные клетки путями (пути могут пересекаться). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном остове X^1. Пусть γ_i — путь, соединяющий 0-мерную клетку e_0 с нульмерной клеткой e_i. Для каждого i приклеим к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути γ_i. Получим новое клеточное пространство $\widetilde{X}$, которое содержит X и, кроме того, клетки e_i^1, e_i^2 (верхние полуокружности и внутренности приклеенных дисков).

Ясно, что X есть деформационный ретракт в $\widetilde{X}$: каждый приклеенный диск можно стянуть на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыканий клеток e_i^1 (верхних полуокружностей). Очевидно, Y стягиваемо. Следовательно, $\widetilde{X}/Y \simeq \widetilde{X} \simeq X$. Но у $\widetilde{X}/Y$ всего одна нульмерная клетка. $\square$

Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0. Отображение $\varphi\colon S^1 \to X$, переводящее отмеченную точку 0 окружности в x_0, можно рассматривать как петлю в (X, x_0), и поэтому оно задаёт элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Если же отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ переводит 0 в какую-то другую точку $\varphi(0)$, то мы получаем элемент группы $\pi_1(X, \varphi(0))$, которая связана с $\pi_1(X, x_0)$ неканоническим изоморфизмом (см. обсуждение после теоремы 5.5). Таким образом, произвольное отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ задаёт элемент группы $\pi_1(X, x_0)$, заданный с точностью до сопряжения.

Пусть X — клеточное пространство с единственной 0-мерной клеткой $e^0 = x_0$, одномерными клетками e_i^1, $i \in I$, и двумерными клетками e_j^2, $j \in J$. Характеристические отображения $D^2 \to X$ двумерных клеток определяют отображения приклеивания $f_j\colon S^1 \to X^1$ (см. раздел 4), которые задают элементы $\beta_j \in \pi_1(X^1)$ с точностью до сопряжения. При этом X^1 — это букет окружностей $\bar{e}_i^1$ и группа $\pi_1(X^1, x_0)$ есть свободная группа с множеством образующих I в силу следствия 6.5.

Теорема 7.2. *Группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна факторгруппе свободной группы $\pi_1(X^1, x_0)$ с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам, по соотношениям $\beta_j = 1$, $j \in J$, отвечающим 2-мерным клеткам.*

Доказательство. Проведём доказательство по индукции по приклеиваемым клеткам размерности $n \geqslant 2$. Если таких клеток нет, то пространство $X = X^1$ — букет сфер и $\pi_1(X)$ — свободная группа с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам.

Пусть $X' = X \cup_f D^n$ получено из X приклеиванием n-мерной клетки e^n при помощи отображения $f\colon S^{n-1} \to Y$, т.е. мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Внутри клетки e^n выберем точку y. Пусть $A = X' \setminus \{y\}$ и $B = X' \setminus X$. Тогда A деформационно ретрагируется на в X, а B стягиваемо. Теперь применим теорему ван Кампена к покрытию $X = A \cup B$. Так как $\pi_1(A) = \pi_1(X)$, а $\pi_1(B) = 0$, мы получаем, что $\pi_1(X')$ изоморфно факторгруппе группы $\pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(X)$ по нормальной подгруппе, порождённой образом отображения $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$.

Далее сначала рассмотрим случай приклеивания двумерной клетки e^2, т.е. $n = 2$. В этом случае $A \cap B$ деформационно ретрагируется на окружность в $e^2 \setminus \{y\}$, и мы получаем, что образ группы $\pi_1(A \cap B)$ в $\pi_1(A)$ — это нормальная подгруппа, порождённая классом петли, задаваемой отображением $f\colon S^1 \to X^1$. Таким образом, при приклеивании новой двумерной клетки e^2 к соотношениям в группе $\pi_1(X) = \pi_1(A)$ добавляется ещё одно соотношение $\beta = 1$, отвечающее этой двумерной клетке.

После того как мы приклеили все двумерные клетки, дальнейшее приклеивание клеток e^n размерности $n \geqslant 3$ не меняет группу $\pi_1(X)$. Это следует из того, что $A \cap B$ деформационно ретрагируется на $(n-1)$-мерную сферу в $e^n \setminus \{y\}$; таким образом, $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^{n-1}) = 0$ при $n \geqslant 3$ согласно предложению 5.4. $\square$

Пример 7.3. Вычислим фундаментальную группу ориентируемой поверхности S_g рода g (сферы с g ручками). Она имеет клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$ и одной двумерной клеткой, см. пример 4.1.6 и рис. 1 г). Одномерный остов — это букет $2g$ окружностей; его фундаментальная группа — свободная группа F_{2g} с образующими $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$. Двумерная клетка приклеена по петле, заданной произведением коммутаторов этих образующих. Поэтому $\pi_1(S_g)$ — факторгруппа свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \,|\, a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdot a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \,\rangle.$$

В частности, фундаментальная группа тора $T^2 = S_1$ изоморфна факторгруппе группы F_2 по соотношению $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т.е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это, конечно, следует из простой формулы $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ (см. упражнение 5.12).

Предложение 7.4. *Поверхность S_g не гомеоморфна и даже не гомотопически эквивалентна поверхности $S_{g'}$, если $g \neq g'$.*

Доказательство. Абелианизация группы $\pi_1(S_g)$ — это $\mathbb{Z}^{2g}$ (свободная абелева группа с $2g$ образующими). Если $S_g \simeq S_{g'}$, то $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{g'})$, а значит и абелианизации этих групп изоморфны, что влечёт равенство $g = g'$. $\square$

Пример 7.5. Используя клеточное разбиение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (см. пример 4.1.6 и рис. 1 б)), мы получаем, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbb{Z}$ (свободной группы с одной образующей a) по одному соотношению $a^2 = 1$. Таким образом, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle\, a \,|\, a^2 \,\rangle = \mathbb{Z}_2$.

Отсюда следует, что проективная плоскость не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g.

Задачи и упражнения.

7.6. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

7.7. Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна K, используя клеточное разбиение из примера 4.1.6 и рис. 1 в). Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2c_2^2 \,\rangle.$$

Опишите абелианизацию группы $\pi_1(K)$ и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g.

7.8. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками (см. пример 4.1.6). Докажите, что фундаментальная группа поверхности P_g или K_g изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими $c_1, \ldots, c_k$ по одному соотношению $c_1^2 \cdot \ldots \cdot c_k^2 = 1$, где $k = 2g + 1$ для P_g и $k = 2g + 2$ для K_g. Докажите, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.

7.9. Вычислите фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

7.10. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

8. Накрытия

Определение и примеры. Линейно связное пространство $\widetilde{X}$ называется *накрывающим пространством* для линейно связного пространства X, если задано отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$, такое, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \varGamma$, где $\varGamma$ — дискретное множество, причём диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \varGamma \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Другими словами, $p^{-1}(U)$ является объединением непересекающихся открытых множеств в $\widetilde{X}$, каждое из которых p гомеоморфно отображает на U. Отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ называется *накрытием*.

Пример 8.1.

1. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Это накрытие использовалось при доказательстве изоморфизма $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (теорема 5.6).

2. $p\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$, где окружность S^1 задана как $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

3. Отображение $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$ (см. пример 4.1.3).

Ясно, что если $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ и $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ — накрытия, то и $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ — накрытие. В частности, квадрат накрытия из примера 8.1.1 даёт накрытие $\mathbb{R}^2 \to T^2$ тора $T^2 = S^1 \times S^1$ плоскостью.

Свойство поднятия гомотопии. Говорят, что отображение $p\colon Y \to X$ обладает *свойством поднятия гомотопии* (covering homotopy property, CHP) по отношению к пространству Z, если для любого отображения $f\colon Z \to Y$ и гомотопии $F\colon Z \times I \to X$, такой, что $p \circ f = F_0$, существует *накрывающая* гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to Y$, для которой $\widetilde{F}_0 = f$ и $p \circ \widetilde{F} = F$. Это описывается следующей диаграммой:

(4)
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & X \end{tikzcd}$$

где i_0 — вложение $z \mapsto (z, 0)$.

Ниже мы покажем, что накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладают свойством поднятия гомотопии, причём накрывающая гомотопия единственна. При $Z = pt$ свойство поднятия гомотопии (4) превращается в *свойство поднятия путей*:

Лемма 8.2. *Для любого пути $\gamma\colon I \to X$ и любой точки $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, такой, что $p(\widetilde{x}) = \gamma(0)$, существует единственный путь $\widetilde{\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$, такой, что $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Доказательство. Окрестности из определения накрытия мы будем называть *элементарными.* Для каждого $t \in I$ найдём элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $\gamma(t)$. В силу компактности отрезка I из этих окрестностей можно выбрать последовательность $U_1, \dots, U_N$ таким образом, что $U_i \supset \gamma(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфен дискретному набору таких же окрестностей. Пусть $\widetilde{U}_1$ — та из них, которая содержит точку $\widetilde{x}$. Определим $\widetilde{\gamma}\colon [0, t_2] \to \widetilde{U}_1$ как прообраз куска $\gamma|_{[0,t_2]}$ пути γ от $0 = t_1$ до t_2, который попадает в U_1. Затем проделаем то же самое с окрестностью U_2, точкой $\widetilde{\gamma}(t_2)$ и куском пути $\gamma|_{[t_2,t_3]}$ и т.д. Так как число окрестностей конечно, то процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, то путь с нужными свойствами существует только один. $\square$

Теорема 8.3 (о поднятии гомотопии)**.** *Накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любому пространству Z, причём накрывающая гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to \widetilde{X}$ (см. (4)) единственна.*

Доказательство. Пусть даны отображение $f\colon Z \to \widetilde{X}$ и гомотопия $F\colon Z \times I \to X$. Перейдя к сопряжённому, получаем отображение $F'\colon Z \to X^I$, переводящее точку $z \in Z$ в путь $t \mapsto F(z,t)$ в пространстве X. В силу леммы 8.2, этот путь единственным образом поднимается до пути в $\widetilde{X}$, который начинается в точке $f(z) \in \widetilde{X}$. Таким образом, существует единственное отображение $\widetilde{F}'\colon Z \to \widetilde{X}^I$, входящее в диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} & \widetilde{X}^I \arrow[l, "p_0"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}'"] \arrow[r, "F'"] & X^I,
\end{tikzcd}$$

где p_0 — отображение, сопоставляющее пути его начальную точку. Переходя обратно от сопряжённых отображений к исходным, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & X,
\end{tikzcd}$$

которая и выражает требуемое свойство поднятия гомотопии с единственной накрывающей гомотопией. $\square$

Накрытия и фундаментальная группа.

Теорема 8.4. *Отображение*

$$p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

индуцированное накрытием $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$, является мономорфизмом. Подгруппа $p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ в $\pi_1(X,x_0)$ состоит из гомотопических классов петель в X с началом в x_0, поднятия которых в $\widetilde{X}$ с началом в $\widetilde{x}_0$ являются петлями.

Доказательство. Надо доказать, что если петля $\widetilde{\varphi}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом $\widetilde{x}_0$ проектируется в петлю $\varphi\colon I \to X$, гомотопную нулю (т.е. гомотопную постоянной петле), то и сама петля $\widetilde{\varphi}$ гомотопна нулю. Фиксируем гомотопию $\varphi_t\colon I \to X$, такую, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $\varphi_1(I) = x_0$. По теореме о поднятии гомотопии существует гомотопия $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$, такая, что $\widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}$ и $p \circ \widetilde{\varphi}_t = \varphi_t$. Но так как полный прообраз точки x_0 дискретен в $\widetilde{X}$, мы имеем $\widetilde{\varphi}_t(0) = \widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{\varphi}_t(1) = \widetilde{\varphi}(1) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{\varphi}_1(I) = \widetilde{x}_0$. Таким образом, петля $\widetilde{\varphi}$ также гомотопна нулю.

Докажем теперь второе утверждение. Петли с началом и концом в x_0, поднимающиеся до петель с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, очевидно, представляют элементы образа отображения $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to \pi_1(X,x_0)$. Наоборот, петля, представляющая элемент образа отображения p_*, гомотопна петле, у которой есть такое поднятие, поэтому согласно свойству поднятия гомотопии и у неё самой должно быть такое поднятие. $\square$

Напомним, что *индексом* подгруппы $H \subset G$ называется называется мощность множества смежных классов Hg, $g \in G$. Если H — нормальная подгруппа, то индекс H в G — это порядок фактор-группы G/H.

Предложение 8.5. *Число точек в прообразе $p^{-1}(x_0)$ при накрытии $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ равно индексу подгруппы $p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ в $\pi_1(X,x_0)$.*

Доказательство. Пусть $H = p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$. Для петли φ в X с началом и концом в x_0, пусть $\widetilde{\varphi}$ — её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в точке $\widetilde{x}_0$. Произведение $\psi \cdot \varphi$, где $[\psi] \in H$ имеет поднятие $\widetilde{\psi} \cdot \widetilde{\varphi}$, заканчивающееся в то же точке, что и $\widetilde{\varphi}$, так как $\widetilde{\psi}$ — петля. Поэтому мы можем определить отображение Φ из множества смежных классов $\{H[\varphi],\ [\varphi] \in \pi_1(X,x_0)\}$ в $p^{-1}(x_0)$, переводящее $H[\varphi]$ в $\widetilde{\varphi}(1)$. Из линейной связности пространства $\widetilde{X}$ следует, что Φ сюръективно, так как точку $\widetilde{x}_0$ можно соединить с любой точкой в $p^{-1}(x_0)$ путём $\widetilde{\varphi}$, проектирующимся в петлю φ с началом и концом в x_0. Кроме того, Φ инъективно: из равенства $\Phi(H[\varphi]) = \Phi(H[\varphi'])$ следует, что $\varphi \cdot \overline{\varphi}'$ поднимается до петли в $\widetilde{X}$ с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, поэтому $[\varphi][\varphi']^{-1} \in H$, а значит, $H[\varphi] = H[\varphi']$. $\square$

Теорема о поднятии отображений. Выясним, как обстоит дело с поднятием произвольных отображений, а не только гомотопий.

Пространство X называется *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x найдётся линейно связная окрестность $V \subset U$.

Теорема 8.6 (о поднятии отображения). *Пусть $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ — накрытие и $f\colon (Z,z_0) \to (X,x_0)$ — отображение из линейно связного пространства Z с отмеченной точкой z_0.*

а) *Существует не более одного отображения $\widetilde{f}\colon (Z,z_0) \to (\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$, такого, что $p \circ \widetilde{f} = f$ (поднятия).*

б) *Если Z локально линейно связно, то для существования поднятия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение*

$$f_*\pi_1(Z,z_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0).$$

Доказательство. Докажем а). Пусть $\widetilde{f}$ и $\widetilde{f}'$ — два поднятия. Если $z \in Z$ — произвольная точка и $\gamma\colon I \to Z$ — путь из z_0 в z, то пути $\widetilde{f}\gamma$ и $\widetilde{f}'\gamma$ накрывают путь $f\gamma$ и имеют общее начало, вследствие чего они совпадают. Поэтому $\widetilde{f}(z) = (\widetilde{f}\gamma)(1) = (\widetilde{f}'\gamma)(1) = \widetilde{f}'(z)$.

Теперь докажем б). Мы можем попытаться построить отображение $\widetilde{f}$ следующим образом. Пусть $z \in Z$. Возьмём путь $\gamma\colon I \to Z$ из z_0 в z и для пути $f\gamma\colon I \to X$ построим поднятие $\widetilde{f\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом в точке $\widetilde{x}_0$. Затем положим $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f\gamma}(1)$. Для того, чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $\gamma'\colon I \to Z$ из z_0 в z, соответствующий путь $\widetilde{f\gamma'}$ заканчивался в той же точке, что и $\widetilde{f\gamma}$, т.е. чтобы петля $f \circ (\gamma\overline{\gamma}')$ накрывалась в $\widetilde{X}$ петлёй. Это равносильно условию, указанному в части б) теоремы.

Кроме того, необходимо проверить непрерывность отображения $\widetilde{f}$. Пусть $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ — окрестность точки $\widetilde{f}(z)$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, мы можем считать, что $p\colon \widetilde{U} \to U$ — гомеоморфизм на некоторую окрестность U точки $f(z) \subset X$. Выберем линейно связную окрестность V точки z, для которой $f(V) \subset U$. В качестве путей из z_0 в разные точки $z' \subset V$ можно взять фиксированный путь γ из z_0 в z, который продолжается разными путями η в V из точки z в z'. Тогда пути $(f\gamma) \cdot (f\eta)$ в X имеют поднятия $(\widetilde{f\gamma}) \cdot (\widetilde{f\eta})$, где $\widetilde{f\eta} = p^{-1}(f\eta)$ и $p^{-1}\colon U \to \widetilde{U}$ — отображение, обратное к $p\colon \widetilde{U} \to U$. Таким образом, $\widetilde{f}(V) \subset \widetilde{U}$, поэтому отображение $\widetilde{f}$ непрерывно в точке z. $\square$

Универсальное накрытие. Так как отображение $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, возникает вопрос, любая ли подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$ реализуется в виде $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ для некоторого накрытия $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен. Вначале рассмотрим вопрос о реализуемости тривиальной подгруппы $\{e\}$. Так как p_* — мономорфизм, это сводится в вопросу о существовании односвязного накрывающего пространства для X.

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует меньшая окрестность $U \subset V$, такая, что индуцированное включением отображение $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ тривиально. Открытые множества U с этим свойством образуют базу топологии полулокально односвязного пространства X.

Теорема 8.7. *Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$.*

Доказательство. Пусть $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие с односвязным $\widetilde{X}$. Тогда любую точку $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ можно соединить путём с $\widetilde{x}_0$, и этот путь единствен с точностью до гомотопии. Поэтому $\widetilde{X}$ можно отождествить с множеством гомотопических классов путей в $\widetilde{X}$ с фиксированным началом $\widetilde{x}_0$. С другой стороны, такие гомотопические классы — это в точности гомотопические классы путей в X с фиксированным началом x_0, в силу единственности поднятия путей. Мы приходим к следующему определению:

$$\widetilde{X} = \{[\gamma]\colon \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\},$$

где, как обычно, $[\gamma]$ обозначает гомотопический класс пути γ относительно гомотопий, которые оставляют начало и конец пути неподвижными. Мы имеем отображение

$$p\colon \widetilde{X} \to X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Так как X линейно связно, конец $\gamma(1)$ может быть любой точкой в X, поэтому отображение p сюръективно. Ниже мы введём топологию на $\widetilde{X}$, докажем, что $p\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие, а $\widetilde{X}$ односвязно.

Рассмотрим $\mathcal{U}$ — набор всех таких линейно связных открытых подмножеств $U \subset X$, что отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. Так как X локально линейно связно и полулокально односвязно, $\mathcal{U}$ — база топологии на X (т.е. любое открытое множество из X представляется в виде объединения множеств из $\mathcal{U}$).

Пусть даны $U \subset \mathcal{U}$ и путь γ в X из точки x_0 в некоторую точку в U. Положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]\colon \eta \text{ — путь в } U, \text{ для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Отображение $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ сюръективно, так как U линейно связно, и инъективно, так как все пути η из $\gamma(1)$ в $x \in U$ гомотопны в X, поскольку отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. Имеется следующее свойство:

(*) $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$, если $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$. Действительно, если $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, то элементы множества $U_{\gamma'}$ имеют вид $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma]}$. Аналогично, элементы множества U_γ имеют вид $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \overline{\eta} \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \overline{\eta} \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma']}$.

Мы зададим топологию на $\widetilde{X}$, взяв в качестве базы набор множеств $U_{[\gamma]}$. Чтобы проверить, что этот набор можно взять в качестве базы, нужно доказать, что в любом пересечении $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ содержится множество такого вида. Пусть $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ и $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Пусть $W \in \mathcal{U}$ содержится в $U \cap V$ и содержит $\gamma''(1)$. Тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$.

Взаимно однозначное отображение $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ является гомеоморфизмом, так как оно задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']}$ и множествами $V \in \mathcal{U}$, содержащимися в U. Следовательно, отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ непрерывно. Оно является накрытием, так как для фиксированного $U \in \mathcal{U}$ множества $U_{[\gamma]}$ для разных $[\gamma]$ задают разбиение $p^{-1}(U)$ на непересекающиеся множества, потому что если $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, то $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ по свойству $(*)$.

Остаётся показать, что $\widetilde{X}$ односвязно. Для данной точки $[\gamma] \in \widetilde{X}$ пусть γ_t — путь в X, который совпадает с γ на $[0, t]$ и остаётся в одной и той же точке $\gamma(t)$ на $[t, 1]$. Тогда отображение $t \mapsto [\gamma_t]$ есть путь в $\widetilde{X}$, который является поднятием пути γ, начитается в $[x_0]$ (гомотопическом классе постоянного пути в x_0) и заканчивается в $[\gamma]$. Так как $[\gamma] \in \widetilde{X}$ — произвольная точка, это показывает, что $\widetilde{X}$ линейно связно. Чтобы проверить, что $\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$, достаточно показать, что $p_*\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$. Элементы в образе гомоморфизма p_* представлены петлями γ в (X, x_0), которые поднимаются до петель в $(\widetilde{X}, [x_0])$. Мы уже отметили, что путь $t \mapsto [\gamma_t]$ является поднятием пути γ и начинается в $[x_0]$. То, что этот путь является петлёй, означает, что $[\gamma] = [x_0]$. Следовательно, петля γ стягиваема и образ гомоморфизма p_* тривиален. □

Предложение 8.8. *Пусть $p\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие с односвязным $\widetilde{X}$. Тогда для любого другого накрытия $q\colon Y \to X$ имеется накрытие $r\colon \widetilde{X} \to Y$, такое, что $q \circ r = p$.*

Доказательство. Это следует из теоремы 8.6 (о поднятии отображения). □

Благодаря этому свойству накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$ называется *универсальным* накрытием над X. Из теоремы классификации из следующего подраздела следует, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Пример 8.9. Отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$ из примера 4.1.3 является универсальным накрытием при $n \geqslant 2$. Так как это накрытие двулистно, из предложения 8.5 следует, что тривиальная подгруппа имеет индекс 2 в $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$.

Классификация накрытий. Два накрытия $p_1\colon Y_1 \to X$ и $p_2\colon Y_2 \to X$ *изоморфны*, если существует такой гомеоморфизм $f\colon Y_1 \to Y_2$, что $p_1 = p_2 f$.

Теорема 8.10. *Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных накрытий $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ (с сохранением отмеченной точки) и множеством подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$. При этом соответствии накрытие p переходит в подгруппу $p_*\pi_1(Y, y_0)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любой подгруппы $H \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, что $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Зададим следующее отношение эквивалентности на односвязном (универсальном) накрывающем пространстве $\widetilde{X}$, введённом в теореме 8.7: $[\gamma] \sim [\gamma']$, если $\gamma(1) = \gamma'(1)$ и $[\gamma][\gamma']^{-1} \in H$. Положим $Y = \widetilde{X}/\sim$. Заметим, что если $\gamma(1) = \gamma'(1)$, то $[\gamma] \sim [\gamma']$ тогда и только тогда, когда $[\gamma\eta] \sim [\gamma'\eta]$. Это означает, что если какие-либо две точки в базовых открытых множествах $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ отождествляются в Y, то эти открытые множества отождествляются целиком. Следовательно, проекция $p\colon \widetilde{X}/\sim\, = Y \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, является накрытием.

Возьмём в качестве отмеченной точки $y_0 \in Y$ класс эквивалентности $[x_0]$ постоянного пути в точке x_0. Тогда $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Действительно, для петли γ в (X, x_0) её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в $[x_0]$, заканчивается в $[\gamma]$, поэтому образ этого поднятого пути в $Y = \widetilde{X}/\sim$ будет петлёй тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, а это эквивалентно тому, что $[\gamma] \in H$.

Теперь докажем, что два накрытия $p_1\colon (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ и $p_2\colon (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$, для которых $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$, изоморфны. Действительно, по теореме о поднятии отображения мы можем поднять p_1 до отображения $\widetilde{p}_1\colon (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$, для которого $p_2\widetilde{p}_1 = p_1$. Аналогично получаем $\widetilde{p}_2\colon (Y_2, y_2) \to (Y_1, y_1)$, для которого $p_1\widetilde{p}_2 = p_2$. Тогда согласно единственности поднятия мы имеем $\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2 = \mathrm{id}$ и $\widetilde{p}_2\widetilde{p}_1 = \mathrm{id}$. Таким образом, $\widetilde{p}_1$ и $\widetilde{p}_2$ — обратные изоморфизмы. □

Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера. В качестве приложения теории накрытий мы докажем важную алгебраическую теорему о том, что подгруппа свободной группы свободна. Доказательство будет использовать ряд фактов из теории графов, которые мы легко докажем, используя результаты о клеточных пространствах.

Графом называется одномерное клеточное пространство X. Нульмерные клетки называются *вершинами* графа X, а одномерные клетки — его *рёбрами*. *Подграф* графа X — это клеточное подпространство $Y \subset X$ (замкнутое подмножество, которое является объедиением вершин и рёбер). *Дерево* — это стягиваемый граф. Подграф-дерево в X называют *максимальным*, если оно содержит все вершины графа X. Как мы увидим ниже, это эквивалентно более очевидному определению максимальности.

Предложение 8.11. *Любой связный граф X содержит максимальное дерево, и любое дерево в графе содержится в некотором максимальном дереве.*

Доказательство. Мы опишем конструкцию, которая для каждого подграфа $X_0 \subset X$ даёт подграф $Y \subset X$, содержащий все вершины графа X, и деформационную ретракцию $Y \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} X_0$. В частности, взяв в качестве X_0 одну вершину или любое поддерево, мы получим требуемое утверждение.

Вначале построим последовательность подграфов $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, где X_{i+1} получается из X_i добавлением замыканий $\overline{e}_\alpha$ всех рёбер $e_\alpha \subset X \setminus X_i$, имеющих по крайней мере один конец в X_i. Объединение $\bigcup_i X_i$ открыто в X, так как каждая точка из X_i имеет окрестность, содержащуюся в X_{i+1}. Более того, множество $\bigcup_i X_i$ замкнуто по аксиоме (W) клеточного пространства, как объединение замыканий клеток. Поэтому $X = \bigcup_i X_i$, так как граф X связен.

Теперь, чтобы построить Y, положим вначале $Y_0 = X_0$. Предположим по индукции, что уже построен граф $Y_i \subset X_i$, содержащий все вершины графа X_i. Рассмотрим граф Y_{i+1}, который получается из Y_i, если для каждой вершины из $X_{i+1} \setminus X_i$ добавить одно ребро, соединяющее эту вершину с Y_i. Очевидно, что имеется деформационная ретракция $Y_{i+1} \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} Y_i$. Теперь положим $Y = \bigcup_i Y_i$. Тогда можно получить деформационную ретракцию графа Y на $Y_0 = X_0$, деформационно ретрагируя Y_{i+1} на Y_i в течение времени из промежутка $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$. Тогда точка $x \in Y_{i+1} \setminus Y_i$ остаётся неподвижной до этого промежутка, во время которого она перемещается в Y_i, а после этого продолжает перемещаться, пока не достигнет Y_0. Полученная гомотопия $h_t \colon Y \to Y$ непрерывна, так как она непрерывна на замыкании каждого ребра. □

Предложение 8.12. *Пусть X — связный граф с максимальным деревом T. Тогда $\pi_1(X)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют ребрам из $X \setminus T$.*

Доказательство. Проекция $X \to X/T$ является гомотопической эквивалентностью согласно следствию 4.4. Факторпространство X/T является графом с одной вершиной, а потому является букетом окружностей. Поэтому $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют рёбрам, не попавшим в T. □

В качестве следствия получаем, что граф является деревом тогда и только тогда, когда он односвязен.

Лемма 8.13. *Любое накрывающее пространство графа X также является графом.*

Доказательство. Пусть $p\colon Y \to X$ — накрытие. В качестве вершин графа Y мы берём дискретное множество $Y^0 = p^{-1}(X^0)$. В качестве ребёр графа Y мы берём всевозможные поднятия характеристических отображений $I_\alpha \to X$ одномерных клеток e_α пространства X (т. е. ребёр графа X). Такие поднятия начинаются из заканчиваются в точках из Y^0, причём для каждой точки из $p^{-1}(x)$, где $x \in e_\alpha$, существует единственное поднятие, проходящее через эту точку. Это задаёт структуру графа на Y. Получающаяся при этом топология на Y — та же самая, что и исходная топология, так как обе топологии имеют одни и те же базовые открытые множества, поскольку проекция $p\colon Y \to X$ является локальным гомеоморфизмом. □

Теорема 8.14 (Нильсен–Шрайер). *Любая подгруппа свободной группы F свободна.*

Доказательство. Пусть X — граф, для которого $\pi_1(X) = F$, например, букет окружностей. Для каждой подгруппы $G \subset F$ согласно теореме 8.10 существует накрытие $p\colon Y \to X$, для которого $p_*\pi(Y) = G$, т.е. $\pi_1(Y) \cong G$, так как p_* инъективно. По предыдущей лемме Y — граф, поэтому группа $G \cong \pi_1(Y)$ свободна согласно предложению 8.12. $\square$

В отличие от ситуации со свободными абелевым группами, подгруппа $G \subset F$ свободной группы F может иметь больший ранг, чем группа F. Примеры приведены в задачах ниже.

Задачи и упражнения.

8.15. Постройте накрытие букета 2 окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geqslant 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geqslant 2$.

8.16. Докажите, что для накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$. Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия* p.

8.17. Накрытие $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ называется *регулярным*, если $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в $\widetilde{X}$.

8.18. Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ на пространстве $\widetilde{X}$, такое, что $X = \widetilde{X}/G$ (точнее, орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). Определение действия группы G на пространстве X и пространства орбит X/G см. в примере 1.5.2. Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $gx \neq x$.

8.19. Действие группы G на пространстве Y называется *дискретным*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U, что множества gU, $g \in G$, попарно не пересекаются. Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon Y \to X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.

8.20. Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

8.21. Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства X необходимо для существования односвязного накрывающего пространства $\widetilde{X}$.

8.22. Постройте пример не полулокально односвязного пространства.

8.23. Пространство X *локально односвязно*, если у любой точки существует односвязная окрестность. Постройте пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

8.24. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^2$.

8.25. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$.

8.26. Докажите следующую версию теоремы 8.10, в которой не учитываются отмеченные точки: имеется взаимно однозначное соответствие между классам изоморфных накрытий $p\colon Y \to X$ и классами сопряжённости подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

8.27. Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.

8.28. Пусть $G \subset F_2$ — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими a и b), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы G. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующие подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

8.29. Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующие подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

9. Расслоения

Накрытие локально устроено как произведение на дискретное множество Г. Обобщение понятия накрытия, при котором дискретное множество заменяется на произвольное топологическое пространство F, приводит к понятию расслоения.

Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии. *Локально тривиальным расслоением* называется четвёрка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \to B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Пространство E называется *тотальным пространством*, B *базой*, а F *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p\colon E \to B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой* x; очевидно, этот слой гомеоморфен F.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить $U = B$; это в частности означает, что $E \cong B \times F$.

Пример 9.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F.

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиально расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2\colon |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^2\colon z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^2\colon z_1 \neq 0\}$.

Как и накрытия, локально тривиальные расслоения обладают свойством поднятия гомотопии (см. теорему 8.3). Однако, во-первых, накрывающая гомотопия, вообще говоря, не единственна, а во-вторых, необходимо наложить некоторые дополнительные условия на отображаемое пространство Z или на базу расслоения B. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 9.2. *Локально тривиальное расслоение $p\colon E \to B$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd} \tag{5}$$

Доказательство. Вначале мы сведём свойство поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z к случаю $Z = D^k$.

Свойство поднятия гомотопии является частным случаем более общего свойства поднятия для пары (X, A), которое описывается следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] & B \end{tikzcd}$$

где $i\colon A \hookrightarrow X$ — вложение. Тогда свойство поднятия гомотопии — это свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z)$. Для проведения индукции по клеткам нам понадобится относительная версия свойства поднятия гомотопии, когда требуется поднять гомотопию $G\colon Z \times I \to B$ до гомотопии $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E$, начинающейся с данного отображения $f\colon Z \to E$ и продолжающей поднятие $\widetilde{G}\colon A \times I \to E$, уже заданное на подпространстве $A \subset Z$. Это не что иное как свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z \times 0 \cup A \times I)$:

$$\begin{tikzcd} Z \times 0 \cup A \times I \arrow[r, "\widetilde{G}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

Теперь будем вести индукцию по клеткам пространства Z. Предположим, что поднятие гомотопии $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E$ уже задано на Z, а мы хотим продолжить его на пространство $Z' = Z \cup e^k$, получаемое из Z приклеиванием одной клетки e^k при помощи отображения $\partial D^k \to Z$. Так как характеристическое отображение $D^k \to Z \cup e^k$ этой клетки является гомеоморфизмом на внутренности шара, свойство поднятия для пары $(Z' \times I, Z' \times 0 \cup Z \times I)$ эквивалентно свойству поднятия для пары $(D^k \times I, D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I)$:

$$\begin{tikzcd} D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & (Z \cup e^k) \times 0 \cup Z \times I \arrow[r, "\widetilde{G}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^k \times I \arrow[r] & (Z \cup e^k) \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

Так как пары $(D^k\times I, D^k\times 0)$ и $(D^k\times I, D^k\times 0\cup\partial D^k\times I)$ гомеоморфны, свойство поднятия для пары $(D^k\times I, D^k\times 0\cup\partial D^k\times I)$ эквивалентно свойству поднятия гомотопии по отношению к пространству D^k:

$$\begin{tikzcd}
D^k \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i_0"'] & D^k\times 0\cup\partial D^k\times I \arrow[r, "\widetilde{G}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
D^k\times I \arrow[r, "\cong"] & D^k\times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B
\end{tikzcd}$$

Осталось проверить свойство поднятия гомотопии для шаров D^k или, что равносильно, кубов I^k. Пусть $G\colon I^k\times I\to B$, $G(x,t)=g_t(x)$ — гомотопия, которую мы хотим поднять, начиная с заданного поднятия $\widetilde{g}_0\colon I^k\to E$ отображения $g_0\colon I^k\to B$. Выберем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства B вместе с локальными тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\cong}U_\alpha\times F$. Так как $I^k\times I$ компактно, мы можем разбить I^k на меньшие кубы C, а I — на отрезки $I_j=[t_j,t_{j+1}]$ так, чтобы отображение G переводило каждое произведение $C\times I_j$ в одно множество U_α. Применяя индукцию по k, мы можем предположить, что гомотопия $\widetilde{G}=\widetilde{g}_t$ уже построена на ∂C для каждого из малых кубов C. Чтобы продолжить эту гомотопию $\widetilde{g}_t$ на куб C, мы можем строить $\widetilde{g}_t$ последовательно на каждом отрезке I_j. Этот аргумент позволяет нам свести всё к случаю, когда отображение G переводит весь куб $I^k\times I$ в одно множество U_α. Тогда нам уже дано поднятие $\widetilde{G}\colon I^k\times 0\cup\partial I^k\times I\to p^{-1}(U_\alpha)$, которое необходимо продолжить до поднятия $\widetilde{G}\colon I^k\times I\to p^{-1}(U_\alpha)$. Взяв композицию с локальной тривиализацией $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\cong}U_\alpha\times F$ мы сводим всё к случаю тривиального расслоения:

$$\begin{tikzcd}
I^k\times 0\cup\partial I^k\times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & U_\alpha\times F \arrow[d, "p"] \\
I^k\times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & U_\alpha
\end{tikzcd}$$

В этом случае первая координата поднятия $\widetilde{G}\colon I^k\times I\to U_\alpha\times F$ является данным нам отображением G. Вторую координату можно определить как композицию $I^k\times I\to I^k\times 0\cup\partial I^k\to F$, где первое отображение — ретракция, а второе — вторая координата данного нам отображения f. $\square$

Расслоения в смысле Гуревича и Серра. Отображение $p\colon E\to B$ называется *расслоением в смысле Гуревича*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому пространству Z.

Отображение $p\colon E\to B$ называется *расслоением в смысле Серра*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому клеточному пространству Z.

Согласно теореме 9.2, локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра. (Имеет место теорема Гуревича–Хюбша, согласно которой локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Гуревича, если база B паракомпактна.) Вот важный пример расслоения в смысле Гуревича, которое, вообще говоря, не является локально тривиальным.

Пример 9.3 (расслоение путей)**.** Пусть X — пространство с отмеченной точкой. Напомним, что пространством путей на X называется подпространство $PX\subset\mathcal{C}(I,X)$, состоящее из путей $\gamma\colon I \to X$ с $\gamma(0) = x_0$. Рассмотрим отображение

$$p\colon PX \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

Тогда p является расслоением в смысле Гуревича. В самом деле, пусть даны $f\colon Z \to PX$ и $G\colon Z \times I \to X$, см. (5). Тогда накрывающая гомотопия $\widetilde{G}\colon Z \times I \to PX$ может быть задана следующей формулой «продолжения путей»:

$$\widetilde{G}(z,t)(s) = \begin{cases} \bigl(f(z)\bigr)(s(1+t)) & \text{при } s(1+t) \leqslant 1, \\ G\bigl(z, s(1+t)-1\bigr) & \text{при } s(1+t) \geqslant 1. \end{cases}$$

Расслоение $p\colon PX \to X$ называется *расслоением путей* для X. Его слоем $p^{-1}(x_0)$ над отмеченной точкой $x_0 \in X$ является пространство петель ΩX. Слой $p^{-1}(x_1)$ над любой другой точкой представляет собой пространство путей из x_0 в x_1; легко видеть, что это пространство гомотопически эквивалентно пространству петель ΩX.

Согласно одной из задач в конце этого раздела, все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации. До конца этого раздела под расслоением мы будем понимать расслоение в смысле Гуревича, т.е. отображение $p\colon E \to B$, удовлетворяющее свойству поднятия гомотопии (5) для любого Z.

Двойственное понятие *корасслоения* определяется как отображение $i\colon A \to X$, удовлетворяющее свойству продолжения гомотопии. Мы определяли последнее для пар (X, A) в разделе 4. В более общей ситуации, говорят, что отображение $i\colon A \to X$ обладает *свойством продолжения гомотопии* по отношению к пространству Z, если для любого отображения $f\colon X \to Z$ и гомотопии $F\colon A \times I \to Z$, такой, что $f \circ i = F_0$, существует гомотопия $\widehat{F}\colon X \times I \to Z$, для которой $\widehat{F}_0 = f$ и $\widehat{F} \circ (i \times \mathrm{id}) = F$. Это описывается коммутативной диаграммой

(6)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "i"'] & Z^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widehat{F}'"] & Z \end{tikzcd}$$

где $Z^I = \mathcal{C}(I, Z)$, F' — *сопряжённое* отображение к F (происходящее из экспоненциального закона $\mathcal{C}(A \times I, Z) \cong \mathcal{C}(A, Z^I)$, т.е. $F'(a) = \gamma$, где $\gamma(t) = F(a,t) \in Z$), отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$, а $\widehat{F}'$ — сопряжённое отображение к $\widehat{F}$.

Пример 9.4.

1. Вложение $i\colon A \to X$ клеточного подпространства A клеточного пространства X является корасслоением согласно теореме 4.3.

2. Вложение верхнего основания цилиндра:

$$i\colon X \to X \times I, \quad x \mapsto (x, 1)$$

является корасслоением. Этот пример двойствен к расслоению путей (пример 9.3).

3. Отображение $X \to pt$ в точку всегда является расслоением: в качестве накрывающей гомотопии $\widetilde{G}\colon Z \times I \to X$ можно взять постоянную гомотопию $\widetilde{G}(z,t) = f(z)$. Однако «двойственное» отображение вложения точки $pt \to X$ является корасслоением только для достаточно хороших пространств (например, клеточных).

Предложение 9.5.

а) *Пусть* $p\colon E \to B$ *— расслоение,* $f\colon B' \to B$ *— отображение и*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

— декартов квадрат, т.е. $E' = \{(e, b') \in E \times B' \colon p(e) = f(b')\}$. *Тогда* $p'\colon E' \to B'$ *— тоже расслоение.*

б) *Пусть* $i\colon A \to X$ *— корасслоение,* $g\colon A \to A'$ *— отображение и*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

— кодекартов квадрат (т.е. $X' = X \sqcup A'/\sim$, *где* $x \sim a'$, *если* $x = i(a)$ *и* $a' = g(a)$ *для некоторого* $a \in A$*). Тогда* $i'\colon A \to X$ *— тоже корасслоение.*

Доказательство. Докажем а). Рассмотрим свойство поднятия гомотопии для p':

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Так как $p\colon E \to B$ — расслоение, существует поднятие $Z \times I \to E$, которое вместе с универсальным свойством декартова квадрата (см. (1)) даёт требуемое поднятие $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E'$.

Утверждение б) доказывается аналогично, используя универсальное свойство кодекартова квадрата (см. (2)). □

Расслоение $p'\colon E' \to B'$ называется *индуцированным* расслоением p при помощи отображения $f\colon B' \to B$.

Следующая теорема о факторизации показывает, что любое отображение можно разложить в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения, а также в композицию корасслоения и гомотопической эквивалентности.

Теорема 9.6 (о факторизации отображения)**.**

а) *Для любого отображения* $f\colon X \to Y$ *существует гомотопическая эквивалентность* $h\colon X \to \widetilde{X}$ *и расслоение* $p\colon \widetilde{X} \to Y$, *такие, что* $f = p \circ h$.

б) *Для любого отображения* $f\colon X \to Y$ *существует корасслоение* $i\colon X \to \widehat{Y}$ *и гомотопическая эквивалентность* $h\colon \widehat{Y} \to Y$, *такие, что* $f = h \circ i$.

Доказательство. Докажем а). Пусть $\widetilde{X}$ — множество пар (x, γ), состоящих из точки $x \in X$ и пути $\gamma\colon I \to Y$ с $\gamma(0) = f(x)$. Это описывается декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

где Y^I — пространство всех путей $\gamma\colon I \to Y$, а отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$.

Тогда гомотопическая эквивалентность $h\colon X \to \widetilde{X}$ задаётся формулой $h(x) = (x, c_{f(x)})$, где $c_{f(x)}\colon I \to Y$ — постоянный путь $t \mapsto f(x)$, и имеем расслоение $p\colon \widetilde{X} \to Y$, $p(x,\gamma) = \gamma(1)$ (свойство поднятия гомотопии проверяется так же, как и для расслоения путей в примере 9.3).

Докажем б). Пусть $\widehat{Y}$ — фактор-пространство пространства $(X \times I) \sqcup Y$, получаемое при отождествлении $(x, 0) \in X \times I$ с $f(x) \in Y$. Это описывается кодекартовым квадратом

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

где отображение i_0 переводит x в $(x, 0)$.

Гомотопическая эквивалентность $h\colon \widehat{Y} \to Y$ задаётся формулами $h(x,t) = f(x)$ и $h(y) = y$, и мы имеем корасслоение $i\colon X \to \widehat{Y}$, $i(x) = (x, 1)$ (сравните с примером 9.4.2). $\square$

Пространство $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$, построенное в доказательстве утверждения б) выше, называется *цилиндром отображения* f.

Задачи и упражнения.

9.7. Это — обобщение примера 9.1.3. Положим $E = S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^n$, $p(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \ldots : z_n]$. Докажите, что $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — локально тривиальное расслоение со слоем $F = S^1$. Оно также называется *расслоением Хопфа.*

9.8. Докажите, что расслоение $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ из предыдущего упражнения (в частности, расслоение Хопфа), нетривиально.

9.9. Докажите, что локально тривиальное расслоение над кубом I^k тривиально.

9.10. Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

9.11. Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра $i\colon X \to X \times I$, $x \mapsto (x, 1)$, является корасслоением.

9.12. Докажите, что если X — клеточное пространство и $x \in X$, то вложение $i\colon x \to X$ является корасслоением.

9.13. Приведите пример пространства с отмеченной точкой (X, x_0), для которого вложение $i\colon x_0 \to X$ не является корасслоением.

9.14. Докажите, что разложение из теоремы 9.6 а) естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "h"] & & X' \arrow[dd, "f'"' near start] \arrow[dr, "h'"] & \\
& \widetilde{X} \arrow[rr] \arrow[dl, "p"] & & \widetilde{\widetilde{X}'} \arrow[dl, "p'"] \\
Y \arrow[rr] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для разложения из теоремы 9.6 б).

9.15. Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения $p\colon \widetilde{X} \to Y$ из теоремы 9.6 а) называется *гомотопическим слоем* отображения $f\colon X \to Y$ и обозначается $\operatorname{hofib} f$. Докажите, используя естественность конструкции $\widetilde{X}$ (см. предыдущую задачу), что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения $f = p' \circ h'$ в композицию гомотопической эквивалентности h' и расслоения p' пространство $\operatorname{hofib} f$ гомотопически эквивалентно слою расслоения p'.

9.16. Докажите, что гомотопический слой отображения $f\colon X \to Y$ есть пространство F, входящее в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & PY \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

где $PY \to Y$ — расслоение путей.

9.17. Фактор-пространство $G = \widehat{Y}/i(X) = \widehat{Y}/(X\times 1)$ пространства $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ из теоремы 9.6 б) (цилиндра отображения) по его верхнему основанию называется *конусом отображения* $f\colon X \to Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения f называется его *гомотопическим кослоем*. Таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
CX \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

где $X \to CX$ — вложение X в основание конуса. Проверьте корректность определения гомотопического кослоя по аналогии с задачей 9.15.

9.18. Найдите гомотопический слой вложения точки $pt \to X$.

9.19. Найдите гомотопический кослой проекции в точку $X \to pt$.

9.20. Найдите гомотопический слой вложения букета $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$.

9.21. Найдите гомотопический слой вложения букета $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

9.22. Докажите, что гомотопическая эквивалентность $h\colon X \to \widetilde{X}$ из теоремы 9.6 а) является корасслоением, а гомотопическая эквивалентность $h\colon \widehat{Y} \to Y$ из теоремы 9.6 б) — расслоением в смысле Серра.

10. Гомотопические группы

Определение. Коммутативность. Для пространства X с отмеченной точкой x_0 определим $\pi_n(X, x_0)$ как множество гомотопических классов отображений $f\colon S^n \to X$, переводящих отмеченную точку s_0 сферы S^n в x_0. Сами эти отображения называются *сфероидами*. Иначе сфероид можно представить как отображение пар $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, переводящий границу куба ∂I^n в x_0.

При $n \geqslant 1$ сумма двух сфероидов $f, g\colon S^n \to X$ определяется как композиция

$$f + g\colon S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X,$$

где отображение c стягивает экватор S^{n-1} в сфере S^n в точку, и мы выбираем отмеченную точку s_0 на S^n так, чтобы она принадлежала этому экватору. На кубическом языке операция суммы выглядит следующим образом: если $f, g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ и $(t_1, \ldots, t_n)$ — координаты в кубе I^n, то сумма $f + g$ определяется как отображение $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, заданное формулой

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{при } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Так как в операции суммы участвует только первая координата, те же самые рассуждения, что и для π_1 (см. предложение 5.1) показывают, что сумма определена корректно на гомотопических классах сфероидов и $\pi_n(X, x_0)$ — группа, причём единичный элемент — постоянное отображение $I^n \to x_0$, а обратный элемент задаётся формулой $-f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Группа $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$, называется n-й *гомотопической группой* пространства X. Ясно, что $\pi_1(X, x_0)$ — это фундаментальная группа, а $\pi_0(X, x_0)$ — просто множество компонент линейной связности пространства X (на нём, вообще говоря, нет естественной групповой операции).

Предложение 10.1. *Гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ коммутативна при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Мы имеем $f + g \simeq g + f$ посредством гомотопии, изображённой на рис. 3. Сначала гомотопия сжимает области определения отображений f и g в

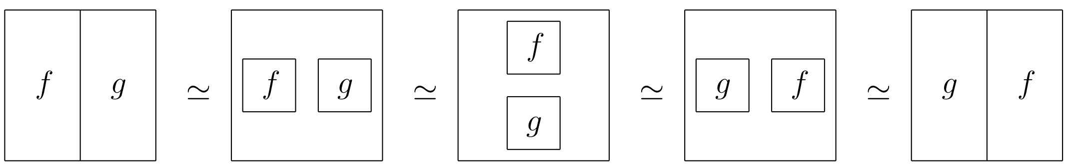


Рис. 3

меньшие кубы в I^n, а область вне этих кубов отображается в отмеченную точку x_0. В результате появляется свободное пространство, в котором можно двигать эти два куба как угодно, лишь бы они не пересекались. При $n \geqslant 2$ их можно переставить местами. Затем области определения отображений f и g можно снова увеличить до их исходного размера. Всю эту процедуру можно проделать, используя лишь координаты t_1 и t_2, оставляя другие координаты без изменений. $\square$

Если пространство X линейно связно, то для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ группы $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ изоморфны: изоморфизм задаётся выбором пути из x_0 в x_1 (упражнение). Этот изоморфизм, вообще говоря, зависит от пути, вернее от его гомотопического класса. Таким образом, если X односвязно (т.е. $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$), то все группы $\pi_n(X, x_0)$ с различными x_0 канонически изоморфны.

Предложение 10.2. *Отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм групп $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$. Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для фундаментальной группы (предложение 5.2). □

Следствие 10.3. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом.*

Предложение 10.4. *Для любых пространств (X, x_0) и (Y, y_0) имеем*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

Доказательство. Отображение $Z \to X \times Y$ — это то же самое, что пара отображений $Z \to X$, $Z \to Y$. Взяв в качестве Z пространства S^n и $S^n \times I$, получим требуемое. □

Предложение 10.5. *$\pi_n(S^k) = 0$ при $n < k$.*

Доказательство. Это эквивалентно предложению 4.8 (и вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации). □

Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары. Пусть (X, A) — пара пространств с отмеченной точкой $x_0 \in A$. Определим $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 1$, как множество гомотопических классов отображений пар $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$, переводящих отмеченную точку $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ в x_0. Эти отображения называются *относительными сфероидами*. На кубическом языке относительный сфероид — это отображение $f\colon I^n \to X$, переводящее ∂I^n в A и переводящее $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0, где грань I^{n-1} задаётся уравнением $t_n = 0$. Стягивание подпространства $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в точку преобразует тройку $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1})$ в (D^n, S^{n-1}, s_0), поэтому отображение $(D^n, S^{n-1}, x_0) \to (X, A, x_0)$ — это то же самое, что отображение $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$.

Операция суммы определяется в $\pi_n(X, A, x_0)$ той же формулой (7), что и для $\pi_n(X, x_0)$, за исключением того, что координата t_n играет теперь особую роль и её больше нельзя использовать для операции суммы. Таким образом, $\pi_n(X, A, x_0)$ — группа при $n \geqslant 2$, и эта группа коммутативна при $n \geqslant 3$. Группа $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$, называется *относительной гомотопической группой* пары (X, A).

При $n = 1$ мы получаем $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ и $\partial I^1 \setminus I^0 = \{1\}$. Следовательно, $\pi_1(X, A, x_0)$ — это множество гомотопических классов путей в X из переменной точки в A в фиксированную точку $x_0 \in A$. Вообще говоря, это множество нельзя превратить в группу естественным способом.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \ldots$$

называется *точной*, если $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i+1}$ для любого i.

Для пары пространств (X, A) и $n \geqslant 1$ определены отображения

$$i_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0),\ j_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0),\ \partial\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0),$$

где i_* — отображение, индуцированное вложением $A \hookrightarrow X$, отображение j_* переводит гомотопический класс сфероида $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ в гомотопический класс относительного сфероида $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, а отображение ∂ переводит гомотопический класс относительного сфероида $f\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ в гомотопический класс сфероида $f|_{S^{n-1}}\colon (S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0)$. На кубическом языке, отображение ∂ переводит $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ в $f|_{I^{n-1}}\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$. Отображения i_* и j_* являются гомоморфизмами при $n \geqslant 1$, а ∂ является гомоморфизмом при $n \geqslant 2$.

Теорема 10.6 (гомотопическая последовательность пары)**.** *Последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

точна для любой пары пространств (X, A).

Замечание. Множество $\pi_1(X, A, x_0)$ не является группой, и точность в этом члене означает, что для любого элемента $[f] \in \pi_1(X, A, x_0)$, где $f\colon (D^1, S^0, s_0) \to (X, A, x_0)$, образ $\partial[f]$ представляет отображение в точку $S^0 \to x_0$ тогда и только тогда, когда $[f] = j_*[g]$ для некоторого $[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Аналогичный смысл имеет и точность в члене $\pi_1(A, x_0)$.

Доказательство теоремы 10.6.

Проверим, что $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ представлен отображением $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Предположим, что $[f] \in \operatorname{Im} i_*$, т.е. $f\colon D^n \to X$ гомотопно отображению $g\colon D^n \to X$, для которого $g(D^n) \subset A$. Рассмотрим гомотопию (деформационную ретракцию) $r_t\colon D^n \to D^n$, где $r_0 = \mathrm{id}$ и r_1 — отображение в точку. Тогда композиция $g \circ r_t$ устанавливает гомотопию между относительным сфероидом $g\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$, представляющим элемент $j_*[g]$, и отображением $D^n \to x_0$, представляющим 0, в классе относительных сфероидов. Следовательно $j_*[f] = j_*[g] = 0$, т.е. $[f] \in \operatorname{Ker} j_*$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Предположим, что $[f] \in \operatorname{Ker} j_*$, т.е. $j_*[f] = 0$. Здесь удобно представить $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ отображением $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Тогда $j_*[f]$ представляется относительным сфероидом $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Гомотопия между f и отображением в точку в классе относительных сфероидов задаёт отображение $F\colon I^{n+1} = I^n \times I \to X$, которое совпадает на грани t_{n+1} с f, переводит грань $t_n = 0$ в A отображает оставшуюся часть границы ∂I^{n+1} в x_0. Пусть $I^n_s \subset I^{n+1}$ — сечение куба n-мерной плоскостью $st_n + (1-s)t_{n+1} = 0$ (см. рис. 4). Тогда $g_s = F|_{I^n_s}\colon I^n_s = I^n \to X$ — гомотопия между $f = g_0$ и отображением g_1, которое переводит $(I^n, \partial I^n)$ в (A, x_0). Итак, мы получаем $[f] = [g_1] \in \operatorname{Im} i_*$.

Проверим, что $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$. Действительно, если $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Im} j_*$, то он представлен сфероидом $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Но тогда $f|_{S^{n-1}}$ есть отображение в точку, т.е. $\partial[f] = 0$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ представлен отображением $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Если $[f] \in \operatorname{Ker} \partial$, то имеется гомотопия

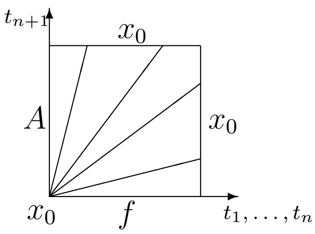


Рис. 4

$g_t\colon I^{n-1} \to A$ между $f|_{I^{n-1}}\colon I^{n-1} \to A$ и отображением в точку. Рассмотрим гомотопию $h_t\colon \partial I^n \to A$, совпадающую с g_t на I^{n-1} и переводящую $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0. Применяя теорему о продолжении гомотопии для клеточной пары $(I^n, \partial I^n)$, продолжим h_t до гомотопии $f_t\colon I^n \to X$ между данным нам отображением $f = f_0$ и отображением f_1, переводящим ∂I^n в x_0. Тогда $f_1\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ представляет элемент $[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$ и мы имеем $j_*[f_1] = [f]$, т.е. $[f] \in \operatorname{Im} j_*$.

Проверим, что $\operatorname{Im}\partial \subset \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $[f] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Im}\partial$, т.е. сфероид $f\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$ является ограничением относительного сфероида $g\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Тогда $f_t = g|_{I^{n-1}\times t}\colon I^{n-1} \times t = I^{n-1} \to X$ есть гомотопия, связывающая $f_0 = f$ с отображением в точку, т.е. $i_*[f] = 0$ и $[f] \in \operatorname{Ker} i_*$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im}\partial$. Пусть $[g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Ker} i_*$, т.е. задана гомотопия $g_t\colon I^{n-1} \to X$ в X между $g_0 = g\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0) \to (X, x_0)$ и отображением в точку $g_1\colon I^{n-1} \to x_0$. Тогда эта гомотопия задаёт отображение $f\colon I^{n-1} \times I \to X$, $f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = g_{t_n}(t_1, \dots, t_{n-1})$, представляющее собой относительный сфероид $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, сужение которого на I^{n-1} есть g. Иначе говоря, $\partial[f] = [f|_{I^{n-1}}] = [g]$, т.е. $[g] \in \operatorname{Im}\partial$. $\square$

Гомотопическая последовательность расслоения. Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение в смысле Серра, $b_0 \in B$ и $e_0 \in E$ — отмеченные точки, $p(e_0) = b_0$, и $F = p^{-1}(b_0)$ — слой над b_0. Имеем отображение пар
$$p\colon (E, F) \to (B, b_0).$$

Лемма 10.7. *Отображение $p_*\colon \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ является изоморфизмом при $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Докажем, что p_* — мономорфизм. Пусть $p_*[\widetilde{f}] = 0$ для некоторого элемента $[\widetilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$, представленного относительным сфероидом $\widetilde{f}\colon (D^n, S^{n-1}) \to (E, F)$. Так как $p_*[\widetilde{f}] = 0$, сфероид $f = p \circ \widetilde{f}\colon (D^n, S^{n-1}) \to (B, b_0)$ гомотопен нулю в B посредством гомотопии $F\colon D^n \times I \to B$ или $f_t\colon D^n \to B$, где $f_0 = f$ и $f_1\colon D^n \to b_0$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии:
$$\begin{tikzcd} D^n \times 0 \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

Это даёт нам гомотопию $\widetilde{f}_t\colon D^n \to E$ между отображением $\widetilde{f} = \widetilde{f}_0\colon (D^n, S^{n-1}) \to (E, F)$ и отображением $\widetilde{f}_1$, для которого $\widetilde{f}_1(E) \subset F$ (так как $f_1(B) = b_0$). Таким образом, $[\widetilde{f}] = [\widetilde{f}_1] = 0$ в $\pi_n(E, F, e_0)$ и p_* — мономорфизм.

Теперь докажем, что $p_*\colon \pi_n(E,F,e_0) \to \pi_n(B,b_0)$ — эпиморфизм. Пусть элемент $[f]\colon \pi_n(B,b_0)$ представлен отображением $f\colon (I^n,\partial I^n) \to (B,b_0)$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии следующим образом:

$$\begin{tikzcd} \partial I^n \setminus I^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & I^{n-1}\times 1 \cup \partial I^{n-1}\times I \arrow[r, "c"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, equal] & I^{n-1}\times I \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

где c — постоянное отображение в точку $e_0 \in E$ (здесь мы используем то, что пары $(I^{n-1}\times I, I^{n-1}\times 1 \cup \partial I^{n-1}\times I)$ и $(I^{n-1}\times I, I^{n-1}\times 1)$ гомеоморфны). Это даёт нам отображение $\widetilde{f}\colon I^n \to E$, для которого $\widetilde{f}(\partial I^n) \subset F$, так как $f(\partial I^n) = b_0$. Таким образом, мы получаем относительный сфероид $\widetilde{f}\colon (I^n,\partial I^n,\partial I^n\setminus I^{n-1}) \to (E,F,e_0)$, для которого $p_*[\widetilde{f}] = [f]$, так как $p\circ\widetilde{f} = f$. Итак, p_* — эпиморфизм. □

Теорема 10.8 (гомотопическая последовательность расслоения)**.** *Для расслоения в смысле Серра $p\colon E \to B$ над линейно связной базой B со слоем F имеет место точная последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E,x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E,x_0)$$

Доказательство. Это вытекает из гомотопической последовательности пары (E,F) и предыдущей леммы. □

Замечание. Как видно из доказательства леммы 10.7, граничное отображение $\partial\colon \pi_n(B,b_0) \to \pi_{n-1}(F,e_0)$ можно описать следующим образом. Пусть $[f] \in \pi_n(B,b_0)$ представлен сфероидом $f\colon (I^n,\partial I^n) \to (B,b_0)$. Рассмотрим f как гомотопию $I^{n-1}\times I \to B$, состоящую из отображений $g_t\colon I^{n-1} \to B$, где g_0 и g_1 — постоянные отображения в точку b_0. Поднимем эту гомотопию до гомотопии $\widetilde{g}_t\colon I^{n-1} \to E$, начиная с постоянного отображения $\widetilde{g}_0\colon I^{n-1} \to e_0$. Отображение $\widetilde{g}_1$ уже не будет постоянным отображением, но будет переводить I^{n-1} в F. Тогда сфероид $\widetilde{g}_1\colon (I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to (F,e_0)$ представляет элемент $\partial[f] \in \pi_{n-1}(F,e_0)$.

Пример 10.9.

1. Рассмотрим гомотопической последовательности накрытия $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ со слоем счётное дискретное множество Z:

$$\ldots \to \pi_n(Z) \to \pi_n(\mathbb{R}) \to \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(Z) \to \ldots$$

Так как $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ при всех n и $\pi_k(Z) = 0$ при $k > 0$, из точности последовательности вытекает, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$.

2. Рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательность расслоения Хопфа $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем S^1 (см. пример 9.1.3):

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3)$$

Так как $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$, $\pi_1(S^3) = \pi_2(S^3) = 0$, мы получаем последовательность

$$0 \to \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \to 0 \to 0 \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \to 0$$

Так как эта последовательность точна мы получаем, что $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$. Аналогично получаем $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ при $n \geqslant 3$. (На самом деле все эти группы изоморфны $\mathbb{Z}$, но пока мы этого доказать не можем; это будет доказано в второй части курса.)

Теорема Уайтхеда.

Теорема 10.10 (Уайтхед)**.** *Отображение $f\colon X \to Y$ связных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда индуцированные отображения $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ являются изоморфизмами для всех n.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то согласно следствию 10.3 $f_*\colon \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ является изоморфизмом для всех n. Предположим теперь, что $f_*\colon \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ является изоморфизмом для всех n.

По теореме о клеточной аппроксимации мы можем считать отображение $f\colon X \to Y$ клеточным. Далее применим теорему о факторизации отображения (теорему 9.6 б)) и разложим f в композицию $X \to \widehat{Y} \to Y$, где $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ — цилиндр отображения f, отображение $\widehat{Y} \to Y$ является гомотопической эквивалентностью, а $X \to \widehat{Y}$ — вложение клеточного подпространства.

Тем самым мы свели доказательство к случаю, когда f — включение клеточного подпространства $X \subset Y$. Так как f_* — изоморфизм для всех n, из гомотопической последовательности пары (Y,X) вытекает, что все относительные группы $\pi_n(Y,X)$ нулевые. Мы докажем, что тогда существует деформационная ретракция $Y \to X$. Другим словами, докажем, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ гомотопно относительно X отображению в X.

Предположим по индукции, что мы уже построили гомотопию относительно X между отображением $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ и отображением $g\colon Y \to Y$, для которого $g(Y^{k-1}) \subset X$. Пусть e^k — некоторая k-мерная клетка из $Y \setminus X$ и $\varPhi\colon (D^k, \partial D^k) \to (Y, Y^{k-1})$ — её характеристическое отображение. Так как $\pi_k(Y,X) = 0$, композиция

$$g \circ \varPhi\colon (D^k, \partial D^k) \to (Y, Y^{k-1}) \to (Y, X)$$

гомотопна относительно ∂D^k отображению в X. Так как $Y^{k-1} \cup e^k = Y^{k-1} \sqcup D^k/\sim$, эта гомотопия индуцирует гомотопию между отображением $g|_{Y^{k-1}\cup e^k}\colon Y^{k-1} \cup e^k \to Y$ и отображением в X. Произведя такую гомотопию одновременно для всех клеток $e^k \subset Y \setminus X$ и взяв постоянную гомотопию на X, мы получим гомотопию между отображением $g|_{Y^k \cup X}$ и отображением в X. Согласно свойству продолжения гомотопии (теорема 4.3), эту гомотопию можно продолжить до гомотопии, определённой на всём пространстве Y, и тем самым доказательство шага индукции завершено.

Применив конечное число шагов индукции, получим доказательство в случае, когда размерность клеток из $Y \setminus X$ ограничена. В общем случае мы выполняем гомотопию на k-м шаге индукции в течение времени t из отрезка $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$. Любой конечный остов Y^k в конце концов станет стационарным при этих гомотопиях, поэтому мы получаем корректно определённую гомотопию g_t, $t \in [0,1]$, причём $g_1(Y) \subset X$. □

Теорема Уайтхеда не утверждает, что клеточные пространства X и Y с изоморфными гомотопическими группами будут гомотопически эквивалентными: изоморфизмы должны индуцироваться отображением $X \to Y$. Например, пространства S^2 и

$S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы (упражнение), но не гомотопически эквивалентны (этого мы пока доказать не можем).

Задачи и упражнения.

10.11. Докажите, что если пространство X линейно связно, любой путь из из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$, который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концам и началом). Указание: постройте и используйте отображение $\omega\colon S^n \to S^n \vee I$.

10.12. Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие, то индуцированное отображение $p_*\colon \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм при $n \geqslant 2$.

10.13. Докажите, что $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0$ при $n \geqslant 2$.

10.14. Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

10.15. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о 5 гомоморфизмах* или просто *5-лемма.* Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_4 & \longrightarrow & H_5
\end{array}$$

— коммутативная диаграмма групп и гомоморфизмов, строки которой являются точными последовательностями. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;

б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

10.16. Введите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки* (X, A, B) (где $A \subset B \subset X$):

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0)$$

10.17. Используя бесконечное расслоение Хопфа $p\colon S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1 докажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

10.18. Докажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы.

10.19. Докажите, что $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$ для любого X при $n \geqslant 0$.

10.20. Докажите, что $\Omega\mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$.

10.21. Докажите 3-мерную теорему Брауэра: любое непрерывное отображение $f\colon D^3 \to D^3$ имеет неподвижную точку.

Предметный указатель