ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ТОПОЛОГИИ

2 курс, 2014, осень

проф А.В. Чернавский

ЧАСТЬ 1. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

-=-

$\sim$ означает: *Определение*

\- означает: *Сообщение нужного* (для экзамена) *материала*

$\approx$: означает *Пример*

Знаки $\square$ ... $\blacksquare$ заключают доказательство предыдущего утверждения

$\emptyset$ – пустое множество; $\mathcal{C}A$ – дополнение $X \setminus A$ к подмножеству $A \subset X$.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

-=-=-=-

Топология на множестве. Аксиомы топологии

$\sim$ *Топологическая структура на множестве* X – это система $\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$ выделенных подмножеств в X, удовлетворяющая *аксиомам топологии* (или *аксиомам открытых множеств*):

1. любые объединения этих подмножеств $\bigcup_\alpha U_\alpha$ принадлежат $\mathcal{T}$;
2. конечные пересечения этих подмножеств $\bigcap_{i=1}^k U_i$ принадлежат $\mathcal{T}$;
3. само X и пустое подмножество $\emptyset$ принадлежат $\mathcal{T}$.

$\sim$ Подмножества $U_\alpha \subset X$, входящие в систему $\mathcal{T}$, называются ***открытыми множествами***.

Дополнения открытых множеств $F_\alpha = X \setminus U_\alpha = \mathcal{C}U_\alpha$ называются ***замкнутыми множествами***. Их система удовлетворяет двойственным аксиомам (замена пересечений на объединения и обратно): конечные объединения и любые пересечения замкнутых множеств, а также X и $\emptyset$, являются замкнутыми множествами.

Множество X с топологической структурой $\mathcal{T}$ на нем обозначается $(X, \mathcal{T})$.

$\sim$ Множество X, наделенное топологической структурой называется ***топологическим пространством***, его элементы – *точками*. Открытое множество называется *окрестностью* своих точек, а также каждого лежащего в нем подмножества.

$\sim$ Топологическая структура $\mathcal{T}_1$ *больше* структуры $\mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_1 \succ \mathcal{T}_2$), если в $\mathcal{T}_1$ больше открытых множеств. Но две топологии на множестве X могут быть не сравнимы: в том случае, если каждая имеет открытые множества, не входящие в другую структуру. Таким образом множество структур $\{\mathcal{T}\}$ частично упорядочено.

\- Две топологические структуры $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ на множестве X совпадают (открытые множества одной являются открытыми и в другой) $\Leftrightarrow$ для каждой точки каждая окрестность из одной структуры содержит окрестность из другой структуры.

□ В этом случае открытое множество одной структуры есть объединение открытых множеств другой. ■

≈ Полезно иметь в виду крайние случаи топологических структур на X: *дискретную* (все подмножества X открыты) и «*слипшуюся*» (открыты только X и $\emptyset$).

Основным примером топологического пространства является евклидово пространство $\mathbb{R}^n$: подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ открыто, если для каждой точки $x \in X$ имеется $\varepsilon > 0$ так, что X содержит ε-окрестность x, т.е. открытый шар радиуса ε с центром в x. (Проверьте выполнение аксиом!)

-=-=-=-

Аксиомы отделимости

- Имеется несколько типов топологических структур, выделяемых *аксиомами отделимости*. Первые три говорят об отделимости точек окрестностями (остальные рассмотрим позже):

∼ $\mathbf{T}_0$ (*аксиома Колмогорова*): **В каждой паре точек хотя бы одна имеет окрестности, не содержащие другой.**

В T_0-пространстве X возникает частичная упорядоченность: $x \geq y$, если каждая окрестность x содержит y (т.е. каждая окрестность x есть окрестность y).

≈ Если в множестве есть иерархия (отношение «начальник – подчиненный»), которая транзитивна (начальник моего начальника есть тоже мой начальник), то в этом множестве возникает T_0-топология, если открытым считать множество, в котором каждая точка лежит вместе со всеми ее подчиненными. (Проверьте выполнение аксиом!)

∼ $\mathbf{T}_1$: **В каждой паре точек каждая имеет окрестности, не содержащие другой.**

- **В T_1-пространстве каждая точка является замкнутым подмножеством.**

≈ (Простейший пример не T_1-, но T_0-пространства дает *связное двоеточие*: оно состоит из двух точек, одна из которых замкнута, но не открыта, другая открыта, но не замккнута.)

∼ $\mathbf{T}_2$ (*аксиома Хаусдорфа*): **Для каждой пары точек имеются не пересекающиеся окрестности этих точек.** T_2-пространства называются ***хаусдорфовыми*** и также *отделимыми*. (Пример T_1-, но не T_2-пространства построен в разделе о компактности.)

Очевидно, $\mathbf{T}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_0$.

{*Если в пространстве имеются* ***неотделимые пары*** *точек (у такой пары все окрестности общие), то возникает отношение эквивалентности: точки в одном классе эквивалентности попарно неотделимы друг от друга, и каждое открытое множество состоит из целых классов.*

Если в ***множестве классов*** *открытым считать множество классов, объединение которых является открытым подмножеством в X, то возникает топологическое $\boldsymbol{T}_0$-пространство клас-*

сов, и видно, что рассмотрение топологий без аксиом отделимости не представляет интереса с топологической точки зрения.}

-=-=-=-

Непрерывные отображения. Топологическая категория. Гомеоморфизм

$\sim$ Отображение $f : X \to Y$ одного топологического пространства в другое называется ***непрерывным***, если полный прообраз каждого открытого подмножества Y является открытым в X.

(Отображения в прямую $\mathbb{R}$ (обычно непрерывные) называются ***функциями***.)

Отображение f называется ***непрерывным в точке*** $x \in X$, если для каждой окрестности $U(fx)$ существует окрестность $V(x)$, так, что $f(V) \subset U$.

$\sim$ **Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ оно непрерывно в каждой точке.**

$\Rightarrow$: Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, $x \in X$ и $U \ni f(x)$ – данная окрестность точки $y = f(x) \in Y$. Тогда $V = f^{-1}U$ открыто в X, содержит x и $f(V) = f(f^{-1}(U)) = U$.

Значит, имеется окрестность $V(x)$, образ которой лежит в U.

$\Leftarrow$: Пусть $f : X \to Y$ отображение, непрерывное в каждой точке $x \in X$, и $U \subset Y$ – открытое подмножество Y.

Множество $V = f^{-1}(U) \subset X$ содержит окрестность каждой своей точки (образ которой, по условию, лежит в U).

Но V есть объединение этих окрестностей, значит, открыто и $f(V) \subset U$. ■

$\sim$ Отображение называется *открытым*, соотв. *замкнутым*, если оно переводит каждое открытое подмножество в открытое, соотв. замкнутое в замкнутое.

- **Множество $F \subset X$ точек, на котором совпадают значения двух отображений f и g пространства X в хаусдорфово пространство Y, замкнуто.**

Докажем, что дополнительное множество $U = X \setminus F$ открыто в X.

□ Пусть $x \in U$ – произвольная точка из X, $p = f(x)$, $q = g(x)$ и $p \neq q$. Так как Y хаусдорфово, имеются непересекающиеся окрестности $P(p)$ и $Q(q)$. Их прообразы $f^{-1}(P)$, $g^{-1}(Q)$ открыты, как и их пересечение $V = f^{-1}(P) \cap g^{-1}(Q)$.

V есть окрестность точки x, причем образы $f(x')$, $g(x')$ каждой точки $x' \in V$ лежат в непересекающихся множествах, т.е. $V \subset U$ и U открыто. ■

= {**Класс всех топологических пространств вместе с множествами $\mathcal{C}(X \to Y)$ непрерывных отображений для каждой пары пространств X, Y является *топологической категорией* – он удовлетворяет *аксиомам теории категорий*: композиция непрерывных отображений непрерывна и обладает свойством ассоциативности, каждому пространству X отвечает тождественное (непрерывное) отображение $\mathbf{1}|_X$ со свойствами $f = \mathbf{1}|_X f$ для $f : Z \to X$ и $g\mathbf{1}|_X = g$ для $g : X \to Y$. Отображения в произвольной категории называются *морфизмами*, они не обязательно являются отображениями множеств, как и объекты не обязательно рассматриваются как множества. (Например, *категория «город»*: объекты – дома, морфизмы – пути от дома A к дому B.) В каждой категории рассматриваются изоморфизмы объектов категории: Объекты X и Y изоморфны, если имеются взаимно обратные морфизмы $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, для которых $fg = \mathbf{1}|_Y$ и $gf = \mathbf{1}|_X$. В топологической категории изоморфизм называется гомеоморфизмом.**}

$\sim$ *Гомеоморфизм* или *топологическая эквивалентность* между двумя пространствами X и Y есть взаимно однозначное соответствие, определяющее взаимно обратные непрерывные отображения: $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, для которых $fg = \mathbf{1}|_Y$ и $gf = \mathbf{1}|_X$; X и Y называются ***гомеоморфными***.

Это значит, что X и Y *изоморфны* в топологической категории.

(Так как $f = g^{-1}$, то $f(U) = g^{-1}(U)$, так что f отображает открытые множества в открытые (и аналогично g). Очевидно, гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между системами открытых множеств в X и Y, с сохранением отношения принадлежности. Поэтому все, что можно сказать об одном из этих прстранств на языке открытых множеств, можно сказать и о другом.)

$\sim$ ***Топологическим свойством*** топологических пространств называется свойство, которое одновременно выполнено или не выполнено у гомеоморфных пространств. Примерами топологических свойств служат аксиомы отделимости, дискретность структуры. Много важных свойств будет рассмотрено дальше.

-=-=-=-

Индуцированная топология

$\sim$ Каждое подмножество A пространства X наделяется *индуцированной топологической структурой*: открытыми подмножествами в A относительно этой структуры считаются пересечения $U \cap A$ открытых подмножеств $U \subset X$.

(Говорится, что $U \cap A$ открыто *относительно* A.)

Подмножество с индуцированной структурой называется ***подпространством*** пространства X.

$\approx$ Первыми примерами служат произвольные подмножества при любом натуральном n евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в котором открытыми подмножествами считаются всевозможные объединения открытых шаров.

$\sim$ Пусть дано подпространство A в X и непрерывное отображение $f : X \to Y$.

Оно определяет (поточечно) отображение $f|_A : A \to Y$, которое называется *ограничением* f на A: ($f|_A(x) = f(x)$, если $x \in A$).

- Если f непрерывно, то и $f|_A$ непрерывно: Если U открыто в Y, то $f^{-1}(U)$ открыто в X и $f^{-1}(U) \cap A$ открыто относительно A, но $f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$.

Аналогично, если Y есть подпространство B и дано непрерывное отображение $g : X \to Y$, то поточечно определено непрерывное отображение $\tilde{g} : X \to B,\ \tilde{g}(x) = g(x)$, где $g(x)$ рассматривается как точка Y, а $\tilde{g}(x)$ – та же самая точка – рассматривается как точка B.

(По аналогии с $f|_A$ отображение $\tilde{g}$ можно было бы обозначить $g|^B$, но общепринятых названия и обозначения для $\tilde{g}$ нет, хотя такой переход в образе от Y к $B \supset Y$ приходится часто делать).

-=-=-=-

Виды точек подпространства

$\sim$ *Внутренностью* $\operatorname{Int} A$ подпространства A в X называется максимальное открытое подмножество X, лежащее в A – это множество (м.б. пустое) всех точек, лежащих в X со своей окрестностью.

Внешностью $\operatorname{Ext} A$ подпространства A называется максимальное открытое множество, не пересекающееся с A ($\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int} \mathcal{C}A$) – это множество всех точек, имеющих окрестности, не пересекающие A. Очевидно, $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Ext} A = \emptyset$.

Дополнение к $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Ext} A$ называется *границей* $\operatorname{Fr} A$ подпространства A (пишут также $\operatorname{Bd} A$, иногда ∂A) – это множество всех точек, каждая окрестность которых пересекается и с $\operatorname{Int} A$ и с $\operatorname{Ext} A$.

Иногда пишут $\operatorname{Int}_X A$ и т.д., чтобы подчеркнуть, что A считается подпространством X.

Точки, лежащие в этих множествах соответственно называются *внутренними, внешними и граничными.*

~*Замыканием* $\bar{A}$ (иногда пишут $[A]$) подпространства $A \subset X$ называется $A \cup \operatorname{Fr} A$ – это множество всех *точек прикосновения* X, точек, каждая окрестность которых пересекается с A.

Замыкание $\bar{A}$ подпространства дополнительно к его внешности (в котором каждая точка имеет окрестность, не пересекающуюся с A); значит, $\bar{A}$ замкнуто.

- Подпространство A открыто $\Leftrightarrow$ $A = \operatorname{Int} A$; A замкнуто в X $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.

В частности, замыкание замыкания замкнуто ($\bar{A} = \bar{\bar{A}}$).

~ Точки $\bar{A}$ в $\mathbf{T}_1$-пространстве делятся на *изолированные* (они принадлежат A) и *предельные* (могут принадлежать и не принадлежать A).

Из T_1-аксиомы следует, что

- **Точка x является предельной для множества A $\Leftrightarrow$**
В любой окрестности x имеются отличные от x точки множества A и притом бесконечно много точек.

≈ В связном двоеточии замкнутая точка служит предельной для открытой точки.

- Непрерывное отображение $f : X \to Y$ переводит точки прикосновения множества $A \subset X$ в точки прикосновения $f(A)$.

□ Прообраз V окрестности $U(f(x))$ в Y есть окрестность x в X, и если V содержит точки A, то U содержит точки $f(A)$. ■

(Предельная точка может перейти в изолированную – как?!)

~ Имеются два важных класса непрерывных отображений – *замкнутые* и *открытые* отбражения, это отображения, переводящие соответственно замкнутые множества в замкнутые и открытые множества в открытые.

- **Непрерывное отображение $f : X \to Y$ замкнуто $\Leftrightarrow$**
В каждой окрестности $U(F_y)$ полного прообраза $F_y = f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ имеется окрестность $V(F_y)$, являющаяся полным прообразом некоторой окрестности точки y.

$\Rightarrow$: Для окрестности $U(F_y)$ множество $f(X \setminus U)$ замкнуто, т.к. замкнуто отображение f, причем $y \notin f(X \setminus U)$.

Тогда $W(y) = Y \setminus f(X \setminus U)$ открыто в Y, $V = f^{-1}W$ открыто в X и не пересекается с $X \setminus U$, т.е. лежит в U.

$\Leftarrow$ От обратного: Пусть Q замкнутое подмножество X и y предельная точка для $f(Q)$, причем $y \notin f(Q)$.

Тогда полный прообраз F точки y лежит в открытом множестве $X \setminus Q$ и, по условию, имеется окрестность $W(y)$, полный прообраз которой лежит в $X \setminus Q$.

Но тогда $fQ \cap W = \emptyset$ и y не может быть предельной точкой для fQ. ■

- Из этого следует, что для замкнутого отображения в каждой окрестности полного прообраза точки имеется окрестность, состоящая из полных прообразов точек.

~ Разбиения пространства на замкнутые подмножества с таким свойством называются *непрерывными* в русской литературе и *полунепрерывными сверху* в английской (upper semicontinuous).

- **Непрерывное отображение $f : X \to Y$ открыто $\Leftrightarrow$**
Для каждой окрестности $U \subset X$ множество точек $x \in Y$, прообразы которых пересекают U, открыто в Y.

$\Rightarrow$: Пусть $U \subset X$ открыто. Тогда fU открыто в Y и состоит из всех точек, прообразы которых пересекают U.

$\Leftarrow$: Пусть $U \subset X$ открыто. Образ U состоит из точек, прообразы которых пересекают U. По условию, это множество открыто. ■

$\sim$ Разбиения, порождаемые отображениями одновременно открытыми и замкнутыми называются *вполне непрерывными* (непрерывными в английской):

В дальнейшем рассматриваются только непрерывные отображения, непрерывность отображения, как правило, не оговаривается!

-=-=-=-

Базы и предбазы. Локальные базы. Аксиомы счетности

$\sim$ ***Базой топологии*** пространства X или просто *базой* в X называется система открытых подмножеств, которая *порождает топологию* в X в том смысле, что каждое открытое множество есть объединение, возможно, бесконечного числа, подмножеств из этой системы.

Предбазой топологии называется система открытых множеств, конечные пересечения элементов которой образуют базу.

- Для непрерывности отображения $f : X \to Y$ достаточно (и необходимо), чтобы *прообразы элементов базы* были открыты.

$\square$ Для каждой точки $x \in X$ и окрестности $V(f(x))$ имеется, по условию, окрестность $U(f(x))$ из базы, такая, что $U \subset V$, $f^{-1}(U)$ открыто и $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, значит, $f^{-1}(V)$ открыто и f непрерывно. $\blacksquare$

- Топология в множестве X может быть задана указанием некоторой системы подмножеств в качестве базы топологии.

$\approx$ Открытые шары в евклидовом пространстве образуют базу обычной топологии, которая обычно таким образом и определяется (множество открыто, если оно есть объединение открытых шаров).

Система множеств определяет топологию, для которой она служит базой, если для нее выполнен сдедующий

Критерий базы:

Система подмножеств $\mathcal{B}$ множества X служит *базой топологии* в $X \Leftrightarrow$ Для каждой точки x каждого пересечения $B_1 \cap B_2$ двух элементов из $\mathcal{B}$ имеется элемент $B \in \mathcal{B}$ так, что $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

$\Rightarrow$: Пересечение двух открытых множеств должно быть, по определению топологии, открытым. Но если для двух элементов базы B_1 и B_2 имеется точка $x \in B_1 \cap B_2$, для которой нет элемента B базы такого, что $x \in B \subset B_1 \cap B_2$, то не найдется открытого помножества, содержащего x и лежащего в $B_1 \cap B_2$, и, значит, $B_1 \cap B_2$ не окажется открытым множеством. (Топология не определяется одними объединениями.)

$\Leftarrow$: Пусть даны три элемента B_1, B_2, B_3 из системы $\mathcal{B}$. Возьмем точку $x \in B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Пусть $x \in B_{12} \subset B_1 \cap B_2$ и $x \in B_{23} \subset B_2 \cap B_3$, где B_{12} и B_{23} – элементы $\mathcal{B}$. Тогда имеется $B_{123} \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B_{123} \subset B_{12} \cap B_{23} \subset B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Таким образом, все конечные пересечения элементов B оказываются объединениями элементов $\mathcal{B}$.

По условию, система $\mathcal{T}$ должна состоять из всех объединений элементов базы $\mathcal{B}$. Проверим аксиомы. Объединения таких объединений входят в систему $\mathcal{T}$.

Конечные пересечения таких объединений являются объединениями конечных пересечений элементов $\mathcal{B}$. Т.к. конечные пересечения элементов $\mathcal{B}$ являются объединениями элементов $\mathcal{B}$ они входят в систему $\mathcal{T}$. Итак $\mathcal{T}$ есть топология на X. $\blacksquare$

(Нужно, конечно, в доказательстве принять «по умолчанию», что X и $\emptyset$ входят в систему $\mathcal{B}$. Это получится само собой, если каждая точка X лежит в одном из элементов $\mathcal{B}$ и имеются непересекающиеся элементы.)

- Пересечения всех элементов базы пространства X с подпространством A образуют базу индуцированной топологии. (Проверьте!)

Любая система $\mathcal{P}$ подмножеств множества X служит *предбазой* некоторой топологии $\mathcal{T}$ в X, т.е. система всех конечных пересечений элементов из $\mathcal{P}$ и всех объединений таких пересечений удовлетворяет аксиомам открытых множеств.

□ Нужно показать, что множество M, являющееся конечным пересечением объединений конечных пересечений элементов $\mathcal{P}$, есть объединение конечных пересечений элементов $\mathcal{P}$. Но конечное пересечение оъединений множеств есть объединение конечных пересечений этих множеств, т.е. в нашем случае – конечных пересечений элементов $\mathcal{P}$. Значит, M есть объединение конечных пересечений конечных пересечений элементов $\mathcal{P}$, т.е. принадлежит порожденной системе $\mathcal{T}$. ■

Аксиомы счетности

∼ *Базой в точке* $x \in X$ называется система окрестностей x такая, что каждая окрестность этой точки содержит ее окрестность из этой системы.

∼ **В X выполнена *вторая аксиома счетности*, если X имеет счетную базу.**
∼ **Пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если каждая точка имеет счетную базу.** *(Из второй аксиомы счетности следует первая.)*

- В пространстве с первой аксиомой счетности дизъюнктные системы открытых множеств счетны. (Аксиома Суслина.)

≈ Подмножества евклидовых пространств удовлетворяют обеим этим аксиомам. Несчетное дискретное пространство удовлетворяет первой аксиоме, но не второй.

-=-=-=-

Прямое произведение. График отображения

∼ ***Прямым произведением*** $X \times Y$ двух топологических пространств называется произведение множеств X и Y (т.е. совокупность упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$), в котором топология задается указанием базы: за базисные открытые подмножества принимаются произведения $U \times V$, где U произвольный базисный элемент в X, а V – в Y.

≈ Для плоскости (произведения двух прямых) за базу можно взять произведения пар открытых интервалов. Для квадрата к этому нужно добавить еще произведения полуинтервалов на интервалы и полуинтервалов на полуинтервалы.

Прямое произведение имеет две *канонические проекции*: $p_1 : X \times Y \to X$, $p_1(x, y) = x$ и $p_2 : X \times Y \to Y$, $p_2(x, y) = y$, при этом удовлетворено условие:

***a*) Если имеется другое пространство D с непрерывными отображениями $q_1 : D \to X$ и $q_2 : D \to Y$, то имеется *единственное* непрерывное отображение $r : D \to X \times Y$ так, что $q_1 = p_1 r$ и $q_2 = p_2 r$.** При этом

***b*) Любое пространство D, удовлетворяющее этому определению, автоматически гомеоморфно $X \times Y$:**

□ В силу ***a***) имеется отображение $s : X \to D$ с тем же свойством, что и r, причем композиции rs и sr тождественны, так как отображения X и D на себя со свойством ***a***) единственны, т.е. тождественны. ■

= {**Данное определение *общекатегорно*. Объект с двумя морфизмами-проекциями и свойствами а) и b) есть *прямое произведение в категории*. Он может существовать или не существовать в данной категоории. Например, прямое произведение определяется аналогично в категории множеств и отображений, в категории групп, в категории коммутативных групп с заменой непрерывности проекций на гомоморфизмы, в категории топологических групп с непрерывными гомоморфизмами и т.д. В категории**

упорядоченных множеств с монотонными отображениями прямого произведения не существует.}

$\sim$ Определено прямое произведение и для конечного числа пространств: $\prod_{1\le i\le k} X_i$, причем эта операция ассоциативна ($(X_1 \times X_2) \times X_3 = X_1 \times (X_2 \times X_3)$), но не коммутативна: если $X_1 \neq X_2$, то $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$. Однако, $X_1 \times X_2$ гомеоморфно $X_2 \times X_1$ при гомеоморфизме $\varphi(x, y) = (y, x)$. (Проверьте, что это гомеоморфизм!)

Произведение бесконечного числа пространств тоже определено, но требует отдельного обсуждения. Мы к этому вернемся.

$\sim$ *Графиком* отображения (не обязательно непрерывного) $f : X \to Y$ называется подмножество прямого произведения $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$.

- **Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ проекция $p_1|_{\Gamma_f}$ – гомеоморфизм Γ_f и X.**

Заметим, что $f = p_2(p_1|_{\Gamma_f})^{-1}$. Обозначим $(p_1|_{\Gamma_f})^{-1}$ через s.

$\Leftarrow$: Из условия следует, что $s : U \to \Gamma_f$, где U – область определения f, непрерывно. Но $f = p_2 s$.

$\Rightarrow$: Так как p_1 непрерывно и взаимно однозначно на Γ_f, нужно только показать, что s непрерывно.

Любая окрестность точки $s(x)$ на графике есть пересечение с графиком окрестности $s(x)$ относительно $X \times Y$, которую можно взять из базы, т.е. в виде $U \times V$, где $U(x)$ –окрестность в X, а $V(f(x))$ – в Y.

По условию непрерывности f, для данной окрестности $V(f(x)) \subset Y$ можно найти такую окрестность $U'(x)$, что $f(U') \subset V$. Тогда $s(U \cap U')$ лежит во взятой окрестности $U \times V$ и, значит, в данной окрестности $s(x)$ в графике f. ■

-=-=-=-

Плотность и сепарабельность

$\sim$ Подпространство $A \subset X$ называется *всюду плотным в пространстве* X, если $\bar{A} = X$, т. е. каждая точка X есть точка прикосновения для A.

(В частности, A содержит все изолированные точки X.)

$\sim$ Подпространство A называется *нигде не плотным в* X, если в каждом открытом множестве в X содержится открытое подмножество, не пересекающее A, иначе говоря, $\operatorname{Int} A = \emptyset$ (или $A = \operatorname{Fr} A$).

- **Открытое подмножество *всюду плотно* тогда и только тогда, когда дополнительное замкнутое подмножество *нигде не плотно*.**

Замыкание нигде не плотного множества также нигде не плотно.

□ Открытое множество, не пересекающееся с A не пересекается и с $\bar{A}$. ■

$\sim$ Пространство называется *сепарабельным*, если пространство имеет счетное всюду плотное подмножество.

(«Сепарабельное» означает “отделимое”, но это слово здесь не употребляют, из-за путаницы с T_2-пространствами, которые также иногда называют отделимыми.)

- Пространство со второй аксиомой счетности сепарабельно.

$\approx$ **Все подмножества евклидова пространства сепарабельны.**

□ Множество точек со всеми рациональными координатами счетно и плотно. ■

- В сепарабельном пространстве дизъюнктная система открытых множеств не более, чем счетна.

□ В каждом множестве возьмем по точке из счетного плотного множества. Эти точки попарно различны. ■

{***Дизъюнктная система*** **– это система множеств, которые попарно не пересекаются.**}

$\approx$ Две аксиомы счетности и сепарабельность – примеры топологических свойств.

- Непрерывное отображение $f: X \to Y, Y = f(X)$, сохраняет плотность подмножества и сепарабельность пространства.

□ Пусть $X = \bar{A}$. Тогда $f(X) \supset \overline{f(A)} \supset f(\bar{A}) = f(X)$. ■

-=-=-=-

Покрытия. Локально конечные и фундаментальные покрытия

$\sim$ Система $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ подмножеств множества X есть его *покрытие* (или *покрывает* X), если $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$: объединение этих подмножеств совпадает с X.

Если число элементов покрытия конечно или счетно, говорят, что покрытие соотв. *конечно* или *счетно*. Если элементы покрытия открытые или соотв. замкнутые подпространства пространства X, покрытие называется *открытым* или *замкнутым*.

$\sim$ Покрытие $\mathcal{V}$ *вписано* в покрытие $\mathcal{U}$, если каждый элемент $\mathcal{V}$ лежит в некотором элементе из $\mathcal{U}$.

- Во всякое открытое покрытие можно вписать покрытие элементами базы.

$\sim$ Покрытие пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка X имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов покрытия.

$\sim$ Покрытие пространства X называется *фундаментальным*, если подмножество X тогда и только тогда открыто, когда его пересечение с каждым элементом покрытия открыто (в индуцированной топологии). Ясно, что любое открытое покрытие фундаментально.

- **Локально конечное (в частности, конечное) покрытие замкнутыми множествами фундаментально.**

□ Пусть $\{F_\alpha\}$ замкнутые подмножества X, образующие локально конечное покрытие X, и пусть $H \subset X$ такое подмножество, что каждое пересечение $H \cap F_\alpha$ открыто относительно F_α. Покажем, что H открыто. Пусть $x \in H$.

Допустим для простоты, что некоторая окрестность $V(x)$ пересекается только с двумя множествами F_1 и F_2, причем $x \in F_1 \cap F_2$.

Пусть U_1 и U_2 – окрестности x в X такие, что $U_1 \cap F_1 = H \cap F_1$ и $U_2 \cap F_2 = H \cap F_2$. Множество $W = U_1 \cap U_2 \cap V$ есть окрестность x, лежащая в $V \subset F_1 \cup F_2$.

$W \cap F_i \subset U_i \cap F_i = H \cap F_i \subset H$, для $i = 1$ и 2.

Но $V \subset F_1 \cup F_2$, и $x \in W = W \cap V \subset W \cap (F_1 \cup F_2) = (W \cap F_1) \cup (W \cap F_2) \subset H$. ■

Покрытие множества рациональных точек в $\mathbb{R}$ точками не фундаментально, хотя

- **Покрытие отрезка всеми счетными подмножествами фундаментально.**

- Если покрытие $\mathcal{U}$ пространства X фундаментально, то отображение $f: X \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow$ непрерывно ограничение f на каждый элемент этого покрытия.

-=-=-=-=-=-

2. МЕТРИКА

-=-=-=-

Топология на множестве может порождаться различными структурами. Например порядковой, когда за базу принимаются интервалы. Но особенно важна метрическая структура, к которой мы переходим.

Метрика на множестве. Топология, порождаемая метрикой

$\sim$ *Расстоянием* или ***метрикой*** в множестве X называется функция $d: X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая *аксиомам метрики*:

a) $\forall x: \ d(x, x) = 0$;

b) $\forall\,(x,y):\ d(x,y)=d(y,x)$;

c) $\forall\,(x,y,z):\ \ d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (*аксиома треугольника*).

$\sim$ **Множество X с метрикой d называется *метрическим пространством***, которое обозначается (X,d) (или просто X).

$\sim$ Метрическое пространство X *ограничено*, если для некоторого a $d(x,y)<a$.

$\sim$ Любое подмножество метрического пространства X *наследует* метрику из X и называется (метрическим) *подпространством* в X.

$\sim$ В метрическом пространстве (X,d) *шаром радиуса r с центром в точке x_0* называется подмножество точек $x\in X$, для которых $d(x,x_0)\le r$. *Открытым шаром* или *r-окрестностью точки x_0* называется множество $\{y;\ d(x_0,y)<r\}$.

$\sim$ Метрическое пространство (X,d) порождает топологическую структуру $(X,\mathcal{T}_d)$ посредством *псевдобазиса* открытых шаров. Проверьте!

- **Открытые шары – *базис* получившейся топологии $\mathcal{T}_d$ в X.** Проверьте!

- **Если на множестве X заданы топологическая структура $\mathcal{T}$ и метрика d, то**

Структура $\mathcal{T}$ совпадает со структурой $\mathcal{T}_d$, порожденной метрикой $\Leftrightarrow$ Каждая топологическая окрестность каждой точки содержит метрическую окрестность (шар с центром в этой точке), и наоборот, каждый шар содержит топологическую окрестность каждой своей точки.

$\sim$ X называется *метризуемым*, если на X есть метрика d такая, что $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d$.

- Топологии, порожденные на X двумя метриками, совпадают $\Leftrightarrow$ Каждая точка открытого шара B_1 одной метрики имеет в B_1 окрестность B_2 другой метрики.

$\sim$ В этом случае они называются *(топологически) эквивалентными.*

$\approx$ Стандартная («пифагорова») метрика в $\mathbb{R}^n$ – $d(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$ – задает стандартную топологию, которую можно задать и метрикой $\sum_{i=1}^{n}|x^i-y^i|$.

- ***Функция метрики $\mathbf{d(x,y)}$ непрерывна по совокупности переменных.***
$\square$ $d(x',y')<2\delta+d(x,y)$, если $d(x,x')<\delta$ и $d(y,y')<\delta$. Значит $|d(x\,y)-d(x',\ y')|<2\delta$.$\blacksquare$

$\sim$ Расстояние $D(x_0,A)$ точки x_0 до подмножества $A\subset X$ определяется как $\inf(d(x_0,x))$, $\forall\,x\in A$;

расстояние $D(A,B)$ между множествами A и B – как $\inf_{(x,y)}(d(x,y))$, $x\in A,\ y\in B$.

$\mathbf{D(x,A)>0}$, если $\mathbf{x\notin A}$ и A замкнуто.

$\square$ Если x предельная, то $D(x,A)=0$, но если A замкнуто, то $x\in A$. $\blacksquare$

- **Функция $\mathbf{D_A(x)=D(x,A)}$ непрерывна по x.**

$=$ $D(A,B)$ не является метрикой на множестве всех подмножеств и даже на множестве всех замкнутых подмножеств: не выполнена аксиома треугольника.

- Метрические пространства имеют важные топологические свойства:

* они хаусдорфовы (точки разделены шарами, радиусы которых меньше половины расстояния между ними),

* в них выполнена первая аксиома счетности (шары радиуса 1/n),

* **метрические сепарабельные пространства имеют счетную базу**, состоящую из объединения счетных локальных баз точек счетного плотного множества.

- **В метрическом пространстве множество точек, в которых значения двух непрерывных функций равны, замкнуто.**

$\square$ Дополнение распадается на два непересекающихся *открытых* подмножества, в каждом из которых одна функция больше другой. $\blacksquare$

В частности, для каждого из двух замкнутых непересекающихся подмножеств метрического пространства множество точек, расстояние которых до него меньше, чем до другого, открыто. Таким образом,

замкнутые непересекающиеся подмножества отделимы непересекающимися окрестностями.

Это свойство называется *нормальностью* пространства, мы к нему вернемся дальше с общей точки зрения.

-=-=-=-

Сходимость последовательностей. Полнота

$\sim$ Благодаря первой аксиоме счетности, в метрическом пространстве M можно определить понятие предела последовательности и пользоваться понятием ε-окрестности, как в курсе анализа.

- Для каждой предельной точки x_0 подпространства $A \subset M$ имеются нетривиальные последовательности $a_i \neq a_0$ точек A, пределом которых она является.

- Отображение f одного метрического пространства в другое непрерывно (в смысле топологии) $\Leftrightarrow$ f переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся.

$\sim$ Сохраняет свое значение и известное из курса анализа определение понятия *фундаментальной последовательности (последовательности Коши)*.

$\sim$ Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел, называется ***полным***.

- Очевидно, замкнутое подмножество полного пространства полно.

- *Теорема 1.* **В полном пространстве пересечение убывающей последовательности замкнутых подмножеств $A_i \supset A_{i+1}$, диаметры которых стремятся к нулю, состоит из одной точки.**

□ Возьмем $a_i \in A_i$, получим фундаментальную последовательность $\{a_i\}$. ■

- *Теорема 2.* **Пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств полного метрического пространства X всюду плотно в X.**

□ Занумеруем данную систему открытых множеств: U_n, и пусть дано еще одно открытое подмножество W.

Строим счетную последовательность окрестностей V_n так, что $V_n \subset (\bigcap\limits_{1\leq i\leq n} U_i)\cap W$, каждая V_n с замыканием лежит в V_{n-1} и диаметры V_n стремятся к нулю.

По теореме 1, $\bigcap\limits_{1\leq i<\infty} V_i$ состоит из одной точки, и она лежит в $(\bigcap\limits_{1\leq i<\infty} U_i) \cap W$. ■

$\sim$ Множество, являющееся пересечением счетного числа открытых множеств называется множеством типа G_δ, а объединение счетного числа замкнутых множеств – множеством типа F_σ. Известно, что всюду плотное G_δ-множество в полном пространстве само имеет полную метрику (например, множество иррациональных чисел.)

- Переходя к дополнениям, из теоремы 2 получаем:

Теорема 3. **Полное метрическое пространство X не может быть покрыто счетной системой замкнутых нигде не плотных множеств.**

$\approx$ Множество рациональных чисел не полно ни в какой метрике, т.к. оно – счетное объединение своих точек, но оно плотно на отрезке. А G_δ-множество иррациональных чисел полно (но не в своей стандартной метрике!) и оно не есть сумма счетного числа нигде не плотных замкнутых подмножеств. Метрика, в которой это пространство полно, представлена у Александрова (глава 4, §6, стр. 154-5). С этой метрикой оно называется *пространством Бэра.*

-=-=-=-

Прямое произведение метрических пространств.

$\sim$ Дадим сначала общее определение прямого произведения $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ топологических пространств, принадлежащее А.Н. Тихонову. Множество M, которым индексированы пространства-сомножители, может иметь любую мощность. Точками пространства-произведения являются системы, состоящие из наборов $\{x_\alpha\}$ – по одной точке x_α из каждого множества X_α.

$\{$***Здесь возникает логическая трудность: существование таких наборов приходтся оправдывать специальной аксиомой теории множеств – «аксиомой выбора» (существование множества, которое с каждым X_α пересекается по одной точке), для нее доказана независимость от других аксиом – она не противоречит, но и не выводится из других аксиом..***$\}$

Псевдобазисом **топологии в $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ служат подмножества, получающиеся заменой в произведении $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ одного сомножителя его открытым подмножеством.**

Здесь множество индексов M может иметь любую мощность. Но мы дальше рассматриваем только счетные произведения.

В метрическом случае имеется два определения *топологии произведения* (заданной непосредственно указанием базы и индуцированной метрикой), и нужно проверить их согласованность:

$\sim$ ***Прямым произведением*** $\mathbf{T} = \prod_{\mathbf{i}} \mathbf{X_i}$ **(счетной последовательности)** ***топологических пространств*** называется прямое произведение множеств X_i (т.е. множество последовательностей $\{x_i\}$, $x_i \in X_i$), в котором топология вводится с помощью предбазы, состоящей из подмножеств $\mathbf{T}$, получающихся заменой в $\mathbf{T}$ одного из сомножителей X_i открытым подмножеством в этом сомножителе.

Базой служат подмножества, получающиеся заменой конечного числа сомножителей их открытыми подмножествами, которые можно брать из базы в сомножителе.

(Заметим, что это определение удовлетворяет категорному требованию: проекции на сомножители будут автоматически непрерывными.)

Например, в прямом произведении n отрезков базой будет система произведений интервалов, т.е. открытых параллелепипедов.

$\sim$ ***Прямым произведением*** M ***метрических пространств*** (X_i, d_i) **называется прямое произведение множеств X_i с метрикой:** $d(x,y) = \sum \frac{1}{m^2}\frac{d_m(x_m,y_m)}{1+d_m(x_m,y_m)}$.

- Заметим, что функция $\frac{x}{1+x}$ монотонно возрастает, что позволяет проверить аксиому треугольника: обозначим координатные расстояния
$a = d_m(x_m,y_m)$, $b = d_m(y_m,z_m)$, $c = d_m(z_m,x_m)$, тогда

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+b+2ab}{1+(a+b)+ab} > \frac{a+b+ab}{1+(a+b)+ab} > \frac{a+b}{1+(a+b)} > \frac{c}{1+c}.$$

Неравенство выполнено покоординатно, отсюда следует его выполнение для M.

- Остается проверить, что в каждой топологической окрестности точки произведения лежит метрическая окрестность, и в каждой метрической топологическая.

Нам удобно использовать разложение $\frac{\pi^2}{6}$ в ряд: $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ (Фихтенгольц, 1966, том III, п.690, стр. 451). (Из сходимости этого ряда следует, что введенная нами метрика прямого произведения ограничена.)

$\square$ Для данного $\varepsilon > 0$ возьмем n так, чтобы $\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем *метрические* окрестности $U_k = U(x_k, \frac{3\varepsilon}{k^2})$ в пространствах-сомножителях X_k.

Пусть $V(x)$ *топологическая* окрестность точки $\{x_k\}$ с условием $x'_k \in U_k$, $k \le n$, для $x' \in V(x)$ (в сомножителях метрика согласована с топологией).

Тогда $d(x,x') = \sum_1^n + \sum_{n+1}^\infty \le \frac{3\varepsilon}{\pi^2}\sum_1^n \frac{1}{k^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{3\varepsilon}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. $V(x) \subset U(x,\varepsilon)$.

Обратно. Пусть *топологическая* окрестность $V(x)$ определена условием, что координатные проекции x'_{k_i}, $1 \le i \le s$, ее точек x' лежат в окрестностях $U_{k_i} = U(x_{k_i}, \varepsilon_{k_i})$. Положим $\varepsilon = \min \left[\frac{1}{k_i^2} \frac{\varepsilon_{k_i}}{1+\varepsilon_{k_i}} \right]$, $1 \le i \le s$.

Если точка x' лежит в *метрической* окрестности $U(x, \varepsilon)$, то $d(x, x') < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{k_i^2} \frac{d(x_{k_i}, x'_{k_i})}{1+d(x_{k_i}, x'_{k_i})} < \varepsilon < \frac{1}{k_i^2} \frac{\varepsilon_{k_i}}{1+\varepsilon_{k_i}}$, и $x' \in V(x)$. ■

-=-=-=-

Гильбертово пространство $\mathbb{H}$ и гильбертов куб $\mathbf{I}^\infty$

≈ **Гильбертово пространство** $\mathbb{H}$ есть важнейший пример полного метрического пространства. В анализе это одно из основных бесконечномерных *линейных* (= векторных) пространств, но нам важны его топологические свойства.

Одно из определений H следующее. Точками $\mathbb{H}$ являются последовательности вещественных чисел со сходящейся суммой квадратов. Метрика определяется "по Пифагору" как квадратный корень из (бесконечной) суммы квадратов разностей координат. ($\mathbb{H}$ с этим определением называется в анализе *пространством* l_2).

Аксиома треугольника доказывается известным из курса анализа способом с помощью формулы Коши – Буняковского и предельного перехода. Полнота следует из того, что проекция фундаментальной последовательности точек на каждую ось будет фундаментальной, полученная точка принадлежит $\mathbb{H}$ (благодаря неравенству Коши – Буняковского) и, очевидно, будет пределом данной последовательности.

- **Гильбертово пространство сепарабельно, значит, имеет счетную базу.**

≈ **Гильбертов куб (параллелепипед, кирпич)** $\mathbf{I}^\infty$.

Множество точек в гильбертовом пространстве, в котором координата с номером k лежит в отрезке $[0, \frac{1}{2^k}]$ называется ***гильбертовым кубом*** $\mathbf{I}^\infty$ (чаще *кирпичем* или реже *параллелепипедом*, поскольку каждая следующая по номеру сторона вдвое меньше предыдущей, как у кирпича).

Заметим, что точки, у которых все координаты нулевые, начиная с $(n+1)$-ой, образуют n-мерный параллелепипед, причем его $\frac{1}{2^n}$-окрестность содержит весь $\mathbf{I}^\infty$. Позже мы увидим, что гильбертов куб компактен и имеет другие важные свойства.

Топология в $\mathbf{I}^\infty$ была задана гильбертовой метрикой d_h, отличной от метрики d_p прямого произведения, согласованной, как показано на предыдущей странице, с топологией $\mathcal{T}_p$ прямого произведения: $\mathcal{T}_{d_p} = \mathcal{T}_p$. Оказывается, d_h тоже согласована с $\mathcal{T}_p$, т.е. $\mathcal{T}_{d_h} = \mathcal{T}_p$, значит, метрики эквивалентны ($\mathcal{T}_{d_h} = \mathcal{T}_{d_p}$):

- **$\mathbf{I}^\infty$ есть произведение счетного числа отрезков** : $\mathbf{I}^\infty = \prod_{i=1}^\infty [0, \frac{1}{2^i}] = \prod \mathbf{I}_i$.

□ Представим $\mathbf{I}^\infty$ для данного n как $\mathbf{I^n} \times \mathbf{I}^{\infty-n}$, где $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}_1 \times \cdots \times \mathbf{I}_n$, $\mathbf{I}_i = [0, \frac{1}{2^i}]$ и $\mathbf{I}^{\infty-n}$ – произведение остальных отрезков. Соответственно точка $x = \{x_i\} \in \mathbf{I}^\infty$ представляется как $(x^n, x^{\infty-n})$, $x^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{I}^n$, $x^{\infty-n} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \in \mathbf{I}^{\infty-n}$. Заметим, что $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathbf{I}^{\infty-n} = 0$.

Возьмем топологическую окрестность U точки $x \in \mathbf{I}^\infty$, $x = \{x_i\}$, из базы $\mathcal{T}_p$ (прямого произведения), т.е. для некоторого n, $U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \mathbf{I}^{\infty-n}$, где U_i – интервалы в $\mathbf{I}_i$ (если $x_i = 0$ или 1, то берем полуинтервал); возможно, $U_i = \mathbf{I}_i$. Пусть $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, где ε_i-окрестность x_i лежит в U_i. Можно допустить, что $\operatorname{diam} \mathbf{I}^{\infty-n} < \varepsilon/2$. В таком случае $\varepsilon/2$-окрестность точки x (взятая в метрике d_h) лежит в U. (Если сумма квадратов разностей меньше a^2, то модуль каждой разности меньше a).

Пусть V – *ε-окрестность точки* $x = \{x_i\} \in \mathbf{I}^\infty$ *в метрике* d_h. Возьмем n столь большим, что диаметр $\mathbf{I}^{\infty-n}$ меньше $\varepsilon/2$. Для каждого $\mathbf{I}_i$ возьмем интервал U_i с центром в x_i (если $x_i = 0$ или 1, то берем полуинтервал) столь малый, что диаметр параллеллепипеда $U_1\times\cdots\times U_n$ меньше $\varepsilon/2$. Тогда $U_1\times\cdots\times U_n\times\mathbf{I^{\infty-n}}$ есть окрестность из базиса $\mathcal{T}_p$, которая лежит в V. ■

$=$ (Гильбертово пространство топологически гомеоморфно произведению счетного числа прямых, но это трудная теорема, высказанная как гипотеза одним из основателей общей топологии Фреше в начале XX-го века, и доказанная американским топологом Р. Андерсоном: R.D. Anderson. Bulletin AMS, 72, 1966, p.515-519)

-=-=-=-=-=-

3. СВЯЗНОСТЬ

-=-=-=-

Определение связности

$\sim$ Пространство *связно*, если его нельзя *разбить* на два открытых подмножества.

((***Разбиением*** **множества X на подмножества A_α называется представление X в виде объединения $\bigcup_\alpha A_\alpha$, где A_α попарно не пересекаются и не пусты.**))

- Связность является топологическим свойством. Более того:

Непрерывный образ связного пространства связен.

□ Если образ разбит на два открытых множества, то прообраз разбит на их прообразы, которые открыты. ■

-=-=-=-

Компоненты. Вполне несвязные пространства. Интервалы в $\mathbb{R}$

- Добавление предельных точек к связному множеству не нарушает связности.

- **Если множество связно, то его замыкание также связно.** Докажите!

- **Если пересечение двух связных множеств содержит общую предельную точку, то их объединение связно.**

- **Если два связных множества имеют общую предельную точку, которая принадлежит хотя бы одному из них, то объединение связно.**

□ Пусть точка x_0 предельная для каждого из множеств A_1, A_2 и $x_0\in A_1$. Пусть $M=A_1\cup A_2=U_1\cup U_2$, где U_i открыты в M и не пересекаются. Каждое из множеств A_i лежит целиком в одном из множеств U_j.

Допустим, $x_0\in U_1$, тогда также $A_1\subset U_1$, значит, $A_2\subset U_2$. Но тогда x_0 не есть предельная точка для A_2. ■

$\sim$ В пространстве X рассмотрим все связные замкнутые подмножества, содержащие данную точку x_0. Их объединение связно и замкнуто. Принадлежность двух точек к одному связному подмножеству оказывается отношением эквивалентности. X распадается в дизъюнктное объединение замкнутых связных подмножеств. Их называют *компонентами связности* или просто ***компонентами*** пространства X.

$\approx$ Компонентами дискретного пространства, очевидно, являются точки. Компонентами множества рациональных чисел на прямой или иррациональных чисел также являются точки.

$\sim$ Пространства, компоненты которых – точки, называются *вполне несвязными*. В $\mathbb{R}^n$, например, таковы счетные множества или множество точек, у которых все координаты иррациональны. Более интересные примеры рассмотрены дальше.

- Компоненты открытых подмножеств евклидовых пространств открыты (см. следущий раздел); т.е. они являются связными открытыми подмножествами.

(Такие подмножества иногда называют *областями*).

≈ **На числовой прямой R связные подмножества – *интервалы*.**

∼ *Интервал* X в $\mathbb{R}$ это множество всех чисел между двумя данными, a и b, «концами» X, с возможным включением в X одного или обоих концов, причем возможно, что $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$. Возможно также, что $a = b$, т.е. точки считаются интервалами.

(Это определение переносится на любое упорядоченное множество, с транзитивным и несимметричным отношением порядка.)

На прямой вместе с $\emptyset$ (пустым интервалом) всего получается 11 типов: конечные (замкнутые – отрезки, точки, открытые, полуоткрытые вправо и влево) и бесконечные (вся прямая и лучи, замкнутые и открытые, вправо и влево).

Утверждение доказывается с помощью *дедекиндова сечения в* $\mathbb{R}$.

Дедекиндово сечение в упорядоченном множестве M – это разбиение M на два непустых подмножества A и B так, что все элементы A меньше всех элементов B. По Дедекинду, сечение в $\mathbb{R}$ задает число c, равное или $\max\limits_{x\in A} x$, или $\min\limits_{x\in B} x$.

(Дедекинд ***определяет*** вещественные числа как сечения *в области* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел*. Иррациональное число – это сечение в $\mathbb{Q}$, в котором нет максимального элемента у нижнего класса и минимального у верхнего. Например, $B : \{x\}$, $x > 0$ и $x^2 > 2$, A – остальные числа.

□ Пусть X интервал в $\mathbb{R}$, и $X = U_1 \cup U_2$, где U_i открыты в X и не пересекаются, $a \in U_1$, $b \in U_2$, $a < b$, отрезок $[a, b] \subset X$. Рассмотрим сечение, в котором к нижнему классу (A) отнесем числа меньшие b и отделенные от b какой-либо точкой U_1, а к верхнему (B) остальные. Оба класса не пусты, числа нижнего меньше чисел верхнего.

Согласно дедекиндову определению вещественных чисел, имеется число c, которое не меньше всех чисел A и не больше всех чисел B. Ясно, что $a \le c \le b$, $c \in X$, причем $(c, b) \subset B$.

Но такое число не может принадлежать ни к U_1, ни к U_2: $c \notin U_1$, т.к. иначе имеются точки A большие c, и $c \notin U_2$, т.к. тогда вблизи от c нет точек A.

Обратно. Если X связное подмножество $\mathbb{R}$, оно содержит с каждой парой своих точек a, b весь отрезок $[a, b]$, иначе точка $c \in [a, b]$, не лежащая в X, разобъет X на два открытых множества точек больше и точек меньше c.

Если X ограничено снизу, построим дедекиндово сечение, отнеся к нижнему классу A точки, для которых все меньшие не лежат в X. Точка a, определенная сечением, служит нижней граничной точкой для X: как угодно близко от нее есть точки X.

Аналогично найдем верхнюю граничную точку b, если X ограничено сверху. Сами точки a и b могут не принадлежать X, но весь интервал между ними принадлежит X, т.к. как угодно близко к a и к b есть точки X, а вне отрезка $[a, b]$ точек X нет.

В зависимости от ограниченности X и принадлежности к X граничных точек, получим все типы интервалов. ■

- **Для непрерывной функции, определенной на связном множестве, например, интервале, интервал между двумя точками в ее образе весь лежит в образе.** (Докажите! Это – теорема Больцано *о промежуточном значении.*)

-=-=-=-

Пути. Линейная связность. $\sin\frac{1}{x}$. *Локальная связность*

∼ Непрерывное отображение отрезка в X называется ***путем*** в X (иногда *параметризованной кривой*).

∼ Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки *соединимы* путем в X (т.е. служат образами концов отрезка).

- **Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно $\Leftrightarrow$ U линейно связно.**

$\Rightarrow$: Подмножество V точек открытого связного множества $U \subset \mathbb{R}^n$, достижимых путем из точки $a \in U$, открыто (если b достижима, то и все точки из малой ε-окрестности достижимы) и замкнуто (если в ε-окрестности точки $b \in U$ имеются достижимые точки, то и b достижима). Т.к. U связно, $U = V$.

$\Leftarrow$: Если $X = U_1 \cup U_2$, где U_i открыты и не пересекаются, а $f : [0, 1] \to X$ – путь в X, причем $f(0) \in U_1$, $f(1) \in U_2$, то отрезок $[0, 1]$ разбит на два открытых не пересекающихся и непустых подмножества $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$. ■

- Последнее рассуждение показывает, что, вообще,

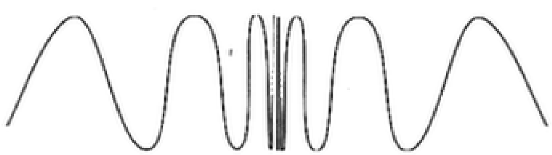
из линейной связности пространства вытекает его связность.

Обратное неверно.

≈ **Стандартным примером связного, но не линейно связного пространства является "*синусоида*" S**, точнее:

График функции $\sin 1/x$, к которому добавлен отрезок $[-1, +1]$ оси ординат.

□ S *связно*, т.к. точки вертикального отрезка являются предельными для двух половин графика, а каждая половина гомеоморфна лучу (области определения).



1.png

S *не линейно связно:* Пусть в S имеется путь l, соединяющий точку $l(0)$ центрального отрезка с точкой $l(1)$ на правой части графика. Построим дедекиндово сечение на отрезке $[0, 1]$, отнеся к верхнему классу точки t отрезка, для которых отрезки $[t, 1]$ целиком отображаются в правую часть графика. Точка t_0, определенная сечением, отображается в точку a на центральном отрезке.

Рассматривая отображение l только на отрезке $[t_0, 1]$, возьмем малую окрестность U точки a. Она состоит из интервала s на центральном отрезке и еще бесконечной последовательности непересекающихся дуг, стремящихся к интервалу s. Прообраз U открыт в $[t_0, 1]$ и содержит малый полуинтервал $[t_0, t_1)$ со связным образом.

U можно разбить на два непересекающихся открытых множества (одно – дуга, содержащая $l(t_1)$, другое множество – все остальное – содержит a). Но образ $[t_0, t_1]$ в этом случае есть путь соединяющий точки из непересекающихся открытых подмножеств U, что невозможно. ■

∼ *Локально связным* называется пространство, каждая точка которого имеет *сколь угодно малую связную окрестность* (т.е. в каждой окрестности точки есть меньшая с требуемым свойством).

∼ *Локально линейно связным* называется пространство, в каждой окрестности каждой точки которого найдется меньшая окрестность, любые две точки которой соединимы путем в данной большей окрестности.

≈ «Синусоида» S не имеет этих двух свойств в точках вертикального отрезка. С другой стороны их имеет любой непрерывный образ отрезка (см. дальше, стр.26).

-=-=-=-=-=-

4. КОМПАКТНОСТЬ

-=-=-=-

$\sim$ ***Определения компактности***

I. Пространство X называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие имеет конечное *подпокрытие.*

- Две эквивалентные формулировки:

II. каждое открытое покрытие имеет *вписанное* конечное открытое покрытие;

III. каждое открытое покрытие имеет вписанное конечное покрытие *элементами базы.*

- Переходя к дополнениям, получаем характеризацию компактности в терминах замкнутых подмножеств (основываясь на том, что непустота пересечения системы множеств означает покрытие X системой дополнительных множеств).

Введем понятие центрированной системы подмножеств:

$\sim$ Система подмножеств пространства X называется *центрированной*, если каждая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение.

- **I. Пространство X компактно $\Leftrightarrow$ IV. Каждая центрированная система замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.**

$\Leftarrow$ От противного: если конечные подсистемы системы открытых множеств не покрывают X, то пересечения конечных подсистем системы дополнительных подмножеств не пусты, тогда система центрирована и имеет непустое пересечение, значит, данная система не покрывает X.

$\Rightarrow$: Если данная система замкнутых множеств имеет пустое пересечение, то система дополнительных открытых множеств образует покрытие, и если некоторые ее конечные подсистемы покрывают X, значит, данная система не центрирована. $\blacksquare$

- Компактность является, очевидно, топологическим свойством. Более того:

- **Образ непрерывного отображения компактного пространства компактен.**

$\square$ Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение компактного пространства X, $f(X) = Y$ и $\{U_\alpha\}$ открытое покрытие Y. Тогда $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ открытое покрытие X, из которого по условию можно выделить конечное покрытие $\{V_1, \ldots, V_k$. Тогда $U_i = f(V_i)$ образуют конечное подпокрытие данного покрытия Y. $\blacksquare$

-=-=-=-

Свойства компактности. Произведение компактных пространств

- **Замкнутые подмножества компактного пространства компактны.**

$\square$ К данному покрытию замкнутого подмножества $A \subset X$ достаточно присоединить дополнение $\mathcal{C}A = X \setminus A$. $\blacksquare$

-**В хаусдорфовом компактном пространстве непересекающиеся замкнутые подмножества отделимы непересекающимися окрестностями.**

$\square$ Для $a \in A$ и $b \in B$ найдем $U_{ab} \ni a$ и $U_{ba} \ni b$, $U_{ab} \cap U_{ba} = \emptyset$; для фиксированной b, выделяя конечное покрытие A, возьмем $U_{A\,b} = \bigcup_{a_i} U_{a_i\,b}$ и $U_{b\,A} = \bigcap_{a_i} U_{b\,a_i}$. Выделяя конечное покрытие B, получим: $U_A \cap U_B = \emptyset$, где $U_A = \bigcap_{b_j} U_{A\,b_j}$ и $U_B = \bigcup_{b_j} U_{b_j\,A}$. $\blacksquare$

- **Компактное подпространство A *хаусдорфова* пространства замкнуто.**

$\square$ Пусть $b \in X$ предельная точка компактного A и $b \notin A$. Для каждой точки $a \in A$ возьмем непересекающиеся окрестности $U(a)$ и $V(b)$. Выделим конечное покрытие $U_i(a_i)$. Пересечение соответствующих окрестностей $\bigcap_i V_i(b)$ – открытое множество, содержащее b и не содержащее A. Значит, b не предельная точка для A. $\blacksquare$

В T_1-пространстве это может быть неверным:

≈ **Пример компактного нехаусдорфова T_1-пространства.**

Преобразуем отрезок $[0,1]$ в новое пространство X, заменив точку 0 двумя точками a и b. Окрестности a такие, как у 0 в $[0,1]$, но с заменой 0 на a, аналогично для b. Остальные окрестности, как в $(0,1]$. Очевидно, $X \setminus b$ и $X \setminus a$ гомеоморфны $[0,1]$ и компактны, но замыкание того и другого есть все X. Любые окрестности a и b пересекаются, и X есть T_1-, но не T_2-пространство. ■

- **Непрерывное отображение $f : X \to Y$ компактного пространства X в хаусдорфово Y замкнуто.**

□ Замкнутое множество $A \subset X$ компактно, fA компактно в Y и потому замкнуто.■

- **Взаимнооднозначное непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом на свой образ.**

(Т.е. *уплотнение* компактного пространства является *вложением.*)

- ***Произведение $X \times Y$ компактных пространств X и Y компактно.***

□ Пусть U_α открытое покрытие произведения. В него вписано покрытие базисными элементами $V_\beta \times W_\gamma$. Для каждой точки $x \in X$ имеется конечное множество элементов $V_i(x) \times W_j(x)$ покрытия, которые покрывают компактный "слой" $x \times Y$. Их объединение содержит окрестность вида $V_x \times Y$ этого слоя ($V_x = \bigcap_i V_i(x)$).

Из окрестностей V_x выберем конечное покрытие V_{x_i} для X. Тогда $\bigcup_i (V_{x_i} \times Y) = X \times Y$, и отобранные для каждой точки x_i элементы $V_{x_i} \times W_j(x_i)$ образуют конечное покрытие $X \times Y$, вписанное в U_α. ■

= По теореме Тихонова **произведение любого множества компактных пространств компактно.** Эта теорема требует для доказательства аксиомы выбора и леммы Цорна и остается за пределами нашего курса (см. Александров глава 6, §4)

Мы рассмотрим только счетное произведение метрических компактных пространств.

-=-=-=-

Локальная компактность. Компактификации

Свойство компактности локализуется:

∼ *Локально компактным* называется пространство, каждая точка которого имеет окрестность с компактным замыканием. Такая окрестность (по желанию, открытая или замкнутая) называется *компактной окрестностью.* Очевидно, открытые подмножества компактных пространств локально компактны. Наоборот,

- **Локально компактное хаусдорфово пространство гомеоморфно *открытому плотному* подмножеству хаусдорфова компактного пространства.**

≈ Среди всех таких *компактных расширений* или *компактификаций* локально компактного пространства имеется единственное *минимальное*, получаемое добавлением всего одной точки:

Пусть X локально компактное хаусдорфово пространство и $Y = X \cup \omega$ рассматривается с топологией, в которой открытые подмножества в X остаются старые, а окрестностями точки ω служат объединения ω *с дополнениями к компактным подпространствам* в X. Это – одноточечная компактификация Александрова.

□ $Y = X \cup \omega$ *компактно*, X открыто и плотно в Y. – Очевидно

Y *хаусдорфово.* – Для пар точек в X это дано. Пусть $x \in X$ и $V(x)$ окрестность с компактным замыканием. Тогда V и дополнение к $\overline{V}$ в Y разделяют x и ω. ■

≈ Примером является представление сферы как одноточечной компактификации евклидова пространства, получаемого, например, *стереографической проекцией* (из северного полюса сферы на плоскость, которой она касается южным полюсом).

≈ Для T_1-пространств имеется конструкция одноточечного расширения, отличающаяся от александровской тем, что берутся *дополнения к конечным подмножествам.* Для бесконечного и не дискретного X эта компактификация не хаусдорфова.

= (Упомянем еще, что имеется конструкция Стоуна – Чеха *максимального* (в естественном смысле) компактного расширения, применимого к *вполне регулярным* пространствам (см. стр. 30), в частности, к нормальным пространствам, см. книгу Александрова, стр. 271.)

-=-=-=-

Компактность в $\mathbb{R}^n$. Теоремы Вейерштрасса

В курсе анализа доказывалась характеристика компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$:

-**Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow$ A замкнуто и ограничено.**

$\Rightarrow$: Компактное подмножество A в $\mathbb{R}^n$ лежит в конечном объединении шаров и, значит, в достаточно большом кубе, т.е. *ограничено.*

Компактное A *замкнуто*, т.к. $\mathbb{R}^n$ хаусдорфово.

$\Leftarrow$: Ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ лежит в кубе, который компактен, и тогда замкнутое A компактно. ■

- **Непрерывная функция на компактном пространстве ограничена и принимает экстремальные (максимальное и минимальное) значения**.

□ Образ компактен, он лежит на прямой, ограничен и замкнут, экстремальные значения являются предельными точками и, значит, принадлежат образу. ■

- Для функций на (компактном) отрезке получается в качестве частного случая

Теорема Вейерштрасса: непрерывная функция на отрезке ограничена и принимает экстремальные значения.

-=-=-=-=-=-

5. КОМПАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА (КОМПАКТЫ)

-=-=-=-

Определения компактов

∼ **Компактное метрическое пространство называется *компактом*.**

Для компактов, разумеется, верны приведенные ранее четыре эквивалентных определения компактности. В метрическом случае из них следует, что

- **Каждый компакт F имеет счетную базу.**

□ Счетную базу образуют элементы конечных $1/n$-покрытий: если U окрестность $x \in F$ и d расстояние от x до $\mathcal{C}U$, возьмем n так, чтобы $1/n < d/2$.

- **Каждый компакт F сепарабелен.**

□ Достаточно взять по точке в каждом элементе счетной базы. ■

(Наоборот, дальше будет видно, что компактные пространства со счетной базой метризуемы, т.е. являются компактами.(стр. 31)

- В метрическом случае общее определение компактности можно еще дополнить несколькими эквивалентными формулировками. Две формулировки из анализа:

V. **Всякая убывающая последовательность замкнутых подмножеств в метрическом пространстве X** (*это – частный случай центрированной системы*) **имеет непустое пересечение.**

V $\Rightarrow$ II: Во-первых, при каждом n из любого покрытия X $1/n$-шарами можно выделить конечное. Иначе можно найти последовательность точек x_i, попарные расстояния которых $d(x_i, x_j) > 1/n$. Тогда последовательность подмножеств $A_k = \bigcup_{i>k} x_i$ имеет пустое пересечение.

В любое открытое покрытие можно вписать покрытие $1/n$-шарами, из которого, как показано, выделяется конечное покрытие. ■

VI. **Из всякой последовательности точек можно выделить подпоследовательность, имеющую предел.**

I + V $\Rightarrow$ VI: Рассмотрим последовательность *конечных* $1/n$-покрытий и из них отберем убывающую (к нулю) последовательность окрестностей, содержащих каждая бесконечное множество элементов последовательности. Окрестности, как и их замыкания, сходятся к единственной точке, служащей пределом некоторой подпоследовательности данной последовательности точек.

VI $\Rightarrow$ I: Данное покрытие заменим вписанным счетным покрытием $\{U_i\}$ базисными элементами. Пусть точка a_k не принадлежит $\bigcup_{i\le k} U_i$. Последовательность a_k не имеет предельных точек. ■

В частности,

фундаментальная последовательность в компакте имеет предел.

-=-=-=-

Компактность и полнота

$\sim$ В метрическом пространстве X *ε-сетью* называется конечное множество точек такое, что ε-шары с центрами в этих точках образуют покрытие X. Очевидно, подмножество, имеющее ε-сеть при каком-либо $\varepsilon > 0$, *ограничено*.

$\sim$ Множество называется *вполне ограниченным*, если имеет ε-сеть при любом ε.

Компакты вполне ограничены. Более того, мы имеем, на самом деле, еще одно определение компактов:

-**Теорема.** **Метрическое пространство X есть компакт $\Leftrightarrow$**
VII. X полно и вполне ограничено.

$\Rightarrow$: Сходимость последовательностей Коши следует из VI. Полная ограниченность – из существования конечных покрытий $1/n$-окрестностями.

VI $\Leftarrow$ VII: Пусть дана бесконечная последовательность x_i. Построим последовательность ε_i-сетей при $\varepsilon_i \to 0$ и отберем убывающую последовательность ε_i-шаров, каждый из которых содержит бесконечно много точек последовательности x_i.

Из полноты X и теоремы 1 раздела «Метрика» следует, что имеется точка в пересечении этих шаров, предельная для отобранной подпоследовательности. ■

$\approx$ Например, **гильбертов кирпич $\mathbf{I}^\infty$ компактен**.

☐ Он полон как замкнутое подмножество полного пространства.

Мы видели, что для произвольно малого $\varepsilon > 0$ он является ε-окрестностью лежащего в нем евклидова параллелепипеда достаточно большой размерности.

Тогда ε-сеть этого параллелепипеда является 2ε-сетью в $\mathbf{I}^\infty$. ■

Это же рассуждение годится и для общей теоремы:

- **Произведение счетного числа компактов есть компакт**.

□ Произведение полных пространств полно. Произведение конечного числа компактных сомножителей компактно, имеет ε-сети и ε-*плотно*, если взять для него достаточно много сомножителей в данном счетном произведении компактов.) ■

- Мы видели, что $\mathbf{I}^\infty$ гомеоморфен счетному произведению отрезков. Это дает другое доказательство компактности $\mathbf{I}^\infty$.

-=-=-=-

Лемма Лебега

- К компактам применимы теоремы из анализа о непрерывных отображениях отрезка и их доказательства, например: равномерная непрерывность непрерывного отображения компакта в метрическое пространство; равномерная сходимость монотонной последовательности функций к непрерывному пределу и др.

- Топологической формой теоремы о равномерной непрерывности является следующее утверждение:

Пусть $f : X \to Y$ – отображение компакта в топологическое пространство. Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства Y найдется такое $\delta > 0$, что для любого подмножества в X диаметра меньше δ его образ лежит в некотором элементе данного покрытия Y.

□ В силу непрерывности f, для каждой точки $x \in X$ найдется шар $V(x)$ радиуса $r(x)$, образ которого лежит в элементе $U(x)$ покрытия, содержащем $f(x)$.

Рассмотрим покрытие $\{W(x)\}$ шарами радиусов $r(x)/2$, $W(x) \subset V(x)$ и отберем из него конечное подпокрытие $W(x_i)$. Пусть δ минимум радиусов отобранных шаров.

Множество F диаметра δ пересекается с некоторым $W(x_i)$ и лежит на расстоянии меньшем $r_i/2$ от x_i, значит, в $V(x_i)$. Тогда $f(F)$ лежит в некотором $U(x_i) \in \{U_\alpha\}$. ■

Взяв в качестве f тождественное отображение X получим *лемму Лебега*:

- **Для любого открытого покрытия компакта имеется такое $\delta > 0$, что любое подмножество X диаметра меньше δ лежит в некотором элементе этого покрытия.**

-=-=-=-

Строение компакта.

Канторово множество $\mathbb{K}$ и дисконтинуумы

$\sim$ Компакт без изолированных точек называется *совершенным*. (Совершенным называют и вообще всякое замкнутое подмножество без изолированных точек.)

- **Каждый компакт X есть дизъюнктное объединение совершенного компактного подмножества P и открытого счетного множества Q, состоящего из точек, имеющих окрестность с не более чем счетным множеством точек X.** Каждая из этих частей может быть пустой.

□ Если точка компакта X имеет окрестность, в которой лежит счетное множество точек X, то такую окрестность можно взять из счетной базы. Объединение Q отобранных окрестностей содержит счетное множество точек X. Тогда каждая окрестность каждой точки из дополнения P к этому объединению (если оно не пусто) имеет нечетно много точек X. P компактно, т.к. замкнуто в X, и P не имеет изолированных точек. ■

- Ниже показано, что множество точек в каждой окрестности совершенного компакта имеет мощность континуума. Поэтому если в окрестности точки множество точек из X счетно, то в ней есть изолированные точки.

$\sim$ *Дисконтинуумом* называется совершенный вполне несвязный компакт, т.е. компакт, компоненты которого точки.

≈ ***Канторов дисконтинуум*** $\mathbb{K}$ – нигде не плотный компакт на прямой без изолированных точек, который строится следующим образом:

Из отрезка $[0,\ 1]$ последовательно выбрасывают непересекающиеся открытые интервалы.

На первом шаге выбрасывается интервал $(1/3, 2/3)$, на следующем шаге выбрасывается средняя треть в каждом из двух оставшихся отрезков и процесс итерируется.

В результате оказывается выброшенной счетная всюду плотная дизъюнктная система интервалов, дополнение к объединению которых есть замкнутое нигде не плотное множество – ***канторов дисконтинуум*** $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}$ не имеет изолированных точек, т.к. среди выброшенных интервалов нет соседних.

- Если аналогично выбросить из какого-либо отрезка $[a,\ b]$ дизъюнктную и всюду плотную систему интервалов l_i, длины которых стремятся к нулю, то получится компакт L гомеоморфный канторову компакту $\mathbb{K}$.

□ Гомеоморфизм $\mathbb{K}$ и L нетрудно получить с помощью монотонного гомеоморфного отображения отрезка $[a,\ b]$ на $[0,\ 1]$. Сначала строится гомеоморфизм отрезка $[0,\ 1]$ на $[a, b]$, переводящий $[1/3,\ 2/3]$ на l_1, линейно на каждом из трех отрезков $[0,\ 1/3]$, $[1/3,\ 2/3]$, $[2/3,\ 1]$, затем этот процесс итерируется. В результате получается гомеоморфизм: на каждом шаге строится кусочно линейный гомеоморфизм, сохраняющий порядок, и длины отрезков обоих подразделений равномерно стремятся к нулю. ■

= Сумма длин выброшенных интервалов для $\mathbb{K}$ равна 1, но в общем случае можно потребовать, чтобы длина равнялась любому d, $0 < d \leq 1$. Тогда дисконтинуум будет иметь *меру* $1-$d.

- Точки $\mathbb{K}$ делятся на точки 1-го рода – концы выброшенных интервалов, и точки 2-го рода – остальные. Однако их различие относится к расположению $\mathbb{K}$ на прямой:

- **Для любых двух точек существует гомеоморфизм $\mathbb{K}$ на себя, переводящий каждую из них в другую** – *однородность* $\mathbb{K}$. Докажите! (стр. 25)

- **$\mathbb{K}$ имеет мощность континуума.**

□ Во-первых, он лежит в отрезке и потому его мощность не больше континуальной. Во-вторых, его можно (непрерывно) отобразить на отрезок [0,1], и, значит, его мощность не меньше мощности отрезка.

Для построения этого отображения нужно оба конца каждого выброшенного интервала отобразить в двоично рациональную точку очевидным образом соответствующую этому интервалу. Это отображение нестрого *монотонно* и переводит всюду плотное подмножество $\mathbb{K}$ (точки первого рода) во всюду плотное множество двоично рациональных точек в $[0, 1]$. Отсюда следует непрерывность. ■

Этот результат можно обобщить:

Теорема 1. **Каждый компакт X есть непрерывный образ $\mathbb{K}$.**

□ Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. Представим компакт X в виде конечного объединения ε_1-шаров. Каждый из полученных компактных шаров представим конечным объединением компактов диаметра меньше ε_2 и т.д.

Возьмем в $[a,\ b]$ дизъюнктный набор отрезков равной длины в числе равном числу элементов первого ε_1-покрытия X. Сопоставим произвольно и взаимно однозначно каждому отрезку элемент первого покрытия X.

Затем с каждым из этих отрезков проведем ту же операцию: возьмем в нем непересекающиеся равные отрезки в числе равным числу элементов второго ε_2-покрытия, покрывающих соответствующий компакт первого ранга. Установим взаимно однозначное соответствие между отрезками и компактами второго ранга: отрезку, лежащему в отрезке a первого ранга, ставим в соответствие компакт второго ранга, пересекающийся с компактом первого ранга, отвечающим отрезку a.

Итерируем этот процесс. В результате получим с одной стороны *измельчающуюся последовательность* покрытий компакта X компактами, с другой измельчающуюся последовательность дизъюнктных систем отрезков. Вторая система приводит к некоторому дисконтинууму D на отрезке. Каждой цепочке вложенных отрезков второй системы однозначно отвечает цепочка вложенных компактов первой.

Полученное отображение $f : D \to X$ непрерывно: пусть $y = f(x)$; для каждого n y имеет $2\varepsilon_n$-окрестность, покрытую компактами n-ого шага, а x имеет сколь угодно малые открыто-замкнутые окрестности, образы которых лежат в этих компактах. ■

= $\{$**Последовательность покрытий $\{\mathcal{U}_n\}$ *измельчающаяся*, если для любого открытого покрытия $\mathcal{V}$ найдется n так, что $\mathcal{U}_n$ вписано в $\mathcal{V}$ (в метрическом случае: $\delta_n \to 0$).**$\}$

- Заменяя *покрытия* X компактами на *дизъюнктные системы* компактов в X, получим:

Теорема 2. **Компакт X без изолированных точек *содержит* компакт гомеоморфный $\mathbb{K}$.**

- Следствие: непустой совершенный компакт имеет мощность континуума.

-=-=-=-

Сцепленность. Континуумы.

Нульмерные компакты = дисконтинуумы

$\sim$ Конечная последовательность точек x_i, $1 \le i \le k$, в компакте X называется *ε-цепью*, соединяющей x_1 с x_k, $\varepsilon > 0$, если расстояние от каждой точки x_i, $i \le k-1$, до точки x_{i+1} меньше ε.

$\sim$ Для каждого $\varepsilon > 0$ компакт X распадается на свои *ε-компоненты*, т.е. компоненты ε-сцепленности. (Точки в одной ε-компоненте соединены ε-цепью).

- **ε-Компоненты образуют дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие X.**

□ Если точка b достижима от a с помощью ε-цепи, то и все точки ε-окрестности b достижимы (компоненты открыты). Если в ε-окрестности b имеются точки, достижимые от a с помощью ε-цепей, то и b достижима (компоненты замкнуты). ■

$\sim$ Множество $A \subset X$ называется *ε-сцепленным*, если каждые две точки в нем соединены ε-цепью, и *сцепленным*, если оно ε-сцепленное для каждого $\varepsilon > 0$.

- **Замкнутое подмножество A компакта связно $\Leftrightarrow$ A сцеплено.**

□ Если A (не обязательно замкнутое) связно, то для любого $\varepsilon > 0$ компонента ε-сцепленности в X каждой точки открыто-замкнута относительно A для каждого $\varepsilon > 0$ и потому совпадает с A. Значит, A сцепленное.

Если замкнутое A не связно, то имеется разложение A на два открыто-замкнутых подмножества, расстояние между которыми в компакте больше некоторого $\varepsilon > 0$. Значит, A не ε-сцепленное. ■

$\sim$ *Связный компакт* называется ***континуумом*** и нетривиальным или *собственным континуумом*, если он имеет более одной точки.

- *Теорема.* **Пусть Φ_i убывающая последовательность ε_i-сцепленных компактов и $\varepsilon_i \to 0$. Тогда $A = \bigcap_i \Phi_i$ – континуум.**

□ Пересечение A замкнуто в каждом Φ_i и потому компактно. Надо доказать сцепленность A.

Пусть даны точки a, b в A и $\varepsilon > 0$. Найдется номер n такой, что расстояние каждой точки в Φ_n до A меньше $\varepsilon/3$ и $\varepsilon_i < \varepsilon/3$. Точки a и b соединим $\varepsilon/3$-цепью a_j, $1 \le j \le k$, в Φ_n.

Для каждой точки a_j возьмем $\varepsilon/3$-близкую точку $b_j \in A$, и мы получим ε-цепь от a до b в A для произвольно взятого $\varepsilon > 0$. ■

≈ Пересечение убывающей последовательности континуумов – континуум.

- **Пересечение ε_n-компонент точки a компакта при $\varepsilon_n \to 0$ есть континуум, совпадающий с компонентой связности этой точки в компакте.**

□ Пересечение связно и лежит в компоненте точки a, а компонента лежит в каждой ε-компоненте этой точки. ■

Отсюда:

- **Для всякой окрестности $U(\Gamma)$ компоненты связности Γ компакта X можно найти открыто-замкнутую окрестность $V(\Gamma)$, содержащуюся в U.**

- В частности, **каждая точка дисконтинуума X имеет сколь угодно малую окрестность с пустой границей.**

Это значит, по определению, что равна нулю *индуктивная размерность* X, $\operatorname{ind} X = 0$.

(Размерность $\operatorname{ind} X$, введенная Пуанкаре, определяется по индукции: $\operatorname{ind} X \leq n$, если $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} X \leq n-1$ и $\operatorname{ind} \emptyset = -1$.)

= О размерности речь пойдет позже, но с акцентом на другую *лебегову* размерность, $\dim X$, определяемую с помощью покрытий. (Для компактов $\operatorname{ind} X = \dim X$.)

∼ *Лебегова размерность* $\dim X \leq n$, если постранство X имеет сколь угодно мелкое покрытие *кратности* не больше $n+1$ (т.е. каждая точка принадлежит не более чем $n+1$ элементам покрытия). В частности, $\dim X = 0$, если X имеет сколь угодно мелкое дизъюнктное покрытие открыто-замкнутыми множествами.

- **Лебегова размерность дисконтинуума X равна нулю.**

□ Занумеруем конечное ε-покрытие X открыто-замкнутыми множествами G_i, и из каждого элемента покрытия выбросим его пересечение с предыдущими. Множества $G_i \setminus \bigcup_{j<i} G_j$ образуют открыто-замкнутое ε-покрытие X кратности 1. ■

- Если X дисконтинуум без изолированных точек, то он при каждом $\varepsilon > 0$ имеет конечное открыто-замкнутое ε-покрытие, элементы которого являются дисконтинуумами без изолированных точек, и доказательство теоремы о вложении $\mathbf{K}$ в X нетрудно модифицировать, чтобы получить гомеоморфизм $X \approx \mathbf{K}$.

Итак, **нульмерный компакт X либо счетен, либо состоит из дисконтинуума, гомеоморфного канторову дисконтинууму $\mathbb{K}$ и, возможно, пустого, счетного множества.**

≈ С другой стороны

Канторов дисконтинуум $\mathbb{K}$ есть единственный (с точностью до гомеоморфизма) дисконтинуум без изолированных точек

(т.е. он *характеризуется* этим свойством). Одновременно он единственный нульмерный компакт без изолированных точек (все равно, в смысле ind или dim).

Еще одно важное свойство $\mathbb{K}$:

- **Канторов дисконтинуум $\mathbb{K}$ есть произведение счетного числа дискретных двоеточий.**

□ Это произведение компактно, нульмерно и не имеет изолированных точек. ■

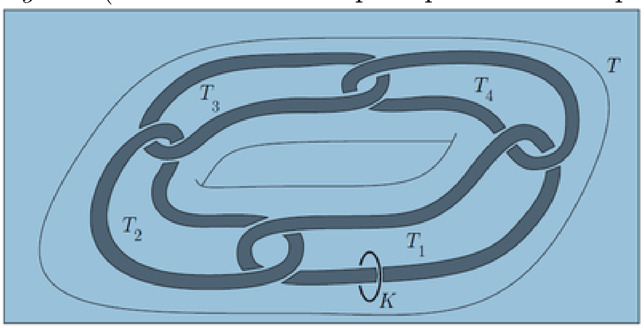
= Отсюда вытекает, что канторово множество имеет естественную структуру коммутативной группы – как прямое произведение групп $\mathbb{Z}_2$ (натуральных чисел по модулю 2). При этом *сдвиги группы* – умножения всех элементов на один элемент – в $\mathbb{K}$ непрерывны. Это значит, что $\mathbb{K}$ есть *топологическая группа*, т.е. множество, в котором даны согласованные структуры группы и топологического пространства.

В свою очередь это показывает, что дисконтинуум $\mathbb{K}$ однороден – как всякая группа. (С помощью сдвига группы на элемент ba^{-1} элемент a переводится в b.)

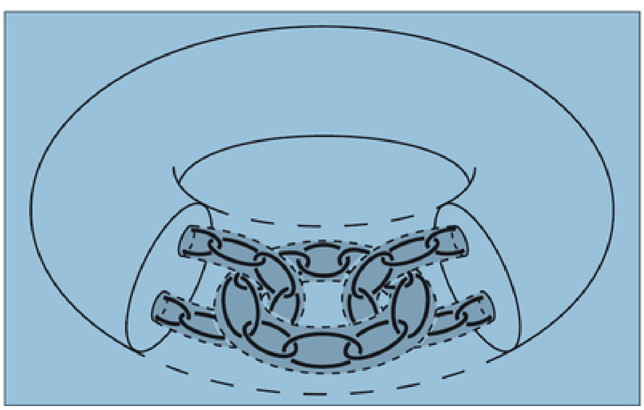
≈ ***Компакт Антуана* A**

Для нульмерного компакта без изолированных точек на прямой мы строили гомеоморфизм прямой, который переводит этот компакт в **K**. На плоскости аналогичный факт также верен, хотя доказательство сложнее. Но в $\mathbb{R}^3$ можно расположить нульмерный совершенный компакт (гомеоморфный **K**) так, что дополнение к нему не будет гомеоморфно дополнению к стандартно расположенному **K** (скажем, как обычно, на оси абсцисс), и, следовательно, *гомеоморфизма пространства*, переводящего этот компакт в стандартно расположенный **K** не существует.

Такое расположение нульмерного совершенного компакта **A** в $\mathbb{R}^3$ впервые было построено в 1921 г. французским математиком Л.Антуаном и называется *компакт Антуана*. (Более сложные примеры были построены немного позже П.С. Урысоном.)



Для построения берется полный тор (бублик) (стр. 87) диаметра 1. Внутри него располагается цепочка полных торов диаметра 1/2 каждый. Внутри каждого их них берется цепочка полных торов диаметра меньше 1/4 и т.д. Через A_i обозначим объединение полных торов i-ого шага. Тогда $\mathbf{A} = \bigcap A_i$ – нужный компакт. (На рисунках (взятых из книги R.J. Daverman, G.A. Venema. Embeddings in manidolds. Grad.St.Nath.-106. AMS. 2009) показаны вторая и третья стадии построения).



A нульмерен и совершенен: пересечение **A** с каждым из построенных полных торов есть открыто-замкнутое подмножество в **A**. Оно эквивалентно самому **A**, т.е. переводится в **A** гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^3$ (переводящим большой тор в малый).

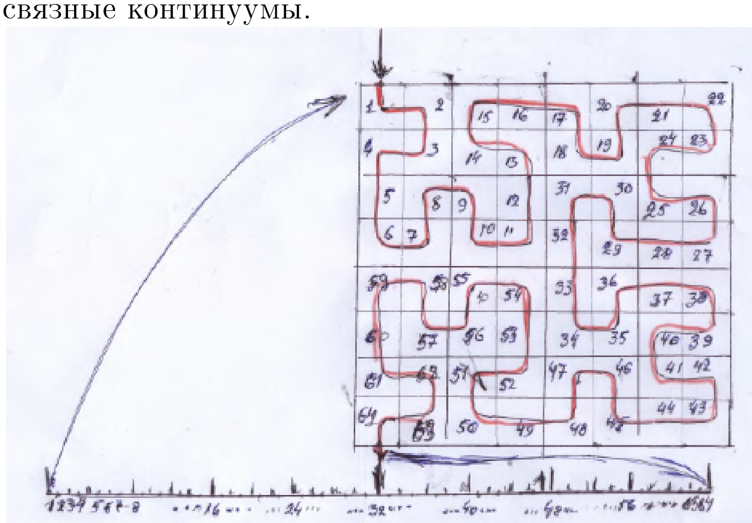
Дополнение к **A** отличается от дополнения к стандартно расположенному **K** на прямой в $\mathbb{R}^3$ тем, что оно *неодносвязно* (стр. 82). Это значит, что имеется отображение окружности в $\mathbb{R}^3 \setminus A$, которое не гомотопно нулю в этом множестве (не деформируется по нему в отображение точку). В качестве такого отображения надо взять вложение окружности, зацепленной с первым полноторием.

Строгое доказательство требует знания специальной техники (см. Л.В. Келдыш. Топологические вложения в евклидово пространство. Труды МИАН т.81, 1966 г.).

-=-=-=-

Локальная связность и жордановы континуумы

= Мы видели, что каждый компакт является образом $\mathbf{K}$. Естественно спросить, какие компакты могут быть образами отрезка. Отрезок континуум, и его образы – континуумы. Однако, как мы видели, например, синусоида образом отрезка быть не может. Тем не менее класс континуумов, являющихся образами непрерывных отображений отрезка (так сказать, *имеющих путь, обходящий все его точки*), достаточно широк. Например, им может быть квадрат и вообще куб любой размерности, включая гильбертов кирпич. Построение Пеано непрерывного отображения отрезка на квадрат (см. Пархоменко, стр.14) было в свое время (в конце XIX века) второй, после теоремы Кантора о мощности отрезка, сенсацией, т.к. подвергало сомнению имевшееся представление о размерности (объект имеет размерность n, если «описывается» n параметрами). Это представление о размерности получило правильную топологическую основу после доказательства Брауэром ряда теорем, которым посвящена вторая часть этих лекций. Представление о кривой как непрерывном образе отрезка было введено К. Жорданом и поэтому образы отрезка называют иногда *жордановыми континуумами*. Их называют также пеановскими континуумами. Оказывается, как мы сейчас увидим, жордановы (пеановские) континуумы это в точности локально связные континуумы.



Построение кривой Пеано

$\sim$ Рассмотрим три свойства континуума X:

$*$ **I**: *Локальная связность* (во всякой окрестности $U(x)$ точки $x \in X$ имеется связная ее окрестность);

$*$ **II**: *Жордановость* (X есть непрерывный образ отрезка $\mathbf{I} = [0, 1]$);

$*$ **III**: *Свойство S*: (для всякого $\delta > 0$ X есть конечное объединение континуумов диаметра меньше δ).

- **Эти свойства эквивалентны: I $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ I.**

II $\Rightarrow$ I: Дано непрерывное отображение $f : \mathbf{I} \to X$, причем $f(\mathbf{I}) = X$. Пусть $U = U(x_0)$ окрестность точки $x_0 \in X$ и $U \neq X$. Пусть C_x – компонента U, содержащая точку x. Замыкание каждой компоненты имеет точки на границе $\mathrm{Fr}\, U$.

Покажем, что C_{x_0} открыта, т.е. есть требуемая связная окрестность точки x_0.

Допустим, что некоторая точка $x_1 \in C_{x_0}$ предельная для последовательности точек из других компонент C_x. Пусть $d(x_1, \mathrm{Fr}\, U) > r > 0$, тогда диаметр каждой компоненты C_x, для которой $d(C_x, x_1) > r/2$ больше $r/2$.

Имеется (в силу равномерной непрерывности f) такое $\delta > 0$, что для отрезков в $\mathbf{I}$ длиной меньше δ диаметры образов меньше $r/2$. Разобъем $\mathbf{I}$ на m отрезков e_i равной длины $\frac{1}{m} < \delta$.

Пусть $x_k \in X$ последовательность точек, не принадлежащих C_{x_0}, сходящаяся к x_0. Начиная с некоторого номера все точки последовательности отстоят от границы на расстояние $> r/2$, и тогда диаметры их компонент $C_{x_i} > r/2$.

Прообраз каждой C_{x_k} состоит из интервалов, граничные точки которых отображаются в $\operatorname{Fr} U$, и образ хотя бы одного из них (содержащий x_k) имеет диаметр $> r/2$. Но такие интервалы содержат отрезки e_i, не пересекаются и их может быть не больше, чем m, т.е. конечное число. Это показывает, что C_{x_0} – открытая связная окрестность x_0.

I $\Rightarrow$ **III**: Если каждая точка континуума лежит в сколь угодно малой связной окрестности, то она лежит и в малом континууме – замыкании такой окрестности. Выбирая конечное открытое покрытие этих окрестностей, мы одновременно получаем и конечное покрытие X малыми континуумами.

III $\Rightarrow$ **II**: Возьмем убывающую последовательность положительных чисел $\delta_k \to 0$ и существующее, по условию, конечное δ_1-мелкое покрытие X континуумами. Расположим их в цепь C_i без пропуска, но возможно, с повторениями, так, чтобы пересечение $C_i \cap C_{i+1}$ было непусто. Возможность такого построения очевидно следует из связности X.

Пусть число элементов в цепи m_1. Разделим отрезок $\mathbf{I}$ на m_1 равных отрезков и сопоставим i-ому отрезку e_i i-ый элемент цепи. В каждом C_i отметим начальную точку $x'_i \in C_i \cap C_{i-1}$ и конечную $x''_i \in C_i \cap C_{i+1}$, $x''_i = x'_{i+1}$ (точки $x'_1 \in C_1$ и $x''_{m_1} \in C_{m_1}$ берем произвольно).

Возьмем далее δ_2-покрытие компакта X континуумами и для каждого C_i расположим в цепь (с соблюдением аналогичных условий) те континуумы второго порядка C_{ij}, которые его пересекают. При этом в качестве начального должен служить континуум C_{i1}, который содержит x'_i, последним – C_{im_i}, который содержит x''_i. Вместе эти цепи дают цепь из всех (без пропусков, но с повторениями) элементов второго покрытия.

Разобъем каждый из отрезков e_i первого покрытия на m_{1i} равных отрезков e_{ij} и сопоставим каждому из e_{ij} соответствующий (по номеру в цепи) континуум второго покрытия. Далее этот процесс итерируется.

Если сумма $\sum_i \delta_i$ конечна, то, последовательность континуумов, отвечающая убывающей последовательности отрезков, будет фундаментальной – будет иметь единственную предельную точку (и каждая точка X будет таким пределом). Сопоставим ее единственной точке, лежащей в пересечении соответствующей убывающей последовательности отрезков в $\mathbf{I}$, мы получим непрерывное отображение отрезка на X. ■

-=-=-=-=-=-

6. НОРМАЛЬНОСТЬ. ЛЕММА УРЫСОНА МЕТРИЗУЕМОСТЬ

-=-=-=-

Регулярные и нормальные пространства

$\sim$ Пространство X, в котором замкнутое множество A и не лежащая в нем точка x имеют непересекающиеся окрестности U_A и U_x, называется T_3-*пространством.* Применяя эту аксиому второй раз – к x и дополнению к U_x, получим, что

- **В регулярном X для $x \in X$ и замкнутого $A \subset X$ имеются окрестности с непересекающимися замыканиями.**

$\sim$ Пространство, в котором два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности, принадлежит классу T_4.

$\sim$ Пространство, являющееся одновременно T_1- и T_3-пространством, называется *регулярным*; пространство, которое есть T_1- и T_4-пространство, называется *нормальным*.

- Из T_3 не следует T_1, но из нормальности, очевидно, следует регулярность, и из регулярности хаусдорфовость. Имеются примеры регулярных, но не нормальных пространств, см. ниже раздел *плоскость Немыцкого.*

- Свойство регулярности *наследственно*: подпространства регулярного пространства регулярны.

$\square$ Пусть $x \in F \subset A \subset X$, F замкнуто в A. Имеются непересекающиеся окрестности $U(x)$, $V(\overline{F})$ открытые в X. Их пересечения U', V' с A открыты в A и служат окрестностями в A соответственно x и F. ($\overline{F} \cap A = F$, т.к. F замкнуто в A.) $\blacksquare$

- Свойство нормальности *наследственно по замкнутым множествам*:

замкнутое подмножество нормального пространства нормально; *не замкнутые* множества нормального пространства могут не быть нормальными.

Теорема Тихонова. **Регулярное пространство со счетной базой нормально**

$\square$ Даны замкнутые подмножества A_1 и A_2 регулярного постранства X. Каждая точка одного имеет окрестность, замыкание которой не пересекает другого. Пусть U_i и V_i окрестности с этим свойством, взятые из счетной базы и занумерованные. Положим $U'_n = U_n \setminus \bigcup_i^{n-1} \overline{V}_i$, $V'_n = V_n \setminus \bigcup_i^n \overline{U}_i$.

Множества $U = \bigcup U'_n,\ V = \bigcup V'_n$ открыты, $U \cap V = \emptyset$, и $U \supset A_1,\ V \supset A_2$. $\blacksquare$

-=-=-=-

Плоскость Немыцкого

Следующий пример, построенный в 1935 г. Виктором Владимировичем Немыцким называется *плоскостью Немыцкого* $\mathbb{N}$. Этот пример служит для тестирования различных топологических свойств. В частности, это пример (вполне) регулярного, но не нормального пространства.

$\mathbb{N}$ как множество состоит из точек замкнутой полуплоскости y ≥ 0 (в декартовых координатах (x, y)). Топология в открытой полуплоскости P (y$>$0) обычная, так что P есть подпространство $\mathbb{N}$. Локальный базис для точки $a =$ (x,0) граничной прямой L (y=0) состоит из открытых кругов $U(a)$ в P, касающихся L в точке a, к которым добавляется точка a. Тогда L оказывается дискретным подпространством в $\mathbb{N}$, замкнутым, но не открытым. Любое подмножество L также замкнуто.

$\mathbb{N} = P \cup L$ сепарабельно (точки с обеими рациональными координатами в P образуют всюду плотное множество C).

Регулярность $\mathbb{N}$ надо доказывать для точек L. Если в каждой базисной окрестности $U(a) \cup a$ точки $a \in L$ имеются точки *замкнутого* множества A, то a – предельная для A и, значит, $a \in A$. Иначе, возьмем круг $V(a) \subset U(a)$ меньшего радиуса, касающийся L. Тогда $V(a) \cup a$ и $\mathbb{N} \setminus \bar{U}(a)$ – окрестности, разделяющие a и A.

$\square$ Докажем ненормальность $\mathbb{N}$ от обратного. Предполагая нормальность, мы для каждого $A \subset L$ (все подмножества L замкнуты в $\mathbb{N}$) найдем открытые множества $U_A \supset A$ и $V_A \supset L \setminus A$ так, что $U_A \cap V_A = \emptyset$.

Пусть $C_A = C \cap U_A$ (C введено выше). Покажем, что если $A \neq B$, то $C_A \neq C_B$. Пусть $A \setminus B \neq \emptyset$. Тогда $\bar{U}A \cap V_B \neq \emptyset$ ($A \setminus B \subset L \setminus B \subset V_B$), а $\bar{U}_B \cap V_B = \emptyset$, т.е. $\bar{U}A \neq \bar{U}_B$, значит, $C_A \neq C_B$ ($\bar{C}_A = \bar{U}_A$, в силу всюду плотности C). Но тогда и $C_A \neq C_B$.

Между тем, мощность множества всех подмножеств L, согласно Кантору, больше континуальной, а мощность множества счетных $C_A \subset C$ не больше континуальной, и, значит, взаимнооднознчного соответствия $A \leftrightarrow C_A$ быть не может. ■

-=-=-=-

Компактность и аксиомы отделимости

Для того, чтобы компактное пространство (без 2-й аксиомы счетности) было нормальным, недостаточно, чтобы оно было $\mathbf{T}_1$-пространством. Нужна хаусдорфовость.

- **Компактное $\mathbf{T}_2$-пространство нормально.**

Доказательство несложно, оно следует уже знакомой технике.
(Александров называет компактные $\mathbf{T}_2$-пространства *бикомпактами.*)

-=-=-=-

Лемма Урысона

- **В нормальном пространстве замкнутые непересекающиеся подмножества функционально отделимы.**

Это значит, что для двух непересекающихся замкнутых подмножеств A_0 и A_1 в нормальном пространстве X имеется вещественная функция $f : X \to \mathbb{R}$, для которой значения на A_0 и A_1 постоянны и различны, например:

$$f|_{A_0} = 0,\ f|_{A_1} = 1, \quad 0 \le f(x) \le 1.$$

= ***Эта лемма служит фундаментом современной (гомотопической) топологии.***

- *Доказательство.* Скажем, что замкнутое множество $A \subset X$ *разделяет* замкнутые A_0 и A_1, если дополнение распадается на два открытых подмножества, $U_0 \supset A_0$ и $U_1 \supset A_1$. Такое множество A существует в силу нормальности.

Положим: $f|_{A_0} = 0$, $f|_{A_1} = 1$. На первом шаге построения обозначим множество, разделяющее данные A_0 и A_1 через $A_{\frac{1}{2}}$ и положим $f|_{A_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$. На втором построим множества $A_{\frac{1}{4}}$, разделяющее A_0 и $A_{\frac{1}{2}}$, и $A_{\frac{3}{4}}$, разделяющее $A_{\frac{1}{2}}$ и A_1 и положим $f|_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ и $f|_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$. Итерируем этот процесс.

В пределе мы получим дизъюнктную систему замкнутых множеств $A_{\frac{p}{q}}$, индексированных двоично-рациональными числами, причем определено: $f(A_{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}$.

Рассмотрим в пространстве X замкнутые подмножества, являющиеся пересечением убывающих последовательностей множеств вида $\overline{U}(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$, где $U(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$ есть открытое подмножество между множествами $A_{\frac{i}{2^k}}$ и $A_{\frac{i+1}{2^k}}$ ($A_{\frac{i}{2^k}} \cup A_{\frac{i+1}{2^k}}$ его граница). Если рациональные числа, определяющие границы множеств $U(p,q)$ не стабилизируются, то две их последовательности с двух сторон стремятся к двоично иррациональному числу, которое возьмем в качестве значения функции f в точках пересечения этих множеств.

Если же эти числа стабилизируются на числе p/q, скажем, со стороны A_0, мы присоединяем множество-пересечение к $A_{\frac{p}{q}}$ и полагаем значение f в его точках равным $\frac{p}{q}$. К этому множеству будет еще присоединено множество, полученное при стабилизации чисел на p/q со стороны A_1.

В результате функция f определена на всем X, принимает постоянные значения 0 и 1 на A_0 и A_1 соотв., причем $0 \le f(x) \le 1$, и f непрерывна. Последнее проверяется автоматически: прообраз открытого интервала с рациональными концами $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ лежит между множествами $A_{\frac{p}{q}}$ и $A_{\frac{r}{s}}$ и, очевидно, открыт. ■

= О построенной *функции Урысона* можно сказать, что она *функционально разделяет* непересекающиеся замкнутые множества или что они *функционально отделимы*.

Между регулярностью и нормальностью лежит еще одно условие $(T_{3,5})$: – *полная регулярность*.

$\sim$ T_1-пространство называется ***вполне регулярным*** или *тихоновским*, если его замкнутые множества функционально отделимы от нележащих в них точек.

Нормальные пространства вполне регулярны, а вполне регулярные пространства регулярны. Для пространств со второй аксиомой счетности эти три класса совпадают.

-=-=-=-

Теорема продолжения непрерывного отображения

- Следующая теорема (которая будет для нас основной во второй части лекций) была доказана в метрическом случае Титце и выведена Урысоном из его леммы в общем виде:

Теорема о продолжении. Непрерывная функция $f : A \to \mathbb{R}$, определенная на замкнутом подмножестве $A \subset X$ нормального пространства, может быть продолжена до функции $F : X \to \mathbb{R}$, $F|_A = f$.

Доказательство. Пусть сначала f ограничена по модулю, не теряя общности, положим $|f| \leq 1$. Функция F будет построена как предел равномерно сходящегося ряда функций g_i, которые строятся по индукции так, чтобы $|g_i| \leq \frac{2^{i-1}}{3^i}$, и для функции $\varphi_k = f - \sum_0^k g_i|_A$ на A было бы $|\varphi_k| \leq (\frac{2}{3})^k$.

Пусть $g_0 = 0$. Функцию g_{n+1} построим как функцию Урысона для замкнутых подмножеств A'_{n+1}, A''_{n+1} в A, определенных условиями $A'_{n+1} : \varphi_n \leq -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ и $A''_{n+1} : \varphi_n \geq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$, полагая $g_{n+1} = -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ на первом, $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ на втором и $|g_{n+1}| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ сходится равномерно и притом на A сходится к f.

В случае, если f принимает значения в $\mathbb{R}$, возьмем гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \to (0, 1)$ и применим приведенное рассуждение к композиции hf. Пусть $G : X \to [0, 1]$ продолжение hf и $B = G^{-1}(0 \cup 1)$. B замкнуто в X и не пересекает A. Пусть φ функция Урысона, равная 0 на B и 1 на A. Тогда функция φG продолжает hf и не принимает значений 0 и 1. Поэтому $h^{-1}\varphi G : X \to \mathbb{R}$ – функция на X, продолжающая f.

(Множества A'_1 и A''_1 пусты, но это не нарушает доказательства.) ■

- **Теорема о продолжении характеризует нормальные пространства**:

Возьмем значения 0 и 1 на замкнутых непересекающихся подмножествах A_0 и A_1 в X, если это отображение продолжается до непрерывной функции $f : X \to [0,1]$, то множества A_0 и A_1 разделены непересекающимися окрестностями $f^{-1}\ [0, 1/2)$ и $f^{-1}\ (1/2, 1]$. Если это справедливо для любой пары непересекающихся замкнутых множеств, то X нормально.

-=-=-=-

Теорема Урысона о вложении в гильбертов кирпич и метризация

- С помощью техники, основанной на функциях Урысона, полностью решается вопрос о метризации пространств в естественном классе *регулярных пространств со счетной базой = нормальных пространств со счетной базой*. Именно, оказывается, что этот класс совпадает с классом, состоящим из подпространств гильбертова пространства, и даже, более точно, подпространств компактного гильбертова кирпича, которые наследуют гильбертову метрику. Ясно, что основное значение имеет следующая теорема о вложении. Например, компактификации такого пространства (регулярного со счетной базой) можно строить как замыкания его образа при различных вложениях в гильбертов кирпич.

- **Теорема о вложении.** **Всякое регулярное пространство со счетной базой гомеоморфно подпространству гильбертова кирпича.**

В частности, эти пространства метризуемы.

- *Доказательство.* Построим отображение f регулярного пространства X со счетной базой в $\mathbf{I}^\infty$ и покажем сначала, что оно взаимно однозначно.

Воспользуемся тем, что пространство X нормально. Рассмотрим все пары (U, V) открытых множеств из счетной базы, где $\overline{U} \subset V$. Для каждой точки $x \in X$ найдется такая пара с условием $x \in U$. Занумеруем множество всех таких пар (это множество счетно). Построим функцию Урысона φ_i, $0 \le \varphi_i \le 1$, для i-ой пары – для множеств $\overline{U}_i$, $X \setminus V_i$, $\varphi(\overline{U}) = 0$, $\varphi(X \setminus V) = 1$. Для точки $x \in X$ рассмотрим последовательность $\{\frac{\varphi_n(x)}{2^n}\}$, которая определяет точку в гильбертовом кубе, поскольку функции φ_n ограничены по модулю единицей. Это задает требуемое отображение f. Оно взаимно однозначно, т.к. для двух точек можно найти пару (U_i, V_i), в которой $\overline{U}_i$ содержит одну точку, а другая лежит вне V_i, и они различаются своей i-ой координатой.

Докажем, что f непрерывно. Пусть $x \in X$ и $y = f(x) = \{y_i\} \in \mathbf{I}^\infty$. Возьмем окрестность $W_i(y)$ из псевдобазы топологии $\mathcal{T}_p$ (прямого произведения), заданную условием: если $y' \in W_i$, то $|y'_i - y_i| < \varepsilon$ (напомню, что остальные координаты произвольны). В силу непрерывности φ_i множество $U = \varphi_i^{-1} W_i$ открыто. Но в этом случае и $f(U) \subset W_i$.

Докажем непрерывность обратного отображения $g = f^{-1}|_{f(X)} : f(X) \to X$. Пусть $y = \{y_i\} \in \mathbf{I}^\infty$ и дано открытое множество $G \subset X$, $g(y) \in U$. Найдем пару (U_n, V_n), где $g(y) \in U_n$, $V_n \subset G$, тогда $y_n = 0$. Возьмем окрестность $W(y)$ из псевдобазы, где $|y'_n - y_n| < \frac{1}{2^n}$, если $y' \in W$. Так как $\varphi_n(g(y)) = \frac{y_n}{2^n} = 0$, $y'_n < \frac{1}{2^n}$ и, значит, $g(y') \in V_n \subset G$, т.е. $g(W) \subset G$. ∎

-=-=-=-

Локальная компактность и паракомпактность

∼ Пространство X, во всякое открытое покрытие которого можно вписать локально конечное открытое покрытие, называется *паракомпактным.*

= (Известно, например, что всякое метрическое пространство паракомпакто. Это – трудная теорема Стоуна, см. Александров, гл.6, §11, п.3, стр.302.)

- *Теорема.* **Локально компактное пространство со счетной базой паракомпактно.**

□ 1. *Локально компактное пространство X со счетной базой регулярно.*

Тогда X метризуемо, и у точек есть окрестности, замыкания которых компакты.

Пусть в X даны точка p и замкнутое множество F, $p \notin F$. Пусть $U(p)$ – окрестность p с компактным замыканием. $\overline{U}$ компактно и потому в U имеется окрестность $V(p)$, не пересекающая $\overline{U} \cap F$, и значит, $V \cap F = \emptyset$.

2. *X есть возрастающее объединение счетного числа компактов F_i.*

Пусть $\mathcal{B} = \{B_j\}$ – нумерация элементов счетной базы, имеющих компактные замыкания. Положим $F_i = \bigcup_{j \le i} \overline{B}_j$.

3. X есть такое возрастающее объединение компактов Φ_i, что $\Phi_i \subset \operatorname{Int} \Phi_{i+1}$.

Положим $\Phi_1 = F_1$ и пусть $\Phi_i \supset F_i$ уже построено. Пусть K_{is} – конечное число окрестностей с компактным замыканием, покрывающих $\operatorname{Fr} \Phi_i$.

Положим $\Phi_{i+1} = F_{i+1} \bigcup \Phi_i \bigcup \cup_s \bar{K}_{is}$. Тогда $\overline{\Phi}_i \subset \operatorname{Int} \Phi_{i+1}$, т.к. $\operatorname{Fr} \Phi_i \subset \cup_s K_{is}$).

4. Обозначим $\operatorname{Fr} \Phi_i$ через Γ_i и через H_i замкнутую область между Γ_i и Γ_{i+1}, т. е. $\mathrm{H}_i = \overline{\Phi_{i+1} \setminus \Phi_i}$.

Покажем теперь, что во всякое открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_k\}$, $X = \cup U_k$, можно вписать локально конечное покрытие.

Пусть $\varepsilon_i = \min(\varepsilon_i'/2, \varepsilon_i'')$, где ε_i' – расстояние от H_i до $\Phi_{i-1} \cup (X \setminus \Phi_{i+2})$, а ε_i'' – число Лебега конечного покрытия H_i элементами покрытия $\mathcal{U}$.

Пусть $\mathcal{V}_i$ конечное покрытие H_i какими-либо ε_i-окрестностями (вписанное в $\mathcal{U}$). Элементы покрытий $\mathcal{V}_i$ пересекаются только с элементами покрытий $\mathcal{V}_{i-1}$ и $\mathcal{V}_{i+1}$, поэтому объединение элементов всех этих покрытий локально конечно. ■

-=-=-

∼ Разбиение единицы

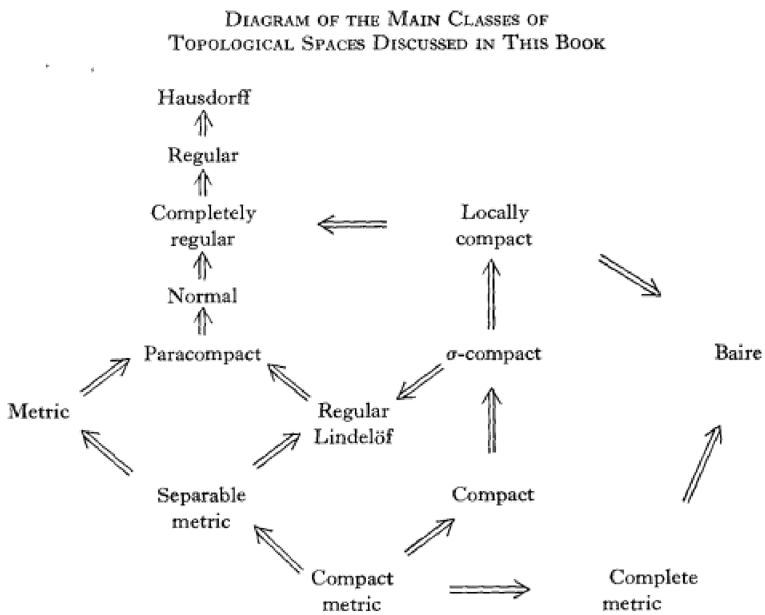
Для локально конечных открытых покрытий метрических пространств имеется конструкция “*разбиения единицы*”, являющаяся очень полезным техническим средством. Она заключается в том, что для каждого элемента покрытия U_i строится функция φ_i, равная нулю вне U_i, положительная внутри и принимающая значения в отрезке $[0, 1]$, при этом $\sum_i \varphi_i(x) \equiv 1$. В метрическом пространстве достаточно взять функцию расстояния $d_i(x)$ точки x до дополнения к U_i и положить $\varphi_i = \frac{d_i(x)}{\sum_j d_j(x)}$. Локальная конечность нужна, чтобы в каждлй точке было конечное число ненулевых слагаемых и суммирование было конечным.

(В нормальном пространстве нужно сначала показать, что локально конечное открытое покрытие может быть “ужато”, т.е. для каждого элемента покрытия U_α можно взять лежащее в нем с замыканием открытое множество V_α так, что новые элементы тоже образуют покрытие (очевидно, локально конечное). После этого для каждой пары надо взять функцию Урысона ψ_α, $\psi_\alpha|_{\overline{V}_\alpha} = 1$, $\psi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} = 0$, и заменить ее на $\varphi_{\alpha_0}(x) = \frac{\psi_{\alpha_0}(x)}{\sum_\alpha \psi_\alpha(x)}$. Однако не всякое нормальное пространство имеет сколь угодно мелкие локально конечные покрытия, т.е. нормальное пространство не обязательно *паракомпактно*, хотя обратное верно: всякое паракомпактное пространство нормально (Александров, глава 6, §11, стр. 301.)

-=-=-=-=-=-=-=-

Диаграмма Дугунджи

В заключение первой части курса («Общая топология») привожу диаграмму из книги Dugundji J. Topology. 1966. В этой диаграмме указаны связи между основными классами топологических пространств, большинство из которых было выше введено.



Without additional hypotheses, none of the implications is reversible.

Все пространства на схеме, в частности, компактные, предполагаются хаусдорфовыми. Из компактности тривиально следует *σ-компактность*, которая состоит из двух условий: локальная компактность и представимость пространства счетным объединением компактных подпространств. Свойства регулярности и финальной компактности легко вытекают из двух свойств σ-компактности. (Требование локальной компактности существенно, как показывает пример множества рациональных точек на прямой.)

Из локальной компактности, как и из полноты метрического пространства вытекает свойство Бэра – непустота пересечения счетной системы плотных открытых подмножеств (или, эквивалентно, невозможность представить пространство счетным объединением нигде не плотных замкнутых подмножеств). Свойство Бэра важно тем, что оно эквивалентно возможности ввести в пространстве X *полную* метрику, его можно назвать свойством *топологической полноты* (Эта теорема принадлежит Александрову, но в своей книге он отсылает за ее доказательством к книге Куратовский К. Топология, том 1, 1966.)

Наконец, из локальной компактности вытекает функциональная отделимость точки от не содержащего ее замкнутого подмножества. Нужно взять окрестность точки с компактным (и, значит, нормальным) замыканием, положить значение функции 1 на данном замкнутом множестве и в точках вне выбранной окрестности и нуль в точке. Затем продолжить функцию «по Урысону» на внутренние точки окрестности, используя нормальность ее замыкания.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ЧАСТЬ 2. ГОМОТОПИИ. ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА. КОМПЛЕКСЫ И ПОЛИЭДРЫ В $\mathbb{R}^n$

-=-

7. ГОМОТОПИИ. РЕТРАКТЫ

-=-=-=-

Понятие гомотопии

$\sim$ **Два отображения $f, g : X \to Y$ пространства X в пространство Y называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$, совпадающее с f при $t = 0$ и с g при $t = 1$:** $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$.

$\sim$ В этом случае пишут $f \simeq g$ (и $g \simeq f$). F называется *гомотопией* между f и g или *деформацией* f в g. F рассматривают также как непрерывное семейство отображений: $F(x,t) = F_t(x)$, которое тоже называется гомотопией (но непрерывность берется *по совокупности параметров*, это не просто непрерывное семейство отображений!)

$\sim$ Отображение $f : X \to Y$ *постоянно*, если $f(X) = y_0$, т.е. образ f – точка в Y.

$\sim$ Если f гомотопно *постоянному* отображению, то f называется *гомотопным нулю*, и пишут $f \simeq \mathbf{0}$.

Отображение в сферу, не гомотопное постоянному отображению, иногда называется *существенным*.

$\approx$ Важный пример гомотопии – *линейная* гомотопия для отображений в выпуклое подмножество линейного пространства: $F(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$, например, в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbf{I}^n$. Беря в качестве g постоянное отображение, получаем:

- Всякое отображение в выпуклое подмножество линейного пространства гомотопно нулю.

$\approx$ В частности, тождественное отображение выпуклого множества в себя гомотопно нулю: $\mathbf{1} \simeq \mathbf{0}$.

$\sim$ Пространство, тождественное отображение которого гомотопно нулю, называется *стягиваемым*.

$\approx$ Например, гильбертов кирпич стягиваем (как выпуклое подмножество в $\mathbb{H}$).

- Отображение $f : X \to Y$ стягиваемого пространства X (в частности, выпуклого множества, в частности, куба или шара) в любое пространство Y гомотопно нулю.

(Если $g_t : X \to X$ – стягивание X ($g_0 = \mathbf{1}$, $g_1 = \mathbf{0}$), то fg_t – требуемая гомотопия.)

- Гомотопия между двумя постоянными отображениями есть путь, соединяющий точки-образы этих отображений.

Y линейно связно $\Leftrightarrow$ любые два постоянных отображения X в Y гомотопны.

$\approx$ Например, для *синусоиды* имеются негомотопные постоянные отображения.

-=-=-=-

Гомотопии отображений сферы и в сферу

- Любые два отображения в $\mathbb{R}^n$ соединяются линейной гомотопиейб при этом расстояние между соответствующими точками не увеличиваются ($d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) \le d(f(x), g(x)), \forall x \in X$), в частности, гомотопия между близкими отображениями X в $\mathbb{R}^n$ проходит через отображения близкие к данным.

Пусть теперь даны два отображения в единичную сферу $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если эти отображения близки, то почти очевидно, что они гомотопны, но линейную гомотопию (идущую не по сфере) приходится видоизменить, разделив каждый вектор на его модуль: $F(x,t) = \frac{tg(x)+1-tf(x)}{|tg(x)+(1-t)f(x)|}$. Теперь каждая точка движется по дуге большого круга (в плоскости векторов $f(x)$ и $g(x)$), *при условии, что знаменатель не обращается в нуль.*

Для этого только требуется, чтобы при каждом x точки $f(x)$ и $g(x)$ не были *антиподальными*, т.е. диаметрально противоположными.

Таким образом, между $f(x)$ и $g(x)$ имеется гомотопия, идущая по дуге большого круга, если расстояние между этими отображениями меньше диаметра.

- Укажем один простой, но важный случай, когда отображение в $\mathbb{S}^n$ гомотопно нулю:

$\approx$ Если для $f: X \to \mathbb{S}^n$ найдется точка $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^n$, не принадлежащая $f(X)$, то $f \simeq \mathbf{0}$.

(Каждая точка $f(x)$ движется по дуге большого круга в направлении от **a** к диаметрально противоположной точке **-a**.)

- **Отображение сферы $f: \mathbb{S}^n \to Y$ гомотопно нулю $\Leftrightarrow$ существует продолжение $\Phi: \mathbb{B}^{n+1} \to Y$ отображения f на ограниченный сферой шар $\mathbb{B}^{n+1}$.**

(Если $F(x,t)$ гомотопия между $f(x) = F(x,0)$ и постоянным отображением $F(x,1) = g(x) = \mathbf{a} \in Y$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, то $\Phi(tx) = F(x,t)$ – требуемое продолжение, где tx – точка диска на радиусе точки $x \in \mathbb{S}^n$ на расстоянии t от центра $\mathbb{O}$ шара.

Если, обратно, $\Phi(tx) \in Y$ – какое-либо продолжение отображения f, то $F(x,t) = \Phi(tx)$ гомотопия f в постоянное отображение $g(x) = \Phi(\mathbb{O})$).

$\sim$ При определении гомотопии нулю вместо $X \times \mathbf{I}$ удобнее взять конус над X: Пространство $\mathrm{C}X$, полученное отождествлением между собой всех точек $(x,1)$ в $X \times \mathbf{I}$, называется *конусом над* X. (Когда X многогранник, говорят «пирамида над X».)

$\sim$ Окрестностями *вершины* v конуса – точки, полученной отождествлением точек $(x,1)$ – служат множества, получающиеся из окрестностей $X \times 1$ в $X \times [0,1]$.

$\approx$ Например, шар $\mathbb{B}^{n+1}$ является конусом над сферой $\mathbb{S}^n$.

- Отображение $f: X \to Y$ гомотопно нулю $\Leftrightarrow$ f может быть продолжено до отображения $\Phi: \mathrm{C}X \to Y$.

(Доказательство то же, что выше для сферы.)

-=-=-=-

Гомотопические классы отображений и гомотопические типы пространств

- Гомотопия двух отображений устанавливает между непрерывными отображениями пространства X в пространство Y отношение эквивалентности. Доказательства требует *транзитивность* этого отношения:

Пусть $F_1: X \times \mathbf{I} \to Y$ – гомотопия отображения $f(x) = F_1(x,0)$ в $g(x) = F_1(x,1)$, а $F_2: X \times \mathbf{I} \to Y$, гомотопия отображения $g(x) = F_2(x,0)$ в $h(x) = F_2(x,1)$.

Рассмотрим произведение $X \times [0,2]$ и отображение $F: X \times [0,2] \to Y$, где $F(x,\, t) = F_1(x,t)$ при $0 \le t \le 1$, и $F(x,\, t) = F_2(x, t-1)$ при $1 \le t \le 2$. ($F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$, $F(x,2) = h(x)$.)

Определим отображение $\varphi: X \times \mathbf{I} \to X \times [0,2]$ равенством $\varphi(x,\, t) = (x,\, 2t)$. Очевидно, $F\varphi(x,0) = F_1(x,0) = f(x)$, $F\varphi(x,1) = F_2(x,1) = h(x)$. Значит, композиция $F\varphi: X \times \mathbf{I} \to Y$ есть гомотопия между f и h.

$\sim$ В результате множество непрерывных отображений X в Y распадается на классы эквивалентности. Они называются *гомотопическими классами*, их множество обозначается $[X, Y]$, и гомотопический класс отображения f обозначается $[f]$.

$\sim$ Гомотопия $F: X \times \mathbf{I} \to Y$ взаимно однозначно определяет отображение $\overline{F}: X \times \mathbf{I} \to Y \times \mathbf{I}$: $\overline{F}(x,\, t) = (F(x,\, t), t)$.

Это позволяет определить *композицию* $GF : X \times \mathbf{I} \to Z$ гомотопи $F : X \times \mathbf{I} \to Y$ и $G : Y \times \mathbf{I} \to Z$: $\quad GF(x,t) = (G\overline{F}(x,t),t)$.

$\sim$ Вместе с тем определяется операция композиции гомотопических классов: для отображений $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$: $[g][f] = [gf]$. (Если $f \simeq f'$, $g \simeq g'$, то $gf \simeq g'f'$.)

- Композиция гомотопий ассоциативна: для гомотопий $f_t : X \to Y$, $g_t : Y \to Z$, $h_t : Z \to U$ композиции $(h_t\, g_t) f_t$ и $h_t(g_t\, f_t)$ совпадают и дают гомотопию $h_t g_t f_t : X \to Z$ или $([h][g])[f] = [h]([g][f]) = [h][g][f] = [hgf]$.

Каждому пространству X отвечает единичный гомотопический класс $[\mathbf{1}]_X$ отображений в себя, гомотопных тождественному отображению $\mathbf{1}_X$ ($[\mathbf{1}]_X = [\mathbf{1}_X]$). Очевидно, он удовлетворяет соотношениям: $[\mathbf{1}]_X[f] = [f] = [f][\mathbf{1}]_X$

$=$ $\{$**Эти законы ассоциативности и единицы дают нам казалось бы право говорить о новой (упрощенной) гомотопической категории: объекты старые – топологические пространства, а в качестве морфизмов нужно взять гомотопические классы отображений $[f]$. Однако мы сделаем еще один шаг в сторону огрубления топологической категории.**$\}$

$\sim$ Гомотопия отображений позволяет нам ввести отношение *гомотопической эквивалентности* между топологическими пространствами, обозначаемое $X \simeq Y$:

$\sim$ $X \simeq Y \Leftrightarrow$ **имеются отображения** $f : X \to Y$ **и** $g : Y \to X$ **такие, что** $gf \simeq \mathbf{1}_X$ **и** $fg \simeq \mathbf{1}_Y$**;**

f и g называются (взаимно обратными) *гомотопическими эквивалентностями.*

То, что это отношение является эквивалентностью, очевидно вытекает из предыдущих рассмотрений. Классы эквивалентности называются *гомотопическими классами* и гомотопический класс пространства X обозначается $[X]$.

Если два пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то для любого пространства Z гомотопические классы отображений X в Z совпадают с таковыми для Y, т.е. $[X,\, Z] = [Y,\, Z]$ (если $\varphi : X \to Y$ гомотопическая эквивалентность, то сопоставляя отображению $g : Y \to Z$ отображение $f = g\varphi : X \to Z$, мы получим указанное равенство множеств гомотопических классов отображений, см. ниже.)

$=$ $\{$**Мы построили новую *гомотопическую категорию*, ее объекты – гомотопические классы пространств, морфизмы – гомотопические классы отображений. При этом категорная эквивалентность $[X]$ и $[Y]$ в нашей категории означает просто совпадение объектов: $[X] = [Y]$.**$\}$

Отметим очевидные свойства гомотопических классов пространств и отображений:

- Для отображения $\varphi : X \to Y$ и произвольного пространства Z возникают отображения $\varphi^{\#} : [Y,\, Z] \to [X, Z]$ $(\varphi^{\#}(f) = f\varphi)$ и $\varphi_{\#} : [Z,\, X] \to [Z, Y]$ $(\varphi_{\#}(g) = \varphi\, g)$. При этом $(\psi\,\varphi)^{\#} = \varphi^{\#}\psi^{\#}$ и, аналогично, $(\psi\,\varphi)_{\#} = \psi_{\#}\varphi_{\#}$.

- Для подпространства $A \subset X$ гомотопия отображения $f : X \to Y$ однозначно определяет гомотопию ограничения f : $(f|_A)_t = (f_t)|_A$.

- Гомотопия отображения $f : X \to \prod Y_\alpha$ в прямое произведение пространств взаимно однозначно определяет гомотопию координатных отображений $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}$: $(f_\alpha)_t = p_\alpha f_t$.

В частности, произведение стягиваемых пространств стягиваемо.

-=-=-=-

Ретракты и деформации

$\sim$ Отображение p пространства X на свое подпространство A называется *ретракцией*, если точки A *неподвижны*, т.е. $p(x) = x$, для $x \in A$. Запись: $p : X \searrow A$.

$\sim$ Подпространство A называется *ретрактом* X, если существует ретракция X на A.

Если X хаусдорфово, то его ретракты – замкнутые подмножества.

- Пусть даны два пространства B и X, и два встречных отображения $i : B \to X$ и $r : X \to B$ с условием $ri = \mathbf{1}|_B$. Тогда композиция $p = ir : X \to X$ удовлетворяет тождеству $p^2 = p$. Эти условия выполнены в ситуации, когда $B \subset X$ и r есть ретракция.

В общем случае отображение i оказывается вложением на *замкнутое* подмножество $A \subset X$, и p – ретракцией X на A.

(Очевидно, i взаимно однозначно отображает B на A (для хаусдорфова X).

Если $x_0 \in X$ лежит в замыкании $i(B)$, то r переводит точки из малой окрестности x_0 в малую окрестность $r(x_0) = b_0$. Образы как угодно близких к b_0 точек лежат в окрестности x_0 и тогда $i(b_0) = x_0$. Значит, $i(B) = A$ замкнуто.

Обратное отображение $r|_A : A \to B$ непрерывно, т.к. ограничение непрерывного отображения непрерывно. Значит, A гомеоморфно B и $ir|_A$ есть тождественное вложение A в X, и $p = ir : X \to X$ есть отображение X в себя тождественное на A, т.е. ретракция X на A.)

- Описанная ситуация имеет место, например, для проекций прямого произведения на сомножители, скажем, для проекций $\mathbb{R}^n$ на координатные плоскости. Поэтому часто вообще ретракции называют проекциями.

- **Если $r : X \searrow A$ ретракция, то любое отображение $f : A \to Z$ продолжается на X (до отображения $\bar{f} = fr$).**

- Если $A \subset B \subset X$, и A ретракт X, то A есть ретракт также и B.

- Если X_α ретрагируется на A_α при всех $\alpha \in \mathcal{A}$, то $\prod_\alpha X_\alpha$ ретрагируется на $\prod_\alpha A_\alpha$.

В частности, прямая $\mathbb{R}$ ретрагируется на каждый отрезок $[0, \frac{1}{2^n}]$. Поэтому счетное произведение прямых $\mathbb{R}^\infty = \prod_i \mathbb{R}_i$ ретрагируется на гильбертов кирпич, а так как гильбертово пространство $\mathbb{H}$ топологически есть подпространство этого прямого произведения, то и оно ретрагируется на гильбертов кирпич.

- Пространство $\mathbb{R}^n$ или шар $\mathbb{B}^n$ с удаленным началом $\mathbb{O}$ ретрагируется (по радиусам)на граничную сферу шара $\mathbb{S}^{n-1}$.

= Если начало не выкидывать, то ретракция невозможна! Это один из основных фактов топологии, и мы им основательно займемся дальше. Для начала заметим, что отрезок, очевидно, не ретрагируется на свои две граничные точки. Доказательство, что круг не ретрагируется на граничную окружность уже не так просто. Доказательств много, приведем то, которое не требует серьезной техники, хотя указывает путь для индуктивного доказательства неретрагируемости шара любой размерности на свой край.

-=-=-=-

Двумерный диск не ретрагируется на граничную окружность

Доказательство от противного. Пусть $r : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ ретракция. Возьмем точку $x_0 \in \mathbb{S}^1$, и положим $K = r^{-1}(x_0)$. $K \subset \mathbb{B}^2$ – компакт, пересекающий край только в точке x_0. Возьмем конечное множество треугольников T_i таких, что:

1. K покрыт внутренностями треугольников T_i,
2. $\bigcup T_i$ лежит в ε-окрестности $U_\varepsilon(K)$,

3. Только один из этих треугольников, пусть T_1 пересекает $\mathbb{S}^1$, притом только одной своей круглой стороной, которая является окрестностью точки x_0 в $\mathbb{S}^1$, концы a, b этой стороны лежат по разные стороны от x_0 в малой окрестности этой точки,

4. Стороны треугольников пересекаются между собой только внутренними точками (в частности, треугольники не имеют общих вершин).

5. Число ε возьмем столь малым, что $r(U)$ лежит в содержащей x_0 половине окружности $\mathbb{S}^1$.

Выполнения свойства 4. можно добться сколь угодно малым сдвигом вершин треугольников, не нарушая при этом других свойств.

Граница U состоит из стороны треугольника, содержащей x_0, и остальной части, лежащей внутри $\mathbb{B}^2$, кроме точек a, b, которые разделяют эти две части.

Заметим, что внутренняя часть состоит из конечного числа связных ломаных без самопересечений. Некоторые из них возможно, замкнуты, во всяком случае эти ломаные не могут иметь конечных точек внутри $\mathbb{B}^2$, и если ломаная не замкнута, то она имеет два конца. Концы не могут лежать внутри диска, и ими могут быть только точки a и b; значит, имеется *связная* ломаная l, часть границы U с концами a, b. Образ $r(l)$ есть связный путь, соединяющий точки a и b и лежащий в полуокружности (гомеморфной отрезку). Следовательно, этот образ проходит через разделяющую a и b точку x_0, что невозможно, так как ломаная l лежит вне прообраза K точки x_0.

(Заметим, что если мы попробуем пойти дальше и применить этот метод к доказательству неретрагируемости шара $\mathbb{B}^3$ на граничную сферу, то нам придется рассматривать пересечения границ малых тетраэдров, что заметно сложнее, чем пересечение сторон треугольников. Мы получим поверхность – компоненту границы окрестности прообраза точки, и чтобы завершить доказательство, надо будет доказать, что эта компонента не ретрагируется на свою границу (окружность вокруг выбранной точки). Последнее обобщает теорему о $\mathbb{B}^2$. Эти трудности еще преодолимы на элементарной основе, но дальнейшее повышение размерности требует серьезной теории. Мы докажем ниже теорему для всех размерностей на другом пути.)

-=-=-=-

Абсолютные ретракты

$\sim$ **I. Пространство Z есть *абсолютный ретракт* (принадлежит классу AR, пишут $Z \in$ AR), если его гомеоморфный образ в любом нормальном пространстве W есть ретракт этого пространства.**

- Абсолютные ретракты обладают эквивалентным двойственным свойством:

$\sim$ **II. непрерывное отображение в такое пространство Z замкнутого подмножества A нормального пространства X имеет распространение на все X.**

$\approx$ *Для отрезка и для $\mathbb{R}$ это есть утверждение Титце - Урысона.*

- **Пространство Z есть AR $\Leftrightarrow$ Z обладает свойством II.**

$\Leftarrow$: Если нормальное пространство Z с указанным свойством лежит как замкнутое подмножество в каком-либо нормальном W, то тождественное отображение Z в себя продолжается до ретракции $r : W \searrow Z$. Это и значит, по определению, что Z — абсолютный ретракт.

$\Rightarrow$: Пусть Z абсолютный ретракт и A замкнутое подмножество в нормальном X, причем дано отображение $f : A \to Z$. Построим пространство $Y = Z \cup_{x=fx} X$ (которое называется “приклейкой X к Z по f”), отождествив в $X \cup Z$ каждую точку $x \in A$ с $f(x) \in Z$.

$\sim$ (Топология в $X \setminus A$ и в $Z \setminus f(A)$ сохраняется старой. Окрестность точки $z \in f(A)$ состоит из объединения ее окрестности U в Z и пересечения с $X \setminus A$ окрестности $W(f^{-1}(U \cap f(A)))$.

Скажем подробнее. Пусть $x_0 \in f(A)$ и U – окрестность x_0 в Z. К этой окрестности мы должны присоединить точки из $X \setminus A$, ставшие ей близкими после приклейки X к Z. Эти точки лежат в окрестности множества $f^{-1}(x_0)$ в X, но вне A (точки A отождествлены с точками в Z и уже "учтены" окрестностью U). Поэтому мы берем окрестность $W(f^{-1}(x_0))$ в X и пересекаем ее с $X \setminus A$. Можно считать, что $W \cap A$ есть $f^{-1}(U \cap f(A))$.)

Z оказывается подпространством в Y (открытые подмножества Z остались открытыми и новых не прибавилось), притом Z замкнуто в Y ($X \setminus A$ открыто в Y). Имеется естественное отображение $g : X \cup Z \to Y$ и, по условию, ретракция $r : Y \searrow Z$. Композиция rg дает требуемое продолжение F отображения f на все X.

- Произведение абсолютных ретрактов есть абсолютный ретракт.

В частности, евклидовы пространства и кубы – абсолютные ретракты.

- Ретракты абсолютных ретрактов также являются AR.

(Пусть A замкнуто в нормальном X и r ретракция абсолютного ретракта Z на B. Если $F : X \to Z$ продолжение отображения $f : A \to B \subset Z$, то $rF : X \to B$ – продолжение f до отображения X в B.)

Например, таковы прямые сомножители абсолютных ретрактов (евклидовы пространства и кубы достаточно большой размерности могут быть разложены в прямые произведения различными нетривиальными способами).

- Абсолютные ретракты стягиваемы:

пространство X лежит в своем конусе $\mathbf{C}X$, и если X есть AR, то X есть ретракт конуса, значит, $\mathbf{1}_X \simeq \mathbf{0}$.

Если A подпространство AR Z, и $f : A \to Y$ можно продолжить на Z, то $f \simeq \mathbf{0}$.

-=-=-=-

Абсолютные окрестностные ретракты

$\sim$ I Пространство C принадлежит классу ANR ($C \in$ ANR) – *абсолютных окрестностных ретрактов*, (absolute neighborhood retract), если любой гомеоморфный его образ в любом (нормальном) пространстве является ретрактом некоторой своей окрестности в этом пространстве.

$\approx$ Это верно для сфер и для более широкого класса пространств, в частности, полиэдров.

Имеется эквивалентное двойственное свойство, которое формулируется и доказывается по аналогии со свойством пространств типа AR:

$\sim$ II Любое отображение замкнутого подмножества A нормального пространства X в C может быть продолжено на окрестность A в X.

- Сочетание этих двух свойств показывает:

Если $B \subset C$ замкнутое подмножество, C ANR (или AR), и B является ретрактом своей окрестности N в C, $r : N \searrow B$, то B есть ANR.

(Для пары (X, A) данное отображение $f : A \to B$ сначала продолжается (свойство **I**) до отображения F в C окрестности $U(A) \subset X$, и композиция rF есть продолжение f на $U(A) \cap (rF)^{-1}N$ – на окрестность A в X. Тогда B – ANR по свойству **II**.)

$\approx$ В частности, стандартная сфера $\mathbb{S}^n$, очевидно, является ретрактом своей окрестности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}$), где $\mathbb{O}$ начало, ретрагируется на $\mathbb{S}^n$ по радиусам). Таким образом, **сфера есть ANR**.

В то же время вложения, например, окружности в $\mathbb{R}^3$ могут быть очень сложными, скажем, содержать в себе компакт Антуана.

Кроме сфер к классу ANR принадлежит каждое подмножество евклидова пространства, имеющее окрестность, которая на него ретрагируется. В частности, такими подмножествами являются полиэдры.

-=-=-=-

Лемма Борсука (о продолжении гомотопии)

Следующая лемма Борсука очень важна в гомотопической технике:

Лемма о продолжении гомотопии. Пусть дано пространство X, для которого нормально произведение $X \times [0,\ 1]$ (например, X метризуемо). Пусть $A \subset X$ замкнутое подмножество и пусть дано непрерывное отображение $f : X \to C$, где $C \in \mathrm{ANR}$ (например, отображение в $\mathbb{S}^n$). Далее, пусть $h(x,t) : A \times [0,\ 1] \to C$ гомотопия этого отображения на A: для $x \in A$ $h(x,\ 0) = f(x)$.

Существует гомотопия $H(x,t) : X \times [0,\ 1] \to C$ отображения f на всем X, $H(x,0) = f$, которая продолжает гомотопию h: $H(x,t) = h(x,t)$, если $x \in A$.

(Эта лемма называется также *леммой о стакане.*)

Доказательство. Мы имеем непрерывное отображение $\bar{h} : X \times 0 \cup A \times [0,\ 1] \to Y$ замкнутого подмножества пространства $X \times [0,\ 1]$ ("стакана на столе") равное $f(x)$ на $X \times 0$ и $h(x,t)$ на $A \times [0,\ 1]$. Нам надо продолжить это отображение на все $X \times [0,\ 1]$.

Продолжим его сначала на окрестность $W(A) \subset X \times [0,1]$ "стакана" $A \times [0,\ 1]$, используя то, что $C \in \mathrm{ANR}$.

Покажем, что в W лежит окрестность множества $A \times [0,1]$ вида $U \times [0,1]$, где U окрестность A в X. Покроем $A \times [0,1]$ базисными окрестностями вида $U_a \times V(t)$, $a \in A, t \in [0,1]$, лежащими в W. Для каждой точки $a \in A$ отберем конечное покрытие (компактного) "слоя" $a \times [0,1]$: $U_1(a) \times V(t_1), \ldots, U_k \times V(t_k)$ (k зависит от a) и возьмем окрестность слоя $U(a) \times [0,1]$, где $U(a) = \bigcap_{i \le k(a)} U_i(a)$. Эти окрестности лежат в W. Положим $\bigcup_a U_a = U$. Тогда $A \times [0,1] \subset U \times [0,1] \subset W$.

Пусть $\alpha(x)$ функция Урысона на X, равная 0 вне U и 1 на A. Построим отображение $\varphi : X \times [0,\ 1] \to X \times [0,\ 1]$, тождественное на $A \times [0,\ 1] \cup X \times 0$ и переводящее отрезок $x \times [0,\ 1]$ линейно в отрезок $x \times [0,\ \varphi(x)]$.

Композиция $\bar{h}\varphi : X \times [0,\ 1] \to \mathbb{S}^n$ совпадает с f на $X \times 0$ и с h на $A \times [0,\ 1]$. ■

Для построения продолжения h на $U \times [0,\ 1]$ мы потребовали нормальности произведения $X \times [0,\ 1]$. Она не следует из нормальности X, хотя это так, например, для метризуемых пространств, т.к. произведение метризуемых пространств метризуемо. Существенным в доказательстве является компактность "слоя".

≈ Покажем, что любой гомеоморфизм сферы $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ существенен. Пусть $h_t : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ гомотопия от $h_0 = h$ к $h_1(\mathbb{S}^n) = a$. Полагая $H(\mathbb{B}^{n+1}) = a$, имеем, по лемме, гомотопию $H_t : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, продолжающую h_t, $H_1 = H = h_1$, $H_0 = h_0 = h$. Но $H_0|_{\mathbb{S}^n} = h$ и $= h^{-1}H_0$ есть ретракция шара на его край, что невозможно.

-=-=-=-=-=-

8. СИМПЛЕКСЫ. КОМПЛЕКСЫ. ПОЛИЭДРЫ

-=-=-=-

Выпуклые множества и симплексы

В дальнейшем нам постоянно будут нужны средства *кусочно линейной категории*, которая со своими объектами (комплексами и полиэдрами) и морфизмами (симплициальными и кусочно линейными отображениями) образует особый мир, где доступны методы линейной геометрии, и которая является мощным аппаратом для решения топологических проблем.

Начнем с понятия выпуклости.

$\sim$ В пространстве $\mathbb{R}^n$ *выпуклым* называется множество, которое вместе с каждой парой своих точек содержит соединяющий их отрезок.

- Пересечение выпуклых множеств (конечное или бесконечное) выпукло.

$\sim$ *Выпуклой оболочкой* $\mathbf{C}A$ произвольного множества A называется пересечение всех содержащих его выпуклых множеств. Очевидно, это пересечение является (единственным) минимальным выпуклым множеством, содержащим A.

$\sim$ Множество $P = \{\mathbf{x}_i\}$ из $r + 1 \leq n + 1$ точек $\mathbf{x}_i$ *(линейно) независимо* (или *в общем положении*), если оно не содержится в плоскости размерности меньше r. Упорядочив эти точки как-либо, скажем, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\ldots$ $\mathbf{x}_k$, мы определим k-репер. Точка $\mathbf{x}_0$ служит началом, а векторы $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ – принимаются за векторы репера (точки $\mathbf{x}_i$ отождествляются со своими радиус-векторами). В случае $r = n$ этот репер можно принять за базисный в пространстве. В частности, он задает ориентацию пространства. В зависимости от того, совпадает она или нет с ориентацией принятой в пространстве заранее, систему P можно считать положительной или отрицательной.

$\sim$ *Симплексом размерности* p (или p-симплексом) Δ^p называется выпуклая оболочка независимой системы P из $p+1$ точек. Точки системы называются *вершинами* симплекса. Если вершины упорядочены, они задают ориентацию пространства, которая принимается за ориентацию симплекса. Число p называется *размерностью* $\dim \Delta^p$ симплекса.

$\approx$ Точка, отрезок, треугольник и тетраэдр – примеры симплексов малых размерностей. Конус над симплексом есть симплекс на единицу большей размерности.

$\sim$ Каждое подмножество $Q \subset P$ из $q+1$ вершин также является независисмым и его выпуклая оболочка есть q-симплекс, который называется q-мерной *гранью* симплекса Δ^p. Всего имеется C_p^q q-мерных граней в Δ^p и 2^p всех граней (если включить в это число пустое множество и сам симплекс в качестве *несобственных граней*.)

$=$ (Выпуклая оболочка компактного подмножества в $\mathbb{R}^n$ есть объединение симплексов с вершинами в точках данного множества. Поэтому выпуклая оболочка получается применением конечное число раз операции объединения всех отрезков с концами в точках полученного на предыдущем шаге множества.)

$\sim$ Линейная структура симплекса

Каждый k-симплекс Δ определяет его *несущую плоскость* Π_Δ, это – линейная оболочка его вершин (минимальная плоскость, содержащая все вершины). Для любых двух симплексов Δ_1 и Δ_2 любое отображение множества вершин Δ_1 в множество вершин Δ_2 определяет аффинное отображение Π_{Δ_1} в Π_{Δ_2} (линейное в соответствующих реперах, если начальная точка переходит в начальную). Это отображение определено не вполне однозначно, но оно определяется однозначно, если взаимно однозначно вершинное соответствие. Отображение симплекса в симплекс называется линейным, если оно есть ограничение аффинного отображения несущих плоскостей.

$\sim$ Собственные грани Δ (т.е. все грани, кроме самого Δ и пустой грани) образуют *край* (границу) $\partial\Delta$ k-симплекса, которая гомеоморфна $(k-1)$-сфере. Внутренность симплекса $\Delta \setminus \partial\Delta$ называется открытым симплексом и обозначается $\overset{\circ}{\Delta}$.

- Край $\partial\Delta$ и внутренность $\overset{\circ}{\Delta}$ совпадают с топологическими $\operatorname{Fr}\Delta$ и $\operatorname{Int}\Delta$, если размерности симплекса и объемлющего пространства совпадают (например, в несущей плоскости).

Разобьем множество вершин k-симплекса Δ на два непересекающихся подмножества из $l+1$ и $m+1$ точек. Эти подмножества определяют l-грань Δ_1 и m-грань Δ_2, причем $k = l+m+1$. В этом случае грани называются *скрещивающимися.*

- *Полезное свойство скрещивающихся граней.* Отрезки, соединяющие точки Δ_1 с точками Δ_2, могут пересекаться только в общем конце. Середины этих отрезков образуют подмножество симплекса Δ, которое отождествляется с прямым произведением $\Delta_1 \times \Delta_2$, а открытый симплекс $\overset{\circ}{\Delta}$ представляется прямым произведением $\overset{\circ}{\Delta}_1 \times \overset{\circ}{\Delta}_2 \times (0,\, 1)$.

-=-=-=-

Комплексы (геометрические).

$\sim$ **Комплексы**. Множество замкнутых симплексов в $\mathbb{R}^n$ называется *комплексом* (геометрическим или прямолинейным), если пересечение любых двух симплексов есть их общая грань (может быть, пустая).

(Имеются и другие типы комплексов, поэтому иногда надо оговаривать, что имеется в виду именно данное определение.)

$\approx$ Совокупность всех симплексов размерности $\leq r$ в комплексе K образует подкомплекс $K^r \subset K$, называемый *r-мерным остовом* K (или r-остовом) комплекса K.

$\sim$ Максимальная размерность симплексов, входящих в комплекс K, называется его *размерностью* $\dim K$.

$\approx$ Комплекс размерности 1 называется *графом.*

$\sim$ Множество симплексов, для которых данный симплекс $\sigma \in K$ является общей гранью, называется *звездой* σ и обозначается $st(\sigma)$ (от английского *star* – звезда).

- *Открытая звезда* $\overset{\circ}{st}(\sigma)$ состоит из всех тех открытых симплексов звезды $st(\sigma)$, замыкания которых содержат σ. Открытые звезды вершин образуют открытое покрытие тела комплекса.

- Если симплекс в комплексе не является гранью других симплексов (т.е. совпадает со своей звездой), то он есть пересечение звезд своих вершин. Проверьте!

(Вообще, пересечение звезд вершин симплекса есть его звезда: $\bigcap\limits_{v\in\sigma\in K} St(v) = St(\sigma)$.)

$\sim$ **Комплексы и топология**. Комплекс есть *множество* симплексов, а не их объединение. Объединение симплексов комплекса K называется *телом* комплекса и обозначается $|K|$.

Чтобы это подпространство в $\mathbb{R}^n$ имело хорошие топологические свойства, требуется дополнительное условие:

$\sim$ Комплекс *локально конечен*, если каждая точка его тела имеет в нем окрестность, пересекающуюся с конечным числом симплексов. В этом случае тело комплекса локально компактно.

- $|K|$ оказывается локально компактным пространством, если открытые звезды конечны и приняты за открытые подмножества в $|K|$ с их естественной топологией.

$\approx$ (Заметьте, что синусоида есть тело одномерного бесконечного комплекса с конечными звездами – и топологией индуцированной из ее вложения в плоскость. Эта топология не совпадает с введенной выше комбинаторной топологией, порожденной открытыми звездами вершин. В этой последней синусоида несвязна – распадается на отрезок и две бесконечные дуги.)

- Если каждая точка пространства имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным множеством симплексов комплекса (возможно, пустым), то тело $|K|$ будет локально компактным и замкнутым подмножеством (т.к. симплексы замкнуты).

Разумеется эти свойства выполнены, если комплекс конечен.

Тело $|K|$ комплекса K является *полиэдром*:

Полиэдры и триангуляции

$\sim$ *Прямолинейным (или геометрическим) полиэдром* P в $\mathbb{R}^n$ называется подпространство, которое может быть представлено телом некоторого комплекса. Если $P = |K|$, то комплекс K называется *триангуляцией* полиэдра P.

Тело у комплекса одно. Триангуляций у полиэдра (бесконечно) много (если это не дискретное множество точек).

$\sim$ Между триангуляциями полиэдра имеется отношение частичного порядка:

Одна триангуляция T_1 полиэдра P называется *подразделением* другой T_2, если каждый симплекс первой триангуляции лежит в некотором симплексе второй. (При этом, очевидно, каждый симплекс T_2 оказывается триангулированным симплексами T_1.)

= Объединение и пересечение двух (конечного числа) полиэдров есть полиэдр, две триангуляции одного и того же полиэдра имеют изоморфные подразделения. Для доказательства этих и других утверждений, составляющих технику обращения с полиэдрами, полезно, в частности, ввести понятие выпуклых многогранников и их комплексов. Мы ограничимся здесь необходимыми сведениями и вернемся к обшей теории дальше.

-=-=-=-

Барицентрические координаты

Барицентрические координаты симплекса

$\sim$ Пусть дан симплекс Δ^k в k-мерной плоскости P^k в $(k+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_k$ (иначе говоря, дано $k+1$ точек *в общем положении* в P^k – не содержащихся в $(k-1)$-плоскости). Пусть b – точка в $\mathbb{R}^{k+1} \setminus P$. Примем b за начало в $\mathbb{R}^{k+1}$, обозначим векторы $\overrightarrow{ba_i}$ через $\mathbf{e}_i$ и примем их за базисные в $\mathbb{R}^{k+1}$.

Плоскость P^k имеет уравнение $\sum_i \alpha^i = 1$ в этом базисе, $(\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^k)$ – координаты точки x. (Базисные векторы удовлетворяют этому уравнению.)

Мы будем рассматривать числа α_i независимо от внешнего пространства как координаты точки в плоскости P^k, связанные указанным соотношением, поскольку их набор точку плоскости определяет однозначно. Неотрицательные наборы определяют точки симплекса Δ^k с вершинами a_i, т.е. их выпуклую оболочку. (Условие $\alpha_{i_0} \geq 0$ задает в P^k полупространство, содержащее a_{i_0} и ограниченное плоскостью остальных точек a_i, во втором полупространстве координата $\alpha_{i_0} < 0$. Таким образом, неотрицательные наборы определяют пересечение полупространств, т.е. выпуклое множество, содержащее все a_i, и притом минимальное – докажте!)

Наборы α_i называются *барицентрическими координатами* симплекса Δ^k.

$\sim$ Условие $\alpha_i = 0$ выделяет грань симплекса, противолежащую его i-ой вершине. Система таких условий выделяет грань меньшей размерности, на которой остальные α_i служат барицентрическими кооординатами.

- Название "барицентрические" связано с тем, что точка $x = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ оказывается центром тяжести (барицентром), если вершина a_i несет груз величиной α_i.

Примем одну из точек a_i, скажем, a_0, за начальную в P^k. Векторы $a_i - a_0 = \mathbf{v}_i$ (линейно) независимы. Примем их за базисные в плоскости P^k. Координаты точки $x = (\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^k)$ в этом базисе будут $(\alpha^1, \ldots, \alpha^k)$:

$$x - b = \sum_{i\geq 0} \alpha^i \mathbf{e}_i = \sum_{i\geq 1} \alpha^i \mathbf{e}_i + \alpha^0 \mathbf{e}_0 = \sum_{i\geq 1} \alpha^i (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_0) + (\sum_{i\geq 0} \alpha^i)\mathbf{e}_0 = \sum_{i\geq 1} \alpha^i \mathbf{v}_i + a_0 - b,$$

т.е. $x - a_0 = \sum\limits_{i\geq 1} \alpha^i \mathbf{v}_i$, что и значит, что координаты x в базисе $\mathbf{v}_i$ суть α^i, $1 \leq i \leq k$.

Линейное отображение симплекса в симплекс

Пусть теперь f – ставит в соответствие точкам $a_0, \ldots, a_k \in P^k$ точки $c_0, c_1, \ldots, c_k$ $c_i = f(a_i)$ (некоторые c_i могут совпадать) некоторой плоскости Q^l, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^{l+1}$. Возьмем в $\mathbb{R}^{l+1} \setminus Q^l$ точку d.

Возьмем независимые векторы $\mathbf{g}_j$, $0 \leq j \leq l$, с общим началом в d и с концами на плоскости Q^l; они образуют базис в $\mathbb{R}^{l+1}$. Как и выше, координаты точки $y \in Q^l$ в этом базисе являются барицентрическими координатами этой точки в плоскости Q^l. Примем за начало в Q^l точку $c_0 = f(a_0)$. Векторы $\mathbf{w}_j = \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_0$ образуют базис в Q^l.

Поставив в соответствие векторам $\mathbf{v}_i = a_i - a_0$ векторы $\mathbf{u}_i = c_i - c_0$ и продолжив это соответствие по линейности, мы получим линейное отображение $f : P^k \to Q^l$. Оно продолжается до линейного отображения $F : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{l+1}$ $(F(b) = d)$.

Пусть (h_i^j), $i \geq 0$, $j \geq 0$, – матрица F в базисах $(\mathbf{e}_i)$ и $\mathbf{g}_j$: $F(\mathbf{e}_i) = h_i^j \mathbf{g}_j$, тогда $\sum_j h_i^j = 1$ и для $i \geq 1$

$$f(\mathbf{u}_i) = F(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_0) = \sum_{i\geq 0} h_i^j(\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_0) = \sum_{j\geq 1} h_i^j(\mathbf{g}_j) + h_i^0\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0 =$$

$$= \sum_{j\geq 1} h_i^j(\mathbf{g}_j) - \sum_{j\geq 1} h_i^j(\mathbf{g}_0) + \sum_{j\geq 0} h_i^j(\mathbf{g}_0) - \mathbf{g}_0 = \sum_{j\geq 1} h_i^j(\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_0) + \mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0 = \sum_{j\geq 1} h_i^j \mathbf{w}_j.$$

Т.е. (h_i^j), $i \geq 1$, $j \geq 1$ – матрица линейного отображения f плоскости P^k в Q^l.

Пусть (α^i) – барицентрические координаты точки x: $x = \sum\limits_{0\leq i\leq k} \alpha^i a_i = \sum\limits_{1\leq i\leq k} \alpha^i \mathbf{v}_i$. Тогда $f(x) = \alpha^i f(\mathbf{v}_i) = \alpha^i h_i^j \mathbf{w}_j$. Таким образом, отображение f переводит точку с барицентрическими координатами α^i в точку с барицентрическими координатами $\alpha^i h_i^j$, которые зависят от выбора базиса.

В частности, если f взаимно однозначно и точки $f(a_i) = c_i$ независимы, а векторы $\mathbf{v}_i = c_i - c_0$ выбраны в качестве базисных, то матрица (h_i^j) единичная и барицентрические координаты при отображении сохраняются.

Если f переводит симплекс Δ^k в симплекс Δ^l и вершины переходят в вершины, то барицентрические координаты прообразов одной вершины складываются.

Барицентрические координаты и барицентрические отображения комплекса.

Пусть даны p-симплекс Δ^p с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_p$, его грань q-грань Δ^q с вершинами $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}$ и точка $x \in \Delta^q$. Барицентрические координаты точки x относительно грани Δ^q сохраняются при переходе к системе координат симплекса, нужно только добавить нули в качестве координат, отвечающих тем вершинам Δ^p, которые не являются вершинами грани. Из этого видно, что мы можем ввести систему барицентрических координат сразу для целого комплекса K (для простоты пусть он будет конечным). Упорядочим вершины K: $v_1, v_2, \ldots, v_N$ и для точки x, лежащей в симплексе $\sigma \in K$ положим, что ее барицентрическая координата $(x^i) = 0$, если v_i не вершина симплекса σ, а если $v_i \in \sigma$, то x^i есть барицентрическая координата x в σ, отвечающая v. Сохраняется свойство, что сумма барицентрических координат точки равна 1.

Пусть теперь дан комплекс K и каждой вершине $v \in K$ поставлена в соответствие точка $\tilde{v}$ в аффинном прстранстве $\mathbb{R}^n$. Это *вершинное отображение* (заданное на вершинах) продолжается с помощью барицентрических координат до симплициального отображения K в $\mathbb{R}^n$. Именно, если точка $x \in \sigma^p \in K$ имеет в σ^p барицентрические координаты $x^{i_0}, \ldots, x^{i_p}$, то ей отвечает точка $\tilde{x} = (x^{i_0}\tilde{v}_{i_0} + \cdots + x^{i_p}\tilde{v}_{i_p}) \in \mathbb{R}^n$. (Мы будем называть это *барицентрическим продолжением вершинного отображения.*)

- Любой конечный комплекс K с N вершинами изоморфен подкомплексу симплекса Δ^{N-1}, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами комплекса.

Симплексам K отвечают грани той же размерности и с соответствующими вершинами в Δ. Барицентрические координаты точек комплекса K совпадают с их барицентрическими координатами в Δ.

-=-=-=-

Барицентрическое подразделение симплекса.

Симплекс Δ^n имеет особую триангуляцию $\mathbf{T}$, в которой для каждого n-симплекса $\sigma^n \in \mathbf{T}$ порядок барицентрических координат по величине $(\alpha^{i_0}(x) \leq \alpha^{i_1}(x) \leq \cdots \leq \alpha_{i^n}(x))$ у всех точек σ^n один и тот же. Очевидно, число этих симплексов $(n+1)!$.

Это подразделение получается проведением для каждой пары вершин $(n-1)$-мерной плоскости (в несущей плоскости), на которой равны значения соответствующей пары барицентрических координат. Построение этого подразделения можно описать индуктивно: на k-ом шаге строятся конуса с вершинами в барицентрах k-граней симплекса Δ^n над симплексами триангуляций $(k-1)$-граней, построенных на предыдущем шаге.

$\sim$ Эта триангуляция симплекса называется *барицентрической.*

$\approx$Барицентрическая триангуляция $\mathbf{T}$ треугольника получается проведением трех медиан, тетраэдра – шести плоскостей, проходящих каждая через ребро и середину противолежащего ребра (или – через медианы двух граней с общим ребром).

- Имеет место важный факт, который нам потребуется в следующей главе 9:

Диаметры симплексов барицентрического подразделения T не превышают диаметр симплекса Δ^n, умноженный на $\frac{n}{n+1}$.

$\square$ Пусть в n-симплексе σ_i подразделения $\mathbf{T}$ координата α_k больше остальных. В каждой точке отрезка L, соединяющего вершину a_k с барицентром противолежащей $(n-1)$-грани Δ_k^{n-1} все координаты, кроме α_k, имеют равное значение: в барицентре грани Δ_k^{n-1} значение $\frac{1}{n}$, в барицентре Δ^n – $\frac{1}{n+1}$, в вершине a_k – нуль. Поэтому отношение длины L к расстоянию от a_k до барицентра Δ^n равно $\frac{n+1}{n}$, и следовательно, диаметр симплекса, отсекаемого плоскостью, параллельной Δ_k^{n-1} и проходящей через барицентр в $\frac{n+1}{n}$ раз меньше диаметра Δ^n. Но симплекс σ_i лежит в Δ^n. Самое важное тут то, что $\frac{n}{n+1} < 1$. Поэтому, итерируя операцию барицентрического подразделения, применяя ее ко всем получающимся на предыдущем шаге симплексам, мы будем получать *измельчения* исходного симплекса, т.е. триангуляции с диаметрами симплексов меньше любого заданного $\varepsilon > 0$.

-=-=-=-

Кусочно линейная аппроксимация отображений в $\mathbb{R}^n$ (и в сферу $\mathbb{S}^n$)

Симплициальное отображение однозначно определяется отображением вершин (*вершинным соответствием*). При этом возникает (непрерывное) отображение $\bar{f}$ тела $|K_1|$ комплекса K_1 в K_2 которое также называется симплициальным.

$\sim$ Отображение φ полиэдра P_1 в полиэдр P_2 можно было бы назвать симплициальным, если оно симплициально для некоторых их триангуляций. Но поскольку априори триангуляции не фиксируются, отображение называется *кусочно линейным*, если комплексы могут быть триангулированы так, что φ станет симплициальным отображением K_1 в K_2.

$\sim$ Но для нас важен еще один случай – *отображения полиэдра в евклидово пространство* (или сферу). В этом случае отображение $\varphi : P \to \mathbb{R}^n$ называется *кусочно линейным*, если P может быть триангулирован так, что каждый симплекс отображается линейно.

Отображение комплекса в евклидово пространство называется симплициальным, если оно линейно на каждом симплексе.

Для отображения комплекса в пространство размерности более высокой, чем размерность самого комплекса, обычно будем предполагать, что образ симплекса есть симплекс. Это так для оотображений *в общее положение*:

Скажем, что отображение (конечного) комплекса R в аффинное прстранство $\mathbb{R}^n$ есть отображение *в общее положение*, если в общем положении находятся образы каждой системы из $p \leq n+2$ точек (т.е. выпуклая оболочка такой системы есть $(p-1)-$симплекс).

Сколь угодно малым сдвигом образов вершин можно получить симплициальное отображение в общее положение. Эта операция называется приведением в общее положение малым сдвигом.

Теорема о кусочно линейной аппроксимации. **Пусть дано непрерывное отображение $\varphi : P \to \mathbb{R}^n$ (компактного) полиэдра в евклидово пространство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такая триангуляция T полиэдра и симплициальное отображение $\bar{\varphi} : T \to \mathbb{R}^n$, что $d(\varphi, \bar{\varphi}) = \max\limits_{x \in P} d(\varphi(x), \bar{\varphi}(x)) < \varepsilon$.**

Аналогичная теорема верна и для отображений в сферу.

$\square$ Возьмем какую-нибудь триангуляцию T полиэдра и подразделим ее барицентрически достаточное число раз. Положим $\bar{\varphi}(v) = \varphi(v)$ для каждой вершины полученной триангуляции и продолжим $\bar{\varphi}$ барицентрически на симплексы. В силу равномерной непрерывности φ, если диаметры симплексов достаточно малы, расстояние между образами точек одного симплекса меньше $\varepsilon/2$, тогда и диаметры $\bar{\varphi}(\sigma)$, $\sigma \in T$, меньше $\varepsilon/2$, и расстояние $d(\varphi(x), \bar{\varphi}(x)) \leq d(\varphi(x), \varphi(v)) + d(\bar{\varphi}(v), \bar{\varphi}(x)) < \varepsilon$, где v какая-либо вершина симплекса, содержащего точку x.) $\blacksquare$

- Отображение $f : P \to \mathbb{S}^n$ k-мерного полиэдра в сферу, где $k < n$, несущественно.

$\square$ Мы доказывали, что два равномерно близких отображения f и g в сферу одного пространства X всегда гомотопны (с помощью линейной гомотопии по дугам больших кругов).

Аппроксимируем данное $f(x)$ ε-близким кусочно линейным отображением $g(x)$. По предыдущему, $f(x)$ и $g(x)$ гомотопны. Но т.к. размерности симплексов в P и их линейных образов в $\mathbb{S}^n$ меньше n, не все точки сферы покрыты образом отображения g, а тогда, как было показано выше (стр. **??**), оно несущественно. Значит, таково и f.

-=-=-=-=-=-

9. НЕСТЯГИВАЕМОСТЬ СФЕРЫ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ.

РАЗМЕРНОСТЬ $\mathbb{R}^n$

-=-=-=-

Мы докажем сейчас классическую лемму, из которой затем выведем теоремы о неретрагируемости шара на граничную сферу и о нестягиваемости сферы, эквивалентные знамиенитой теореме Брауэра о неподвижной точке. Лемма принадлежит немецкому математику Эмануэлю Шпернеру, а вывод теоремы о неретрагируемости я заимствую из Александровской части статьи П.С. Александрова и Б.А. Пасынкова (УМН т.XII, вып.5, 1957 г.).

Мы обозначаем стандартный n-мерный симплекс через Δ^n, его вершины через $\mathbf{a_i}$, $0 \le i \le n$, грань, противолежащую вершине $\mathbf{a_i}$, обозначим Δ_i^{n-1}.

Лемма Шпернера и неретрагируемость шара

- **Лемма Шпернера. Пусть дана триангуляция $T = \{\tau_k\}$ n-мерного симплекса, и каждой вершине v_q триангуляции T поставлена в соответствие одна из вершин a_i симплекса Δ^n с условием, что если v_q лежит на какой-либо грани симплекса Δ^n, то ей поставлена в соответствие одна из вершин этой грани.**

Тогда найдется n-симплекс $\tau_{k_0}^n$ триангуляции, вершины которого поставлены в соответствие попарно различным вершинам Δ^n.

□ Назовем n-симплекс $\tau \in T$ *нормальным*, если его вершины поставлены в соответствие взаимно однозначно вершинам Δ^n. Мы покажем индукцией по n, что число таких симплексов нечетно и, значит, отлично от нуля, что докажет лемму.

При $n = 0$ утверждение тривиально, допустим, оно доказано для $n-1$. Фиксируем $(n-1)$-грань смплекса Δ^n, скажем, Δ_0^{n-1}, противолежащую a_0, и назовем $(n-1)$-грань симплекса $\tau_k^n \in T$ *отмеченной*, если ее вершины поставлены в соответствие взаимно однозначно вершинам Δ_0^{n-1}. У n-симплекса τ_k^n может быть 0, 1 или 2 отмеченных грани, причем у нормальных и только у них это число равно 1 (если симплекс не нормален, но имеет отмеченную грань, то его двум вершинам поставлена в соответствие одна и та же вершина грани Δ_0^{n-1}, и число его отмеченных граней на самом деле равно 2).

Пусть m – сумма чисел отмеченных граней для всех n-симплексов триангуляции. Из предыдущего вытекает, что надо доказать, что m нечетно. Рассмотрим какой-либо $(n-1)$-симплекс τ_r^{n-1} триангуляции. Если он лежит внутри Δ^n, то к нему примыкает два n-симплекса, он считается два раза и его можно не учитывать. Если он лежит на границе, то нужно рассмотреть только случай, когда симплекс лежит на грани Δ_0^{n-1}, при этом только те симплексы, вершины которых поставлены во взаимно однозначное соответствие с вершинами Δ_0^{n-1} (иначе симплекс не отмеченный). Он служит отмеченной гранью ровно одного n-симплекса, и в результате четность числа отмеченных граней равна четности числа тех граней, которые лежат на Δ_0^{n-1} и вершины которых поставлены во взаимно однозначное соответствие вершинам Δ_0^{n-1}.

Но это число нечетно по индуктивному предположению. ■

Неретрагируемость симплекса на его край. Мы заменили в формулировкке шар на симплекс, так удобнее применять лемму Шпернера.

Теорема. **Не существует ретракции Δ^n на его край Σ^{n-1}.**

□ Пусть φ ретракция Δ^n на его край Σ^{n-1}.

Грани Δ_i^{n-1} образуют триангуляцию Σ^{n-1}. Открытая звезда вершины a_i есть открытое множество $O_i = \Sigma^{n-1} \setminus \Delta_i^{n-1}$. Эти множества образуют открытое покрытие края с пустым пересечением $\bigcap_i O_i = \emptyset$. В силу равномерной непрерывности φ имеется такое $\delta > 0$, что при ретракции φ образ каждого множества диаметра меньше δ лежит в одном из множеств O_i (лемма Лебега, см. **??**).

Будем последовательно строить барицентрические подразделения триангуляций симплекса (начав с самого Δ^n). Через конечное число шагов (согласно свойству этой операции, см. выше), получится триангуляция, диаметры звезд симплексов которой меньше δ. Каждой вершине такой триангуляции поставим в соответствие вершину a_i, в звезде которой лежит образ звезды этой вершины.

То, что точки Σ^{n-1} при ретракции переходят в себя, влечет выполнение условия леммы Шпернера. Имеется симплекс триангуляции, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены всем вершинам a_i. Но это невозможно, т.к. тогда образ самого симплекса (который есть пересечение звезд своих вершин) содержался бы в каждой из звезд O_i и лежал бы в их пересечении, которое пусто. ■

-=-=-=-

Следствия: теоремы о неподвижной точке и о нестягиваемости $\mathbb{S}^{n-1}$.

Теорема о неподвижной точке. Всякое отображение шара в себя имеет точку, совпадающую со своим образом

Эта знаменитая теорема Брауэра является простым следствием теоремы о неретрагируемости шара на край:

□ Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ непрерывно и не имеет неподвижных точек, т.е. для всех $x \in \mathbb{B}^n$ $f(x) \neq x$. Рассмотрим для каждой точки $x \in \mathbb{B}^n$ луч, идущий из точки $f(x)$ через x до пересечения с краем шара в точке $\varphi(x)$. Из-за отсутствия неподвижных точек, во-первых, такой луч существует, причем точка $\varphi(x)$ непрерывно зависит от x, и $\varphi(x) = x$, если X – точка края. Мы получили ретракцию шара на край. ■

Теорема о неподвижной точке эквивалентна теореме о неретрагируемости шара на край: если бы имелась такая ретракция, то взяв ее композицию с центральной симметрией сферы, мы получили бы отображение шара без неподвижных точек.

Еще одно важное следствие теоремы о неретрагируемости шара (также эквивалентное ей и, собственно, являющееся ее простой переформулировкой) –

нестягиваемость сферы $\mathbb{S}^n$: $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq \mathbf{0}|_{\mathbb{S}^n}$.

(Напомню, что шар есть конус над своей граничной сферой, см. выше.)

В результате мы получили *эквивалентность трех утверждений:*

– **существование неподвижной точки для отображения шара в себя,**

– **нестягиваемость граничной сферы,**

– **неретрагируемость шара на край**

(и доказали последнее).

- Не только тождественный, но любой гомеоморфизм сферы не гомотопен нулю: гомеоморфизм h имеет обратный $q = h^{-1}$, $qh = \mathbf{1}$ и если $\mathbf{1}$ существен, то оба отображения h и q не гомотопны нулю.

Топологическая инвариантность линейной размерности $\mathbb{R}^n$

То, что прямая $\mathbb{R}$ не гомеоморфна плоскости или вообще пространству $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ доказывается просто: любая окрестность каждой точки разбивается этой точкой, т.е. дополнение к точке несвязно. А шаровая окрестность точки в бо́льших размерностях остается связной после выкидывания этой точки, что очевидно. Но не очевидно, как обобщить это доказательство на высшие размерности.

Это можно сделать, если иначе представить доказательство. Именно, если в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ взять по точке с каждой ее стороны, скажем, a слева, b справа, то эту *пару точек* нельзя прогомотопировать в дополнении к x_0 в одну точку, скажем, в c (одну из них нельзя соединить с c путем, минуя x_0). Но *на пару точек можно смотреть как на сферу размерности нуль*! И мы получаем такую формулировку, обобщающую приведенное доказательство:

Теорема. **Для каждой окрестности U точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует отображение $f : \mathbb{S}^{n-1} \to U \setminus x_0$ негомотопное нулю в $\mathbb{R}^n \setminus x_0$. С другой стороны отображение сферы меньшей размерности в $U \setminus x_0$ гомотопно нулю в $\mathbb{R}^n \setminus x_0$.**

$\square$ Возьмем в качестве точки x_0 начало $\mathbb{O}$. Пусть U данная окрестность начала. В U возьмем шаровую окрестность $\mathbb{B}$ с центром $\mathbb{O}$. В качестве отображения $f : \mathbb{S}^{n-1} \to U \setminus \mathbb{O}$ возьмем тождественное отображение граничной сферы $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$. Допустим, что $f \simeq \mathbf{0}$ и $f_t : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{O}$ – гомотопия, для которой $f_0 = f = \mathbf{1}|_{\mathbb{S}}$, $f_1(\mathbb{S}) = a \neq \mathbb{O}$. Пусть $r : \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{O} \to \mathbb{S}$ ретракция, переводящая каждый луч из начала в точку его пересечения с $\mathbb{S}$. Тогда композиция rf_t есть стягивание сферы в точку по себе, что невозможно.

Если $g : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{O}$ отображение сферы размерности $k < n-1$, то g гомотопно с помощью радиальной гомотопии $r_t(g(x)) = (1-t)g(x) + t\frac{g(x)}{|g(x)|}$ отображению $r_1 g : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^{n-1}$, гомотопному нулю, согласно доказанному в конце главы 8 (46). $\blacksquare$

Это доказательство сохраняет силу и для следующего утверждения:

- **Шары (или кубы), сферы разных размерностей не гомеоморфны**.

Вообще, если окрестности точек пространств X и Y гомеоморфны открытым шарам разных размерностей, то эти пространства не гомеоморфны.

- Для большей строгости сформулируем два свойства, которые вместе топологически инвариантны, т.е. гомеоморфные пространства одновременно имеют оба эти свойства или не имеют хотя бы одно из них:

1. Каждая точка x пространства X имеет окрестность $U(x)$ и отображение сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $U \setminus x$ не гомотопное нулю.

2. Для каждой окрестности $U(x)$ каждой точки $x \in X$ имеется окрестность $V(x) \subset U$ так, что любое отображение $\mathbb{S}^k$ при $k < n-1$ в $V \setminus x$ гомотопно нулю в $U \setminus x$.

Пространства, все точки которых имеют окрестности гомеоморфные открытым шарам размерности n, называются *многообразиями размерности* n. Таким образом, многообразия разных размерностей не гомеоморфны. Связные многообразия размерности 1 это интервалы прямой и окружности. Многообразия размерности два называются поверхностями. Мы ими займемся в последнем разделе.

-=-=-=-=-=-

Дополнение к главе 9. Лемма Шпернера и теорема Хелли

В этом дополнении мы приведем основанное на лемме Шпернера доказательство, данное М.А. Красносельским, известной теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств.

Из леммы Шпернера следует теорема, имеющая несколько переформулировок. Одну из них называют теоремой Кнастера – Куратовского – Мазуркевича или, для краткости, ККМ. Она была доказана сразу после появления статьи Шпернера и использована авторами для вывода из нее теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Красносельский использовал эту теорему в некоторой переформулировке (называемой им теоремой Лебега) для вывода теоремы Хелли.

Мы начнем с теоремы ККМ, выведем из нее, следуя Б.А. Пасынкову, теорему о неретрагируемости симплекса на край, докажем эквивалентность этих теорем и в заключение приведем доказательство Красносельского теоремы Хелли.

Лемма 1 (Теорема ККМ). *Пусть дано покрытие* $\bigcup_i A_i = \Delta^n$, $0 \leq i \leq n$, *n-симплекса замкнутыми множествами. Каждому множеству A_i сопоставлена вершина a_i симплекса.*

Пусть каждая грань Δ^k_α симплекса с набором вершин $\alpha = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ лежит в пересечении соответствующих ее вершинам множеств A_i: $\Delta^k_\alpha \subset \bigcup\limits_{i_j \in \alpha} A_{i_j}$.

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

□ Рассмотрим произвольную триангуляцию T симплекса Δ^n. Для каждой веширны $v \in T$ возьмем открытую грань Δ_v, на которой она лежит, и сопоставим вершине v одно из множеств $A_{i(v)}$, содержащих эту грань.

Тем самым вершине $v \in T$ будет сопоставлена вершина $a_{i(v)}$, причем соблюдено условие леммы Шпернера. Тогда, по лемме, имеется n-симплекс $\delta^n \in T$, вершины которого оказываются во взаимно однозначном соответствии с вершинами Δ^n, то есть принадлежат попарно различным множествам A_i.

Измельчая триангуляцию, мы получим последовательность таких симплексов, диаметры которых стремятся к нулю. Предельная точка этой последовательности будет одновременно предельной точкой для каждого из множеств A_i. В силу замкнутости этих множеств, она принадлежит им всем, т.е. их пересечение не пусто. ■

Сохраним введенные обозначения в следующей лемме.

Лемма 2 (Лебега, согласно Красносельскому). *Пусть дано замкнутое покрытие $\bigcup_i A_i = \Delta^n$, $0 \leq i \leq n$, и $A_i \cap \Delta_i = \emptyset$.*

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

□ Проверим, что из условия этой леммы вытекает условие предыдущей леммы.

Пусть дана грань Δ^k_α, $\alpha = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, и скрещивающаяся с ней грань $\widetilde{\Delta}^{n-k-1}_\beta$, где β дополняет α в множестве вершин Δ^n.

Множество A_{i_j}, отвечающее вершине $a_{i_j} \in \beta$, не пересекает грани Δ^k_α, т.к. $\Delta^k_\alpha \subset \Delta^{n-1}_{i_j}$. Значит, $\Delta^k_\alpha \subset \bigcup_s A_s$, где $s \in \alpha$. Условие леммы 1 выполнено. ■

Замечание. В лемме 2 вместо замкнутых множеств можно взять открытые (которые могут быть «ужаты» до замкнутых с сохранением условия).

Следующая лемма выведена из леммы 1 Пасынковым и использована в работе, которая цитировалась выше (стр. 47), для доказательства неретрагируемости симплекса на его край.

Лемма 3. *Пусть снова $\bigcup\limits_{0 \leq i \leq n} A_i = \Delta^n$ – замкнутое покрытие, и пусть $A_i \supset \Delta^{n-1}_i$ для каждого i.*

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

□ Покажем, что лемма 3 вытекает из леммы 2. Дополнительное множество $B_i = \Delta^n \setminus A_i$ для каждого i не содержит Δ_i и открыто. Если $\bigcap A_i = \emptyset$, то $\bigcup\limits_{0 \leq i \leq n} B_i = \Delta^n$ – открытое покрытие, и по лемме 2 тогда $\bigcap B_i \neq \emptyset$ (см. Замечание к лемме). Но это значит, что A_i не образуют покрытия. ■

Аналогично из леммы 3 следует лемма 2. Кроме того, из условия лемы 1, очевидно, вытекает условие леммы 3. Таким образом все три леммы эквивалентны. Выведем далее теорему о неретрагируемости симплекса на край, следуя Пасынкову, из леммы 3 и покажем, что лемма Шпернера есть следствие теоремы о неретрагируемости. Таким образом, все эти утверждения эквивалентны.

Теорема о неретрагируемости. *Не существует ретракции* Δ^n *на* $\Sigma^{n-1} = \partial\Delta^n = \bigcup_i \Delta_i^{n-1}$.

$\square$ Допустим, что имеется ретракция $r : \Delta^n \searrow \Sigma^{n-1}$. Рассмотрим множества $A_i = r^{-1}(\Delta_i^{n-1})$. Для них выполнено условие леммы 3, поскольку r ретракция. В таком случае имеется точка x, принадлежащая A_i для каждого i. Но образ этой точки принадлежит каждой грани Δ_i^{n-1}, что невозможно, т.к. их пересечение пусто.

Наконец, покажем, что лемма Шпернера есть следствие теоремы о неретрагируемости.

Лемма Шпернера. Пусть T триангуляция Δ^n и каждой вершине $v \in T$ поставлена в соответствие вершина Δ^n так, что вершине, лежащей на грани Δ_i^{n-1} отвечает одна из вершин этой грани. Тогда для некоторого n-симплекса триангуляции T вершины поставлены в соответствие попарно различным вершинам симплекса.

$\square$ Допустим, что не найдется симплекса из T, вершины которого окажутся поставленными в соответсвие попарно различным вершинам Δ^n. Тогда все вершины каждого симплекса δ_j^k лежат в одной (открытой) i-грани, где $i \leq n$. Отображение вершин однозначно продолжается до линейного отображения симплекса в эту грань (см. 46), причем отображения согласованы на общих гранях симплексов, так что возникает непрерывное (симплициальное) отображение симплекса Δ^n на его край. Ограничение этого отображения на край, очевидно, гомотопно с помощью линейной гомотопии тождественному гомеоморфизму. Эта гомотопия по лемме Борсука (в данном случае тривиально) продолжается на симплекс. В результате получаем ретракцию симплекса на край. ■

Итак, лемма Шпернера, леммы типа теоремы ККМ, теорема о неретрагируемости симплекса и вместе с ней теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема о нестягиваемости сферы – все эквивалентны друг другу.

Перейдем к теореме Хелли. Мы выведем ее, следуя Красносельскому, из леммы 2.

Сначала очевидное утверждение:

Лемма 4. *Аффинный образ m-мерного симплекса в пространстве размерности меньше m совпадает с образом границы симплекса.*

$\square$ Рассмотрим данное отображение симплекса как ограничение линейного отображения его несущей плоскости в пространство меньшей размерности. Прообраз каждой точки есть плоскость положительной размерности, и ее пересечение с симплексом, если не пусто, то пересекает границу симплекса. ■

Теорема Хелли. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ даны выпуклые множества V_i, $0 \leq i \leq m$, для которых каждый набор V_{i_j} из $n+1$ множеств имеет непустое пересечение:* $\bigcap\limits_{0 \leq j \leq n} V_{i_j} \neq \emptyset$.

Тогда пересечение всех множеств V_i не пусто.

$\square$ Пусть сначала число всех множеств $m = n+2$. Возьмем по точке в каждом пересечении по $n+1$ множеств V_i, пусть $b_i \in \bigcap_j V_{i_j}$, где $i_j \neq i$.

Обозначим через Ω выпуклую облочку этих точек. Ω – выпуклый многогранник и является образом линейного отображения q симплекса Δ^{n+1}, причем $b_i = q(a_i)$, где

a_i, $0 \le i \le n+1$, – вершины Δ^{n+1}. Согласно лемме 4, $\Omega = \bigcup_i q(\Delta^n_i)$, где Δ^n_i – грань противолежащая вершине a_i. Пусть $S_i = q(\Delta^n_i)$, $\Omega = \bigcup_i S_i$.

Множество V_i содержит, по условию, все точки b_{i_j}, $i_j \ne i$ (b_{i_j} берется в пересечении всех множеств, кроме V_{i_j}, и если $i_j \ne i$, то в этом пересечении должно участвовать V_i). Значит, V_i содержит S_i – выпуклую оболочку этих точек.

$\Delta^n_i \subset q^{-1}(S_i)$, и эти прообразы образуют покрытие Δ^{n+1} (т.к. $q(\Delta^{n+1}) = \Omega = \bigcup_i q(\Delta^n_i) = \bigcup_i S_i$), т.е. выполнены условия леммы 2. По этой лемме пересечение множеств $q^{-1}(S_i)$ не пусто, но тогда не пусто и $\bigcap_i S_i$, а значит и $\bigcap_i V_i$.

В случае, когда число множеств $m \ge n+2$, мы сначала получаем по доказанному, что наборы из $n+2$ множеств данной системы имеют непустые пересечения. Затем, повторяя приведенное доказательство со сдвигом размерности, получим, что непусты пересечения по $n+3$ множеств, и т.д. ■

-=-=-=-=-=-

10. ОТОБРАЖЕНИЕ БОРСУКА

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА – БРАУЭРА. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОБЛАСТИ

-=-=-=-

Свойство компакта разбивать $\mathbb{R}^n$.

Мы не доказали еще две знаменитые теоремы Брауэра – *обобщение теоремы Жордана* (сфера размерности $n-1$ разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ при любом вложении в него, и дополнение имеет две компоненты, общей границей которых служит образ вложения) и *теорему об инвариантности области* (гомеоморфный образ открытого множества в $\mathbb{R}^n$ открыт). Мы докажем здесь, опираясь на теорему Борсука о гомотопиях отображений в сферу компактов, лежащих в $\mathbb{R}^n$, половину теоремы Жордана – Брауэра: то, что гомеоморфный образ сферы разбивает пространство и является полной границей своих компонент. Мы наметим доказательство обратного утверждения, которое, однако, требует понятия степени, к которому мы обратимся в следующей главе. Там мы докажем полное обобщение теоремы Жордана – Брауэра – инвариантность числа компонент дополнения для вложений данного компакта в $\mathbb{R}^n$.

Разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ компактным подмножеством X.

X замкнуто, значит, дополнение $\mathcal{C}X$ открыто и распадается на открытые линейно связные компоненты. X *разбивает* $\mathbb{R}^n$, если имеется более одной компоненты дополнения. X не *разбивает* $\mathbb{R}^n$, если дополнение связно.

Во всех случаях имеется ровно одна неограниченная компонента (т.к. X ограниченно).

- граница каждой компоненты лежит в X;

- если ни одно замкнутое подмножество X, отличное от X, не разбивает $\mathbb{R}^n$, то X служит полной границей каждой компоненты дополнения.

☐ Если граница некоторой компоненты U меньше X, то она разбивает $\mathbb{R}^n$ на U и дополнение к замыканию U. ■

Этим свойством, как увидим в следующем пункте, обладает $(n-1)$-сфера.

Если никакое *замкнутое* собственное подмножество X не разбивает $\mathbb{R}^n$, то и *любое* собственное подмножество X не разбивает $\mathbb{R}^n$.

☐ Если $A \subset X$ разбивает $\mathbb{R}^n$, то A всюду плотно в X, т.к. граница каждой компоненты B_α дополнения к A – замкнутое подмножество X, и она разбивала бы пространство на внутренность B_α и дополнение к замыканию B_α. Предельная точка к A, не принадлежащая к A, является в таком случае предельной для каждой компоненты дополнения и, значит, принадлежит им всем, т.е. A не разбивает пространство. ■

$\sim$ Замыкание открытого ограниченного подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ компактно и называется *компактной областью*.

- X разбивает пространство, если и только если его дополнение имеет компактную компоненту.

(Компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ имеет ровно одну некомпактную компоненту дополнения (неограниченную). Остальные компоненты, если имеются, компактны.)

Усиление теоремы неретрагируемости.

- Не существует отображения $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, тождественного на границе шара, при котором образ шара не содержит некоторой точки $x_0 \in \operatorname{Int} \mathbb{B}^n$.

□ Композиция rg, где $r : \mathbb{R}^n \setminus x_0 \to \partial \mathbb{S}^n$ – радиальное отображение, была бы ретракцией шара на его границу. ■

- Компактная область не может быть ретрагирована на свою границу. Более того, не существует ретракции пространства на замыкание дополнения к компактной области.

□ Для шара, содержащего $\bar{U}$, возникает ретракция на границу. ■

- Аналогично: Если замыкание открытого подмножества U сферы $\mathbb{S}^n$ ретрагируется на границу, то это замыкание совпадает со всей сферой (т.е. U всюду плотно).

- Если $X \subset \mathbb{R}^n$ (или $X \subset \mathbb{S}^n$) компактный AR (например, гомеоморфный образ куба любой размерности), то дополнение связно (т.е. AR не разбивает $\mathbb{R}^n$ (соотв. $\mathbb{S}^n$)).

□ Имеется ретракция пространства на X, и если была бы компактная компонента, то возникла бы ретракция пространства на замыкание дополнения к компактной области. ■

- *Топологический образ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{S}^n$) является полной границей каждой компоненты дополнения.*

□ Если граница A компоненты B не совпадает с образом сферы, она разбивает пространство и лежит в топологическом образе шара. Тогда и этот образ шара разбивает пространство. Но шар есть AR. ■

(Это утверждение обычно считают частью полной теоремы Жордана.)

-=-=-=-

Отображение Борсука.

$\sim$ Пусть $p \in \mathbb{R}^n$, отображение $\varphi_p : \mathbb{R}^n \setminus p \to \mathbb{S}^{n-1}$, определяется формулой: $x \mapsto \frac{x-p}{|x-p|}$.

Мы докажем теперь один общий факт, в котором устанавливается, что свойство компакта в $\mathbb{R}^n$ разбивать пространство эквивалентно свойству его нестягиваемости, т.е. свойству, не связанному с вложением в $\mathbb{R}^n$ и топологически инвариантному – если пространство не стягиваемо, то и любое гомеоморфное ему не стягиваемо. Тем самым будет инвариантным и свойство разбивать при любом вложении $\mathbb{R}^n$. В частности топологический образ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ разбивает это пространство, так как стандартно расположенная сфера разбивает пространство на точки с радиусом меньше 1 и точки с радиусом больше 1.

Доказательство основано на рассмотрении введенного отображения Борсука – радиальной проекции $\mathbb{R}^n \setminus p$ на сферу с центром в p. Нам понадобится следующая

Лемма о продолжении отображения полиэдра в $\mathbb{S}^n$ на больший полиэдр. *Пусть полиэдр P представлен объединением двух полиэдров: $P = P_1 \cup P_2$. Пусть дано отображение $f : P_1 \to \mathbb{S}^n$ и пусть размерность P_2 меньше $n+1$. Существует продолжение $F : P \to \mathbb{S}^n$ отображения f.*

□ Во-первых, продолжим отображение f на окрестность U подполиэдра P_1 в P, пользуясь тем, что сфера есть ANR.

Рассмотрим для некоторой триангуляции K полиэдра P вершины, не попавшие в U, и поставим в соответствие каждой из них произвольную точку сферы. Этим отображение F определено на 0-мерном остове K.

Рассуждая по индукции, допустим, что F уже определено на всех $(i-1)$-симплексах полиэдра P_1, $i \leq n$, и при этом кусочно линейно. Пусть σ i-симплекс K, на котором отображение еще не определено. Оно определено на границе этого симплекса. Если $i-1 < n$, то это отображение гомотопно постоянному, так как есть точки сферы, не покрытые образом, и тогда оно может быть продолжено на σ. ■

-=-=-=-

Теорема Борсука. *Пусть X компактное подмножество $\mathbb{R}^n$.*

X разбивает $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ Имеется существенное ($\not\simeq 0$) отображение X в $\mathbb{S}^{n-1}$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть точка $p \in \mathbb{R}^n$ принадлежит компактной компоненте V дополнения к X. Поместим начало в точку p, можно считать, что X лежит внутри шара $\mathbb{B}$ радиуса 1.

Пусть $\varphi_p|_X : X \to \mathbb{S}^{n-1}$ гомотопно постоянному отображению $\varphi(X) = a_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, тогда по лемме о стакане $\varphi_p|_X$ можно продолжить до отображения $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.

(Применим эту лемму к обратной гомотопии от $\varphi(X)$ к $\varphi_p|_X$: при $t = 0$ все $\mathbb{R}^n$ отображается в a_0, при $t = 1$ возникает продолжение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ отображения φ_p).

В частности, имеется продолжение этого отображения на компактную компоненту V, содержащую p. Отображение φ_p продолжает это продолжение вне X, т.е. возникает отображение $r : \mathbb{B} \to \mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$, $r = \Phi$ на V и $r = \varphi_p$ вне V, отображения Φ и φ_p совпадают на $\mathrm{Fr}\, V$. При этом $\varphi_p|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbf{1}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$; получается ретракция шара радиуса 1 на его границу, что невозможно.

Итак, если X разбивает пространство, то отображение $\varphi_p|_X$ существенно.

$\Leftarrow$ Допустим, X не разбивает $\mathbb{R}^n$. Тогда имеется только одна компонента дополнения, неограниченная. Пусть дано отображение $f : X \to \mathbb{S}^{n-1}$.

Построим продолжение f до отображения куба Q, $F : Q \to \mathbb{S}^{n-1}$, где $X \subset \mathrm{Int} Q$, $Q \setminus X$ связно.

1. Имеется продолжение $f_1 : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ до отображения f_1 на некоторую окрестность $U \subset Q$, так как $\mathbb{S}^{n-1}$ есть ANR.

2. Имеется ретракция $r : Q \searrow P_1 \bigcup P_2$, где P_1 и P_2 полиэдры, причем $X \subset P_1 \subset U$, а размерность P_2 не больше $n-1$. Берем мелкое решетчатое подразделение Q на n-кубики (как в тетради в клеточку), достаточно мелкое, чтобы кубики, пересекающие X, лежали в U. Так как $Q \setminus X$ связно, для каждого кубика, не пересекающего X, имеется цепочка кубиков, соединяющая его с границей так, что два соседних в цепочке кубика имеют общую грань. Используя эти цепочки, можно, последовательно ретрагируя очередные кубики на свои границы без одной грани, получить ретракцию Q на объединение n-кубиков, пересекающих X (полиэдр P_1) вместе с объединением некоторого числа $n-1$-граней, оставшихся после сжатия n-кубиков (полиэдр P_2).

3. Согласно предыдущей лемме имеющееся отображение $f_1 : P_1 \to \mathbb{S}^{n-1}$ продолжимо до отображения $f_2 : P_1 \bigcup P_2 \to \mathbb{S}^{n-1}$.

Композиция $f_2 r$ есть отображение куба Q в сферу $\mathbb{S}^{n-1}$, продолжающее отображение $f : X \to \mathbb{S}^{n-1}$. Но отображение куба в любое пространство гомотопно нулю, а вместе с тем гомотопно нулю ограничение этого отображения на любое подмножество Q, в том числе на X.

Итак, если $X \subset \mathbb{R}^n$ не разбивает $\mathbb{R}^n$, то все отображения X в $\mathbb{S}^{n-1}$ несущественны. ■

Следствие теоремы Борсука:

Теорема Жордана - Брауэра в одну сторону.

Теорема. ***Топологический образ $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ разбивает пространство $\mathbb{R}^n$.***

Доказательство: Тождественное отображение сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в себя существенно.

(Это доказывает теорему Жордана - Брауэра в одну сторону: сферический образ разбивает пространство. Остается вопрос: на сколько компонент?)

- **Теорема.** Число компонент дополнения к гомеоморфному образу C сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ конечно.

□ Рассмотрим компактную окрестность $N(C)$ в $\mathbb{R}^n$, которая ретрагируется на C. Такая окрестность существует, т.к. сфера – ANR.

Только конечное число компонент дополнения к C может пересекать дополнение к N: беря в $\mathbb{R}^n \setminus N$ по точке в каждой компоненте дополнения к C, мы получим множество, предельная точка которого лежит в $\mathbb{R}^n \setminus N$ и не может принадлежать C, значит, должна лежать в одной из компонент дополнения, которые, однако, открыты.

Но ни одна компонента дополнения не может лежать целиком в N, т.к. ретракция N на C дала бы ретракцию $\mathbb{R}^n$ на ее дополнение (см.выше). ■

Число компонент равно двум, но доказательство требует дополнительной техники и дано в главе 12.

-=-=-=-

Уточнение теоремы Борсука о радиальной проекции:

Теорема 1. Отображение φ_p на $X \subset \mathbb{S}^n$ существенно, если и только если p принадлежит компактной компоненте дополнения к X.

□ В одну сторону доказательство дано в доказательстве теоремы Борсука. Пусть p принадлежит неограниченной компоненте дополнения. Пусть $\gamma(t)$ путь, не пересекающий множества X и соединяющий точку p с удаленной точкой q. Отображения $\varphi_p|_X$ и $\varphi_q|_X$ гомотопны посредством $H(x,t) = \varphi_{\gamma(t)}|_X(x)$. Но $\varphi_q(X)$ при достаточно удаленной точке q (отделенной от X $(n-1)$-плоскостью) занимает меньше половины поверхности сферы и поэтому гомотопен постоянному отображению. ■

Теорема 2. Точки p и q принадлежат одной компоненте $\mathbb{S}^n \setminus X$ тогда и только тогда, когда отображения $\varphi_p|_X$ и $\varphi_q|_X$ гомотопны.

□ $\Rightarrow$ Пусть $\gamma(t)$ путь, соединяющий точки p и q и не пересекающий множества X. Гомотопия $H(x,t) = \varphi_{\gamma(t)}|_X(x)$ дает требуемое.

$\Leftarrow$ Пусть p и q лежат в разных компонентах; одна, скажем, p, принадлежит компактной компоненте U. Отображение φ_q определено, в частности, на замыкании U. По лемме о стакане, если $\varphi_q|_X$ и $\varphi_p|_X$ гомотопны, то и $\varphi_p|_X$ продолжается на $\overline{U}$. Принимая p за начало и считая, что X лежит в шаре радиуса 1, мы получим, как выше, ретракцию единичного шара на граничную сферу, что невозможно. ■

Попутно мы получили эквивалентность трех утверждений:

Предложение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ компактное подмножество, p – точка в $\mathcal{C}X = \mathbb{R}^n \setminus X$ и U_p – компонента $\mathcal{C}X$, содержащая p. Следующие утверждения эквивалентны:

$\varphi_p|_X \simeq 0$,

$\varphi_p|_X$ продолжается на U_p,

U_p – неограниченная компонента.

-=-=-=-=-=-

К теореме Жордана – Брауэра

Мы сделаем здесь попытку сведения оставшейся части теоремы (число компонент не больше двух) к технике теоремы Борсука. Обсуждение отложим до конца изложения этой попытки. Напомним еще раз формулировку:

Теорема Жордана – Брауэра. ***Дополнение к топологическому образу $(n-1)$-мерной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет две компоненты и является полной границы каждой из этих компонент.***

Выше уже доказано как следствие теоремы Борсука, что топологический образ $(n-1)$-сферы разбивает $\mathbb{R}^n$. Любое замкнутое подмножество $(n-1)$-сферы, не совпадающее со сферой, лежит в ней в $(n-1)$-шаре и потому, как и шар, не разбивает пространство. Отсюда вытекает, что сфера служит общей границей каждой дополнительной области (см. начало этого раздела, стр. 52).

Осталось доказать:

Теорема. ***Дополнение в $\mathbb{R}^n$ к топологическому образу C сферы S^{n-1} не может иметь более двух компонент связности.***

Доказательство (?). Пусть U_i, $0 \le i \le k < \infty$, – компоненты связности $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$. (Мы знаем, что число компонент дополнения конечно. Впрочем, это не будет использоваться). Пусть U_1 – неограниченная компонента. Возьмем в каждом U_i, $i \ne 1$, по малому шару B_i, и пусть B_1 – замыкание дополнения к большому шару, содержащему внутри себя C и все $U_i, i \ne 1$. Пусть $S_i = \partial B_i$.

1. Так как сфера является ANR, в $\mathbb{R}^n$ имеется замкнутая окрестность $N(C)$ (т.е. замыкание окрестности C), для которой существует ретракция $r : N \searrow C$, ее можно считать сколь угодно малым сдвигом, так что для заданного $\varepsilon > 0$ имеется линейная ε-деформация $r_t : N \to \mathbb{R}^n$, $r_0 = \mathbf{1}$, $r_1 = r$, и $r_t(x) = x$, если $x \in C$ при всех t. Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $r_t(N)$ не пересекает никакого B_i ни для какого t. Пусть $K = \mathrm{Fr}N$.

2. Имеется стандартная (радиальная) ретракция $p_0 : (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int}B_0) \searrow S_0$.

$N = \bigcup N_i$, $0 \le i \le k$, где $N_i = \overline{N \cap U_i}$ $(C = \bigcap_i N_i))$ и $K = \bigcup K_i$, где $K_i = K \cap U_i$. При этом K_i служит общей границей между N_i и $U_i \setminus N_i$ в U_i.

3. Отображение $p_0|K_1 : K_1 \to S_0$ не гомотопно нулю, т.к. точка p_0 лежит в компактной компоненте дополнения к K_1.

4. Отображения $p_0|K_i : K_i \to S_0$, $i > 1$, гомотопны нулю, так как каждое K_i, $i > 1$, ограничивает компактную область, лежащую вне B_0.

5. Но для каждого $i > 0$ мы имеем гомотопию $p_0 r_t|K_i : K_i \to S_0$, в силу которой $p_0|_{K_i} = p_0 r_0|_{K_i} \simeq p_0|_C\, r_1|_{K_i}$, $i > 0$ $(r_1|_{K_i} : K_i \to C,\ p_0|_C : C \to S_0)$.

5*a*. Так как $p_0|_{K_1}$ не гомотопно нулю, отображение $p_0|_C\, r_1|_{K_1}$ также не гомотопно нулю, и тогда оба отображения $r_1|_{K_1} : K_1 \to C$ и $p_0|_C : C \to S_0$ не гомотопны нулю.

5*b*. Но так как гомотопно нулю $p_0|_{K_i}$, $i > 1$, и, значит, $p_0 r_1|_{K_i}$, а $p_0|_C$ не нуль, получается, что $r_1|_{K_i} : K_i \to C$, $i > 1$, гомотопно нулю.

Итак, отображение $r_1|_{K_1}$ не гомотопно, а $r_1|K_i$ для $i > 1$ гомотопно нулю.

Но эти отображения определены независимо от p_0 и мы можем поменять ролями K_1 и K_i, $i > 1$, (добавив точку в бесконечности для U_1 и выкинув одну точку из U_i), не меняя отображения r_1. Значит, либо они оба гомотопны нулю, либо оба не гомотопны. Это противоречие... Стоп! Пункт 5*b* строго говоря, неверен. Вообще говоря, из того, что композиция двух отображений гомотопна нулю, не следует, что одно из них гомотопно нулю (примеры привести нетрудно (!)), в отличие от утверждения 5*a*.

В нашем случае утверждение все же верно, но доказательство требует использования дополнительной техники, прежде всего, понятия *степени отображения* – целого числа, сопоставляемого отображению, взятому с точностью до гомотопии, и удовлетворяющее правилу: степень композиции равна произведению составляющих. Однако, чтобы применить эту теорию здесь, нужно позаботиться, чтобы границы K_i были полиэдрами (что нетрудно) специального вида – многообразиями (см.стр. **??**), что требует специальной техники.

В двумерном случае нетрудно превратить K_i в гомеоморфные образы окружности, и тогда можно использовать более простую технику, которая изложена здесь в третьей части. Но в главе 12 мы дадим изложение теории степени в ограниченном объеме (для отображений областей $\mathbb{R}^n$) достаточном для завершения доказательства теоремы Жордана – Брауэра, что и будет там сделано.

-=-=-=-

Теорема об инвариантности области

Это еще одна знаменитая теорема Брауэра.

Теорема. Пусть U – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $h : U \to X$ гомеоморфное отображение U на подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда X открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

☐ Пусть a произвольная точка в U и $\mathbb{B}^n_a \subset U$ шар с центром в a, $= \partial\mathbb{B}^n_a$, и C обозначает образ сферы: $h\mathbb{S}^{n-1}_a = C$.

Пусть W – компонента дополнения к C, содержащая точку $p = h(a)$, тогда W содержит целиком образ $V = \operatorname{Int} \mathbb{B}^n_a$, т.к. V связно. Если $h(V)$ совпадает с W, $h(a)$ – внутренняя точка $h(U)$. Если нет, то имеется ретракция $r : \overline{W} \setminus p \to C = \operatorname{Fr} W$. Тогда $h^{-1}|_C rh|_{\mathbb{B}^n_a} : \mathbb{B}^n_a \to \mathbb{S}^{n-1}_a$ есть ретракция диска на его край, что невозможно.

Это противоречие доказывает теорему. ■

Из этой теоремы снова вытекает негомеоморфность евклидовых пространств разных размерностей.

В следующем разделе будет дано еще одно доказательство негомеоморфности евклидовых пространств разных размерностей, но основной задачей будет – ввести понятие размерности пространства (и показать, что евклидовы пространства, имеющие разную линейную размерность, имеют также разную топологическую размерность).

-=-=-=-

11. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАЗМЕРНОСТИ dim X ПО П.С. АЛЕКСАНДРОВУ

НЕРВ ПОКРЫТИЯ И ε-СДВИГИ В ПОЛИЭДР.

-=-=-=-

Нерв покрытия и ε-сдвиг компакта в полиэдр.

∼ Две категории симплициальных комплексов.

Геометрический комплекс можно описать абстрактно как множество (вершин), в котором выделены конечные подмножества (*симплексы*) с единственным условием, что подмножества выделенных подмножеств также выделены (что отвечает условию замкнутости симплексов). Множества с так выделенной системой подмножеств называются *абстрактными комплексами.* Абстрактный комплекс, отвечающий геометрическому, называется его *схемой.*

Наоборот, если дан абстрактный комплекс, то можно разными способами построить геометрические комплексы, для которых он служит схемой. Они называются *реализациями* абстрактного комплекса. Геометрические комплексы, имеющие одинаковую схему, называются *изоморфными* (это значит, что имеется взаимно однозначное соответствие междуих вершинами, при котором симплексы отвечают симплексам).

Реализацию произвольного абстрактного комплекса проще всего построить так. Нужно взять в пространстве большой размерности столько точек *в общем положении*, сколько вершин в схеме, и для каждого выделенного подмножества (абстрактного симплекса схемы) построить геометрический симплекс с соответственными вершинами (т.е. взять их выпуклую оболочку).

Для двух комплексов K_1 и K_2 (все равно, геометрических или абстрактных) *симплициальным отображением* K_1 в K_2 называется такое отображение множества вершин K_1 в множество вершин K_2, при котором симплексам K_1 отвечают симплексы K_2. Ясно, что этим определяются две категории геометрических и абстрактных комплексов с симплициальными отображениями в качестве морфизмов (определение композиции и проверка аксиом очевидны).

$\sim$ Пусть имеется локально конечное покрытие пространства X подмножествами A_α. П.С. Александров сопоставил такому покрытию комплекс, названный им *нервом покрытия*, который служит схемой пересечений элементов покрытия: каждому элементу отвечает вершина комплекса, и каждому непустому пересечению из k элементов отвечает $(k-1)$-симплекс комплекса с вершинами, соответствующими элементам, в которых лежит это пересечение. Например:

$\approx$ Нульмерный компакт имеет сколь угодно мелкое покрытие, нерв которого дискретен (состоит только из конечного числа вершин).

Симплекс есть нерв своего покрытия открытыми звездами вершин.

Построение ε-сдвига компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ в полиэдр $|K|$.

Пусть дано конечное покрытие X его открытыми подмножествами U_i, $1 \le i \le k$. Если диаметры всех U_i меньше $\varepsilon > 0$, мы скажем, что дано ε-покрытие. Реализуем нерв покрытия в виде прямолинейного комплекса K, построенного “рядом” с X.

Именно, возьмем сначала в каждом множестве U_i точку $\mathbf{v}'_i$. Затем, расширив $\mathbb{R}^n$ до пространства $\mathbb{R}^N$, где N больше, чем число k элементов покрытия, переведем точки $\mathbf{v}'_i$ малым сдвигом в точки $\mathbf{v}_i$ в общем положении в $\mathbb{R}^N$ (т.е. в вершины $(k-1)$-симплекса).

Теперь воспользуемся разбиением единицы φ_i, подчиненным покрытию U_i (см. стр.32) для построения отображения $f : X \to |K|$. Точке $\mathbf{x} \in X$ отвечает набор неотрицательных чисел $\varphi_i(\mathbf{x})$ с суммой 1. Эти числа можно принять за барицентрические координаты точки $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ в комплексе K. Эта точка будет лежать в точности в том симплексе, который отвечает набору элементов покрытия, содержащих $\mathbf{x}$.

Если U_i образуют ε-покрытие, расстояние между точками $\mathbf{v}'_i$, для которых $x \in U_i$, не больше 2ε; если и сдвиг $\mathbf{v}'_i$ в $\mathbf{v}_i$ не превосходит ε, то диаметры симплексов K не больше 4ε, и тогда очевидно, расстояние между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не превосходит 6ε. Иными словами, при стремлении ε к нулю построенный сдвиг компакта X в полиэдр $|K_\varepsilon|$ также стремится к нулю, и можно сказать, что получаемые полиэдры приближаются к компакту или что компакт аппроксимируется полиэдрами.

-=-=-

Размерность dim. Теорема Александрова

Размерность аппроксимирующего полиэдра $|K|$ на единицу меньше *кратности* покрытия U_i, т.е. максимального числа элементов покрытия, имеющих общую точку.

С этим связано следующее фундаментальное определение. (Напомним: одно покрытие *вписано* в другое, если каждый элемент первого лежит в некотором элементе второго.)

$\sim$ *Размерностью* $\dim X$ пространства X называется минимальное натуральное число n такое, что в любое открытое покрытие $\{U_i\}$ пространства можно вписать покрытие $\{V_j\}$, кратность которого не превосходит $n+1$.

Если такого числа не существует (могут быть покрытия, в которые нельзя вписать покрытие конечной кратности, или для все более мелких покрытий кратность должна расти неограниченно), то пространство считается *бесконечномерным.* Например, *гильбертов кирпич бесконечномерен.*

Заметим, что определение размерности напоминает определение компактности – вместо конечности вписанного покрытия говорится о конечной кратности. Но понятия эти независимы: некомпактные пространства могут быть конечномерными (см. дальше о размерности $\mathbb{R}^n$), а компактные бесконечномерными (например, гильбертов кирпич).

- Если X гомеоморфно Y, то $\dim X = \dim Y$, т.е. $\dim X$ – *топологический инвариант.*

(Кроме "размерности dim" имеется еще несколько определений, которые не эквивалентны друг другу: ind, Ind и др. Выше мы показали, что $\dim = \mathrm{ind}$ для нульмерных компактов. См. книгу В.Гуревича и Г.Волмена "Теория размерности" (1948) или более современный учебник по общей топологии, например, П.С. Александров, Б.А. Пасынков. "Введение в теорию размерности".)

Итак, если $\dim X \le n$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ ε-сдвиг компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ в полиэдр $|K|$ (линейной) размерности n. (Сначала строится покрытие ε-окрестностями точек, затем в него вписывается достаточно мелкое покрытие кратности не более $n+1$, которое, очевидно, в случае компакта окажется конечным, и производится сдвиг в нерв этого покрытия.) Верно и обратное:

Теорема Александрова. **Для компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ размерность $\dim X$ не превосходит n тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ имеется ε-сдвиг X в полиэдр $|K|$, линейная размерность которого не превосходит n.**

Доказательство. Осталось доказать, что существование сколь угодно малых сдвигов в n-мерные полиэдры влечет, что $\dim X \le n$. Пусть K – комплекс, триангулирующий n-мерный полиэдр P, симплексы которого имеют диаметры меньше $\varepsilon/4$, и $f: X \to P$ – $\varepsilon/4$-сдвиг. Кратность покрытия полиэдра звездами вершин комплекса K не больше $n+1$. Рассмотрим покрытие X множествами $U_i = f^{-1}(\mathrm{St}\, v_i)$, где v_i – вершины K. Легко проверяется, что диаметры этих множеств не превосходят ε, а кратность этого покрытия равна кратности покрытия P звездами вершин триангуляции, т.е. не больше $n+1$.

Не обязательно требовать, чтобы компакт X лежал в евклидовом пространстве. Вместо ε-сдвига можно говорить об ε-отображении:

$\dim X \le n \Leftrightarrow$ для всякого $\varepsilon > 0$ $\exists$ отображение X на полиэдр, при котором прообразы точек имеют диаметры меньше ε.

-=-=-

В качестве следствия докажем теперь топологическую инвариантность линейной размерности. Строго говоря, мы сведем ее к теореме о неретрагируемости куба на его границу (глава 9).

Инвариантность размерности $\mathbb{R}^n$

Теорема. $\dim \mathbb{R}^n = n$. (Иначе: линейная размерность совпадает с топологической, и евклидовы пространства разных линейных размерностей не гомеоморфны).

$\square$ Возьмем две концентрические сферы S_1 и S_2 с центром $\mathbb{O}$ радиусов 1 и $1+\varepsilon$. Допустим, что имеется ε-сдвиг f шара B_1, ограниченного первой сферой, в полиэдр размерности $\leq n-1$ (образ лежит внутри второй сферы). Отобразим линейно отрезок $[x_1, x_2]$ каждого радиуса между сферами S_i в отрезок $[f(x_1), x_2]$. Мы получим продолжение f до непрерывного отображения шара B_2, ограниченного второй сферой, в себя, при котором точки S_2 неподвижны, и имеются точки B_1, не лежащие в образе (т.к. полиэдр размерности $n-1$ нигде не плотен в $\mathbb{R}^n$). Пусть x_0 – такая точка. Отобразим каждый полуинтервал $(x_0, y]$, где $y \in S_2$, в точку y. Композиция этого отображения с предыдущим дает отображение шара B_2 на его границу, при котором точки границы неподвижны. Это невозможно по теореме о неретрагируемости шара на границу.

С другой стороны имеются сколь угодно мелкие покрытия $\mathbb{R}^n$ кратности $n+1$ (например, так называемая “кирпичная кладка”, см.рис). $\blacksquare$

Отметим отличие этого доказательства негомеоморфности евклидовых пространств разной (линейной) размерности от того, которое было дано в конце главы 9, стр.49). Там непосредственно доказывалось, что окрестности точек имеют разные гомотопические свойства. Здесть доказывается, что пространства имеют разные значения введенного топологического инварианта $\dim X$.

-=-=-=-=-=-

12. КУСОЧНО ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ.
СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕОРЕМА ЖОРДАНА – БРАУЭРА

-=-=-=-

О выпуклых многогранниках

$\sim$ *Выпуклый многогранник* можно определить двумя двойственными способами.

$\sim$ **I.** Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ это *выпуклая оболочка конечного множества точек.*

$\sim$ **II.** Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ это *пересечение конечного числа замкнутых полупространств* в том случае, когда это пересечение ограничено.

В число полупространств могут входить пары, ограниченные общей $(n-1)$-плоскостью, так что многогранник может лежать в плоскости в $\mathbb{R}^n$ размерности меньше n (k-плоскость есть пересечение $2(n-k)$ полупространств).

Ниже дается еще одно определение.

$\sim$ Выпуклый многогранник имеет *вершины* (они составляют минимальное множество точек, выпуклой оболочкой которых он является). Его *несущей плоскостью* называется минимальная содержащая его плоскость (= аффинная оболочка его точек). Ее размерность называется (линейной) *размерностью* $\dim M$ многогранника M. Заметим, что M компакт.

$\sim$ **III.** Выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^n$ это *образ симплекса при аффинном отображении* в $\mathbb{R}^n$ другого линейного пространства.

- **Определения I и III эквивалентны.**

$\Leftarrow$ Образ симплекса при аффинном отображении есть выпуклая оболочка образов его вершин.

$\Rightarrow$ Пусть M – выпуклая оболочка k точек v_i в $\mathbb{R}^n$. Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^{k-1}$ точки u_i *в общем положении* и во взаимно однозначном соответствии с точками

v_i. Это соответствие автоматически продолжается до аффинного отображения $\mathbb{R}^{k-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Выпуклая оболочка точек u_i (симплекс) отобразится при этом на выпуклую оболочку точек v_i.

Эквивалентность **II** и **III** доказывается сложнее.

- Несущая плоскость симплекса отображается на несущую плоскость многогранника.

- Образ выпуклого многогранника при аффинном отображении есть выпуклый многогранник.

- Выпуклая оболочка конечного числа выпуклых многогранников есть выпуклый многогранник.

- **Пересечение выпуклого многогранника M и плоскости P есть выпуклый многогранник (в смысле I и III).**

Доказательство. Рассмотрим сначала пересечение плоскости и симплекса. Если оно содержит пару различных точек, то они обе лежат на отрезке, соединяющем две точки на границе симплекса. Поэтому это пересечение либо состоит из одной точки, либо есть выпуклая оболочка пересечений плоскости с гранями симплекса. Но грани симплекса есть симплексы меньшей размерности и пересечения с ними по индукции являются выпуклыми многогранниками, т.е. выпуклыми оболочками конечных множеств точек. Тогда и пересечение плоскости с данным симплексом есть выпуклая оболочка конечного множества точек, т.е. выпуклый многогранник.

Пусть даны плоскость P и выпуклый многогранник M, пусть S его несущая плоскость. Рассмотрим аффинное отображение некоторого линейного пространства V на S, при котором M оказывается образом симплекса $T \subset V$. Прообраз пересечения P и S есть плоскость Q в V, пересечение которой с T отображается на пересечение $M \cap P$. Итак, это пересечение есть образ выпуклого многогранника при аффинном отображении, т.е. выпуклый многогранник.

- **Пересечение выпуклого многогранника M с полупространством есть выпуклый многогранник.**

Пусть полупространство P_+ ограничено $(n-1)$-плоскостью P. Достаточно рассмотреть случай, когда по обе стороны от P есть вершины M, не лежащие на P.

Если M – симплекс, то он покрыт отрезками, соединяющими точки грани σ_1, целиком лежащей в полупространстве, с точками грани σ_2, не пересекающей P_+. Значит, $M \cap P_+$ есть выпуклая оболочка σ_1 и $V \cap P$, т.е. двух многогранников.

Произвольный M мы снова рассматриваем как аффинный образ симплекса, причем можно, очевидно, считать, что несущая плоскость M совпадает со всем пространством. В таком случае прообраз плоскости P есть плоскость коразмерности 1 и пересечение $M \cap P_+$ является образом пересечения симплекса с полупространством, т.е. образом выпуклого многогранника.

Удобно назвать *полномерным* многогранник, размерность которого совпадает с размерностью объемлющего пространства. Выпуклый многогранник является полномерным в несущей плоскости.

Очевидно, полномерный многогранник содержит симплекс максимальной размерности и, значит, внутренние точки в топологическом смысле.

Основное значение имеет

Лемма. Если точка A не лежит в выпуклом многограннике M, то A и M лежат по разные стороны от некоторой $(n-1)$-плоскости (разделены плоскостью).

(Т.к. M компактен, имеется ближайшая к A точка $B \in M$. Плоскость, перпендикулярная к отрезку $[AB]$ в его середине не пересекает M и разделяет A и M.)

$\sim$ *Опорной плоскостью* многогранника в $\mathbb{R}^n$ называется $(n-1)$-мерная плоскость, с которой многогранник имеет общие точки и при этом лежит по одну ее сторону.

$\sim$ Пересечения многогранника с его опорными плоскостями называются *гранями* иногогранника, они также являются выпуклыми многогранниками разных размерностей. Для симплексов грани в новом смысле совпадают, очевидно, с гранями, определенными для них выше.

- Вершины каждой грани являются вершинами многогранника.

(Каждая грань является выпуклой оболочкой тех вершин многогранника, которые лежат на соответствующей опорной плоскости.

- **Каждая грань выпуклого k-мерного многогранника M служит гранью его $(k-1)$-грани.**

Можно считать, что многогранник полномерный ($k = n$). Если грань Q имеет размерность меньше $n-1$, то имеется вершина многогранника, которая вместе с Q лежит в грани большей размерности, чем у Q: возьмем какую-нибудь $(n-1)$-плоскость P, содержащую Q вместе с какой-нибудь вершиной v, не лежащей в несущей плоскости Q. Если она опорная, то пересекает M по грани большей размерности, чем размерность Q. Если нет, то с обеих сторон от P имеются вершины M. P пересекает M по многограннику M' размерности $n-1$ и по индукции M' имеет грань Q' размерности $n-2$, содержащую Q. Будем теперь вращать P вокруг несущей плоскости грани Q' в одну сторону. Поскольку вершин конечное число, имеется положение, в котором по одну сторону от нее нет вершин, а к вершинам Q добавится еще хотя бы одна вершина. Мы получим грань M большей размерности и через конечное число шагов получим требуемое.

Аналогичное рассуждение доказывает

- Каждая вершина k-мерного многогранника является вершиной некоторой его $(k-1)$-грани.

С другой стороны, каждая вершина является гранью:

- Для каждой вершины v имеется опорная плоскость, пересекающая многогранник только в v.

(Достаточно рассмотреть полномерный многогранник. Возьмем $n-1$-грань Q, вершиной которой служит v и пусть P – ее опорная плоскость. По индукции в P имеется $(n-2)$-плоскость P', пересекающая Q только по вершине v. Повернем в $\mathbb{R}^n$ плоскость P вокруг P' на достаточно малый угол. Она перейдет в плоскость, пересекающую M только в v.

- Из определения **I** вытекает **II**.

Можно считать, что многогранник полномерный, так как несущая плоскость размерности k является пересечением $n-k$ $(n-1)$-мерных плоскостей и, значит, $2(n-k)$ замкнутых полупространств.

- **Полномерный выпуклый многогранник M есть пересечение полупространств, ограниченных несущими плоскостями его $(n-1)$-мерных граней.**

(Ясно, что сам многогранник M лежит в этом пересечении. Если точка A не лежит в M, то соединим ее с внутренней точкой B отрезком I. Он пересекает границу M в точке C. Несущая плоскость каждой $(n-1)$-грани, примыкающей к грани, содержащей C, отделяет A от M.)

Пересечение двух многогранников в смысле **I** также является пересечением многогранника с полупространствами и, значит (см.выше), выпуклым многогранником.

(Объединение выпуклых многогранников не является, вообще говоря, выпуклым многогранником, но является *полиэдром*).

Теорема. Определения I и II эквивалентны.

I $\Leftarrow$ **II** проведено выше.

II $\Rightarrow$ **I**: Пусть дано конечное множество полупространств P_i^+, ограниченных $(n-1)$-плоскостями P_i, пересечение M которых содержится в n-симплексе T. Это пересечение может быть представлено как пересечение пересечений $T \cap P_i^+$. Но каждое из этих пересечений, как мы видели, есть выпуклый многогранник в смысле первого определения, и, значит, это же верно для M.

- Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^k$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^l$ – выпуклые многогранники. Прямое произведение $M_1 \times M_2$ есть выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{k+l}$.

-=-=-=-

Комплексы многогранников и триангуляции

$\sim$ (Прямолинейный) *полиэдр* в $\mathbb{R}^n$ – это конечное объединение выпуклых многогранников.

Покажем, что это определение эквивалентно прежнему: полиэдр – подмножество, являющееся телом некоторого комплекса.

- **Выпуклый многогранник триангулируем.** Триангуляцию можно построить, не вводя новых вершин. (По индукции)

= Пусть дан полиэдр $P \subset \mathbb{R}^n$ – тело комплекса K. Проведем несущие плоскости всех симплексов K и расширим их до плоскостей размерности $n-1$. Получившиеся $(n-1)$-плоскости разобьют пространство $\mathbb{R}^n$ на выпуклые многогранники (возможно, бесконечные). При этом два многогранника пересекаются только по общей грани. Данный полиэдр окажется разбит на выпуклые конечные многогранники. Можно сказать, что он оказывается телом комплекса выпуклых многогранников:

$\sim$ *Комплексом выпуклых многогранников* называется множество выпуклых многогранников, каждые два из которых пересекаются по общей грани (может быть, пустой). Многогранники комплекса называются также его *клетками*, а объединение клеток размерности не превосходящей k называется *k-остовом* комплекса.

- **Комплекс выпуклых многогранников триангулируем.**

(Т.е. его тело совпадает с телом симплициального комплекса, каждый симплекс которого лежит в некотором из выпуклых многогранников данного комплекса.)

Индукция по остовам. Остов размерности 0 триангулируем. Пусть уже триангулирован остов размерности $k-1$. Возьмем произвольную клетку a размерности k. Ее граница состоит из симплексов, образующих симплициальный комплекс. Возьмем внутри k-клетки произвольную точку v_a. Пирамиды, имеющие вершиной v_a, а основанием симплексы границы a, очевидно, являются симплексами, которые могут пересекаться только по общей грани и в объединении дают a. Эта операция проводится в каждой k-клетке независимо от других и в результате дает триангуляцию k-остова.

На основе этой леммы легко доказать следующие утверждения.

- Объединение и пересечение конечного числа полиэдров есть полиэдр. Замыкание разности двух полиэдров есть полиэдр. (Иными словами, конечные полиэдры в $\mathbb{R}^n$ образуют *алгебру множеств*.)

- Прямое произведение полиэдров есть полиэдр.

Если даны две триангуляции одного полиэдра, то применение описанного выше построения с проведением несущих плоскостей и их расширения до $(n-1)$-плоскостей сразу ко всем симплексам обоих комплексов даст разбиение полиэдра на комплекс многогранников, каждый из которых будет лежать в одном симплексе каждой из данных триангуляций. Подразделяя его до симплициального комплекса, мы получим триангуляцию, которая подразделяет сразу обе данные триангуляции. Таким образом,

- **Две триангуляции полиэдра имеют изоморфные подразделения.**

-=-=-=-

Изоморфизм комплексов и комбинаторная эквивалентность полиэдров

$\sim$ Комплексы K_1 и K_2 называются *изоморфными*, если имеется взаимно однозначное соответствие между множествами вершин K_1 и K_2 так, что если некоторое подмножество множества вершин одного из них служит множеством вершин симплекса, то соответствующие вершины другого также образуют множество вершин его симплекса.

(Иначе: комплексы изоморфны, если имеется взаимно однозначное соответствие между их симплексами, при котором грани симплекса в одном отвечает грань соответствующего симплекса в другом.)

У полиэдра размерности больше нуля имеется бесконечно много триангуляций (даже у отрезка!). Поэтому естественно ввести еще одно, более грубое, отношение эквивалентности между комплексами.

$\sim$ Два комплекса *комбинаторно эквивалентны*, если они имеют изоморфные подразделения.

Две триангуляции того же полиэдра комбинаторно эквивалентны (см.выше).

-=-=-=-

Отображения комплексов и полиэдров

Симплициальные отображения комплексов. Если дано взаимно однозначное соответствие вершин комплексов, порождающее их изоморфизм, то оно также порождает гомеоморфизм между их телами, линейный на симплексах.

Более общим образом:

$\sim$ *Симплициальным отображением* комплекса K_1 в K_2 называется отображение, при котором грань симплекса в K_1 отображается в грань соответствующего симплекса в K_2. (Иначе: отображение, индуцированное отображением вершин, при котором каждое множество вершин симплекса в K_1 отображается в множество вершин симплекса в K_2.)

(Размерности симплексов при симплициальном отображении не возрастают.)

Симплициальное отображение одного комплекса в другой порождает непрерывное отображение тела первого в тело второго, линейное на каждом симплексе.

Кусочно линейные отображения полиэдров.

$\sim$ *Кусочно линейным отображением* полиэдра в полиэдр называется отображение, порожденное симплициальным отображением некоторой триангуляции первого в некоторую триангуляцию второго.

В частности, *кусочно-линейным гомеоморфизмом* называется гомеоморфизм, являющийся кусочно линейным отображением. Такой гомеоморфизм порождается изоморфизмом некоторых триангуляций комплексов.

$\approx$ Выпуклые многогранники одной размерности кусочно-линейно гомеоморфны.

$=$ Между множеством комплексов и множеством полиэдров нет взаимно однозначного соответствия (комплекс однозначно определяет полиэдр – свое тело, однако полиэдр имеет бесконечно много триангуляций). Такое соответствие имеется между множеством классов комбинаторно эквивалентных комплексов и множеством классов кусочно линейно гомеоморфных полиэдров.

-=-=-=-

Ориентация в пространстве $\mathbb{R}^n$

Напомним, что (n-мерным) *аффинным пространством* называется пространство A^n, для которого после выбора какой-либо точки $\mathbb{O} \in A^n$ в качестве начала возникает взаимно однозначное сответствие между точками $x \in A^n$ и векторами (обозначаемыми $\overrightarrow{\mathbb{O}x}$) стандартного пространства $\mathbb{R}^n$. При замене $\mathbb{O}$ на другую точку $\mathbb{O}_1$ соответствие изменяется по правилу $\overrightarrow{\mathbb{O}_1x} = \overrightarrow{\mathbb{O}x} - \overrightarrow{\mathbb{O}\mathbb{O}_1}$. Не будем вдаваться в детали, считая это понятие хорошо известным из курса высшей алгебры. Аффинное пространство, отвечающее стандартному евклидову пространству мы также будем обозначать $\mathbb{R}^n$.

Отображение $L : A^k \to A_1^l$ одного аффинного пространства в другое называется аффинным отображением, если оно становится линейным после выбора какой-либо точки $\mathbb{O}$ в качестве начала в A^k и затем точки $L(\mathbb{O})$ в качестве начальной в A_1^l.

k-Репером в n-мерном аффинном пространстве, называется упорядоченный набор из k линейно независимых векторов с общим началом. Нам в основном будут нужны n-реперы, которые служат базисом n-мерного векторного пространства, полученного взятием начала репера за начало пространства. Мы будем называть их просто реперами. Для любых двух реперов определена квадратная невырожденная матрица, выражающая векторы одного репера в другом репере. Обратная матрица выражает векторы второго репера в первом.

Ориентация аффинного пространства задается выбором репера. При этом два репера R_0 и R_1 *задают ту же ориентацию*, если выполнено любое из двух эквивалентных (как мы сейчас докажем) условий:

I. Один репер можно перевести в другой так, что имеется путь γ, соединяющий начала реперов, и каждая точка $\gamma(t)$ пути служит началом для репера R_t, векторы которого $(\mathbf{v}_i(t))$ непрерывно зависят от t (мы скажем, что дано непрерывное *перемещение* одного репера в другой).

II. Определитель матрицы, выражающей векторы одного репера в другом репере, положителен.

$\square$ **I $\Rightarrow$ II** При непрерывном перемещении репера матрица, связывающая его с начальным репером меняется непрерывно (т.е. непрерывно меняются элементы матрицы), при этом меняется непрерывно и определитель, который, следовательно, остается положительным (т.к. ни для какого t не обращается в нуль).

II $\Rightarrow$ I Пусть определитель матрицы, выражающей векторы репера R_1 в репере R_0 положителен. Построим непрерывное перемещение R_1 в R_0. Оно будет состоять из четырех последовательных перемещений. Первое перемещение γ_1 совмещает начала: начало репера R_1 равномерно движется по отрезку, соединяющему начала, и при этом каждый вектор репера переносится параллельно.

Пусть R_1 переходит в репер R_1'. Далее, используем ортогонализацию Грама – Шмидта. Этот процесс состоит из нескольких операций (проектирований и растяжений - сжатий векторов), каждый из которых может быть осуществлен непрерывным изменением векторов без нарушения условия их независимости. С помощью ортогонализации Грама – Шмидта мы переведем R_1' в ортонормированный репер R_1'' и R_0 в R_0'. Первую ортогонализацию возьмем за второе перемещение γ_2, а в качестве четвертого перемещения возьмем перемещение обратное к ортогонализации R_0 в R_0'.

Нам осталось провести непрерывное перемещение ортонормированного репера R_1'' в ортонормированный репер R_0'.

Мы будем *вращать* репер R_1'', т.е. перемещать его, сохраняя начало и ортонормированность, так что векторы репера будут последовательно совмещаться с соответствующими по порядку векторами репера R'_0.

Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$ – первые векторы реперов R''_1 и R'_0, соотв. Если они не совпадают, возьмем определенную ими двумерную плоскость π. (Если они взаимно обратны, возьмем любую содержащую их плоскость.) Вращением в плоскости π совместим вектор $\mathbf{u}_1$ с вектором $\mathbf{v}_1$. Оставляя неподвижной ортогональную к π $(n-2)$-мерную плоскость, продолжим линейно это отображение на все $\mathbb{R}^n$. Так как вращение есть непрерывная операция, мы получим непрерывное перемещение репера R''_1 в ортонормированный репер, первый вектор которого совпадает с первым вектором репера R'_0. На втором шаге возьмем ортогональную $\mathbf{v}_1$ двумерную плоскость, содержащую вторые векторы репера R'_0 и репера, получившегося из R''_1 на предыдущем шаге, и проведем вращение, совмещающее эти вторые векторы.

Итерируем этот процесс. В результате мы получим перемещение репера R''_1 в репер $\tilde{R}$, первые $n-1$ векторы которого совпадают с соответственными векторами репера R'_0. Последние векторы двух реперов оба ортогональны остальным и они коллинеарны, т.е. последний вектор полученного репера либо совпадает с последним вектором репера R'_0, либо противоположен ему. В первом случае мы получим эквивалентность реперов R_1 и R_0 в смысле первого условия, что и требовалось. Если же векторы противоположны, то определитель матрицы перехода от одного к другому -1, и взятые реперы не были эквивалентны в смысле второго условия. ■

Пусть теперь в аффинном пространстве A^k дан k-симплекс Δ^k, т.е. даны $k+1$ точек $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ в общем положении – вершины Δ^k. Допустим, вершины Δ^k упорядочены, и в качестве начала a_0 выбрана первая из них. Тогда векторы $\mathbf{u}_1 = a_1 - a_0, \ldots, \mathbf{u}_k = a_k - a_0$ образуют репер в A^k и определяют ориентацию A^k. Если A^k уже было ориентировано, и ориентация, заданная симплексом, совпадает с имеющейся, мы скажем, что симплекс Δ^k *ориентирован положительно*, в противном случае – *ориентирован отрицательно* (относительно данной ориентации пространства).

Пусть дано аффинное взаимно однозначное отображение $f : A^k \to A^k_1$ и оба пространства ориентированы. Соответствующее линейное отображение (с произвольным началом в A^k) есть изоморфизм, и переводит k-реперы в k-реперы. Если образ репера положительного в A^k переходит в репер положительный в A^k_1 (или отрицательный в отрицательный), то мы скажем, что *отображение положительно ориентировано* (или положительно). В противном случае скажем, что *отображение отрицательно ориентировано* (или отрицательно).

Соответственно, если в A^k дан k-симплекс, положительно ориентированный порядком вершин $a_0, a_1, \ldots, a_k$, и образ его при аффинном изоморфизме h есть также положительно ориентированный (порядком $h(a_0), h(a_1), \ldots, h(a_k)$) k-симплекс, мы скажем, что *отображение симплекса положительно*, и что изоморфизм h *сохраняет ориентацию* (и обращает ориентацию, если образ положительно ориентированного симплекса ориентирован отрицательно).

Отображение симплекса можно рассматривать независимо от объемлющего пространства. Взаимно однозначное отображение ориентированного k-симплекса на ориентированный k-симплекс (линейное в барицентрических координатах), считается положительным или отрицательным, согласно с тем, будет ли порядок вершин в образе, полученный из ориентирующего порядка в прообразе, задавать в образе ориентацию, совпадающую с данной, или не будет.

Скажем в первом случае, что *степень отображения симплекса на симплекс* равна $+1$, во втором -1. Если отображение не взаимно однозначно, то степень равна 0.

-=-=-=-

Степень отображения.

Пусть даны: отображение $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, где U компактная связная область в $\mathbb{R}^n$, компонента V открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\operatorname{Fr} U)$ и точка $y \in V$. Фиксируем ориентацию в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Мы определим здесь *степень f в точках V*, не зависящую от точки $y \in V$ и обозначаемую $\deg(U, f, V)$ или $\deg(U, f, y)$, если нужно уточнить выбор точки $y \in V$, или для краткости $\deg(f, V)$, если область U фиксирована, или даже просто $\deg f$, если все остальное известно. Степень выражает арифметическое (существенное) число покрытий области V (или точки y) образом U.

Мы введем это определение в два шага. Сначала предположим, что f симплициально в некоторой триангуляции U (измельчающейся к границе U), причем образы k-симплексов, $k < n$, не содержат y, а образы n-симплексов (и, следовательно, всех симплексов) не вырождаются. Оказывается, полученное целое число $\deg(U, f, y)$ не зависит от выбора точки y в пределах одной компоненты V дополнения к $f(\operatorname{Fr} U)$ в $\mathbb{R}^n$, и, как сказано, мы можем обозначить его $\deg(f, V)$, если U фиксирована.

Затем для произвольного непрерывного отображения $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ мы определим $\deg(f, V)$ как $\deg(s, V)$, где s достаточно близкая симплициальная аппроксимация к f (в некоторой своей триангуляции области U). Оказывается это число не зависит от выбора достаточно мелкой триангуляции U и от выбора достаточно близкой к f симплициальной аппроксимации s. При этом мы воспользуемся существованием общего подразделения у двух триангуляций и сначала покажем, что степень отображения одинаковая, если одна триангуляция есть подразделение другой, а затем, что степень одинаковая для двух аппроксимаций f симплициальных в одной и той же триангуляции U. Значит, определение степени не зависит от выбора триангуляции для симплициальной аппроксимации отображения.

1) Пусть дано отображение $s : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, где s симплициально в некоторой триангуляции $T = T(U)$, измельчающейся к $\operatorname{Fr} U$, причем образы симплексов не вырождаются, и пусть точка y выбрана в $s(U) \setminus s(\operatorname{Fr} U)$ так, что она не принадлежит образам симплексов размерности меньше n. (Имея в виду дальнейшее, допустим, не теряя общности, что образы симплексов, содержащие y, не пересекают $s(\operatorname{Fr} U)$.)

В силу наших условий, имеется только конечное число n-симплексов, образы которых содержат y, причем s не вырожденно на каждом из них. (Бесконечное число симплексов имело бы предельную точку на границе U, но y лежит на положительном расстоянии от образа границы.)

Для каждого n-симплекса $\sigma \in T$ и для $s(\sigma)$ берется ориентация, индуцированная заданной ориентацией $\mathbb{R}^n$; определим $\deg(\sigma, s, y)$ как нуль, если $y \notin s(\sigma)$, как $+1$, если $y \in \sigma$ и s сохраняет ориентацию (s положительно) на σ, как -1, если $y \in \sigma$ и s обращает ориентацию (s отрицательно) на σ.

Определим $\deg(s, y)$ как $\sum_i \deg(\sigma_i, s, y)$, где сумма распространена на все n-симплексы триангуляции T (число отличных от нуля слагаемых конечно).

Покажем, что если y_0 и y_1 принадлежат одной компоненте V открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus s(\operatorname{Fr} U)$, то $\deg(s, y_0) = \deg(s, y_1)$.

Так как V открыто (как компонента открытого подмножества $\mathbb{R}^n$) и связно, оно линейно связно. Соединим точки y_0 и y_1 связной ломаной $l \subset V$. Очевидно, l пересекает только конечное число образов симплексов T. Приведем l (сохраняя обозначение) в общее положение относительно этих образов. Тогда l не пересекает образы i-симплексов, $i < n-1$, и пересекает какой-либо $(n-1)$-симплекс $s(\sigma^{n-1})$ (если пересекает) только в одной точке, притом трансверсально, т.е. переходя с одной его стороны на другую.

Симплекс $\sigma^{n-1} \in T$ служит гранью ровно двух n-симплексов, σ_1 и σ_2. Фиксируем порядок вершин на $\sigma^{n-1} \in T$, а оставшиеся вершины считаем последними на σ_1 и σ_2. Тогда σ_1 и σ_2 ориентированы противоположно (по отношению к ориентации $\mathbb{R}^n$). Перенесем выбранный порядок на образы симплексов. Если образы лежат по разные стороны от $s(\sigma^{n-1})$, то эти образы также ориентированы противоположно и s одновременно сохраняет или обращает ориентацию σ_1 и σ_2. Поэтому с обеих сторон $s(\sigma^{n-1})$ в точках $y \in l$ степень $\deg(s, \sigma_1 \cup \sigma_2, y)$ равна одновременно $+1$ или -1.

Если $s(\sigma_1)$ и $s(\sigma_2)$ лежат с одной стороны от $s(\sigma^{n-1})$, то s сохраняет ориентацию на одном и обращает ориентацию на другом n-симплексе. Таким образом степень $s|_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$ будет равна нулю в точках l с обеих сторон образа σ^{n-1}.

Мы предположили, что образы симплексов не вырождаются при отображении s, поэтому каждая точка l принадлежит не более, чем одному образу $(n-1)$-мерного симплекса, и, значит, при перемещении точки y по l от y_0 до y_1 $\deg(s, y)$ не меняется.

Мы считали, что точка y лежит в образах только n-симплексов. Но в противном случае она лежит на границах n-симплексов, в точках каждого из которых степень одна и та же. Поэтому мы можем считать, что и во всех точках V степень одна и та же, т.е. постоянна на V.

2) Теперь мы покажем, что два симплициальных отображения имеют ту же степень в точке $y \in V$, если они достаточно близки к непрерывному отображению f. На самом деле мы покажем, что симплициальные отображения имеют одну степень, если они близки, независимо от f. Отсюда будет также следовать, что степень в точке сохраняется при (симплициальной) гомотопии симплициальных отображений – это следствие компактности отрезка.

Пусть даны два отображения $\bar{U}$ в $\mathbb{R}^n$, s_0 и s_1, симплициальных относительно триангуляций T_0 и T_1 соотв., измельчающихся к границе. Кроме того, дана точка y вне образа границы U, и пусть V компонента дополнения к этому образу, содержащая y. Примем, что отображения настолько близки, что при линейной гомотопии $s_t = ts_1 + (1-t)s_0$ между ними образ границы U остается на расстоянии большем $d > 0$ от y.

Для триангуляций T_0 и T_1 имеется общее подразделение T, относительно которого оба отображения симплициальны. Если мы покажем, что отображения имеют в y равную степень, когда одна триангуляция есть подразделение другой (скажем, T_0 подразделение T_1), то наше утверждение доказано, т.к. каждая триангуляция T есть свое собственное подразделение. Поэтому допустим, что T_1 есть подразделение T_0.

Линейная гомотопия между s_0 и s_1 есть отображение $\bar{s} : \overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, совпадающее на $\overline{U} \times 0$ с s_0, на $\overline{U} \times 1$ с s_1 и линейное на отрезках $x \times [0,1]$, для $x \in \bar{U}$. Мы сохраняем триангуляцию T_0 на $U \times 0$ и T_1 на $U \times 1$.

Несколько изменим это отображение, чтобы сделать его симплициальным. Построим триангуляцию $\widetilde{T}$ на $U \times [0,1]$, взяв сначала барицентр x_σ для каждого $\sigma \in T_0$ и последовательно применяя коническую конструкцию с вершиной $a_\sigma = x_\sigma \times 1/2$ над границей призмы $\sigma \times [0,1]$ в порядке возрастания размерности симплексов. Принимая середину отрезка $s_0(x_\sigma \times [0,1])$ в качестве образа a_σ и беря линейное распространение на симплексы, подразделяющие призму $x_\sigma \times [0,1]$, мы получим нужное отображение $G : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$, симплициальное на $U \times [0,1]$ и совпадающее с s_0 и s_1 на $U \times 0$ и $U \times 1$.

Сместив как угодно мало образы точек a_σ, мы добьемся, чтобы G отображало симплексы размерности меньше $n+1$ без вырождения. Кроме того, можно считать, что образы симплексов размерностей меньше n не содержат y, а симплексы, содержащие y, не пересекают $G(\mathrm{Fr}\, U)$.

Пусть теперь σ^{n+1} один из $n+1$-симплексов триангуляции $\widetilde{T}$, для которого $y \in G(\sigma^{n+1})$. $G|_{\sigma^{n+1}}$ совпадает с ограничением линейного отображения $(n+1)$-мерного пространства в n-мерное, прообраз y есть прямая в этом пространстве, и прообраз y в σ^{n+1} есть отрезок, соединяющий две точки на двух n-мерных гранях σ^{n+1}.

Таким образом, $G^{-1}y$ есть ломаная, возможно, не связная, состоящая из таких отрезков. Возможно, некоторые компоненты ломаной замкнуты, они должны лежать внутри $U \times [0,1]$ и нас не интересуют. Другие компоненты с двумя концами либо 1. имеют оба конца на $U \times 0$, либо 2. оба конца на $U \times 1$, либо 3. один конец на $U \times 0$, другой на $U \times 1$. Каждая компонента прообраза y проходит через последовательность чередующихся n- и $(n+1)$-мерных симплексов триангуляции $\widetilde{T}$.

Мы предполагаем, что фиксирована ориентация (связной) области U, индуцированная из ориентации $\mathbb{R}^n$, и она положительно согласована с ориентацией пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times R$, содержащего $U \times [0,1]$: ориентирующий $(n+1)$-репер пространства получается из ориентирующего репера $U \times 0$ добавлением вектора, направленного от $U \times 0$ к $U \times 1$ (т.е. внутрь $U \times [0,1]$), в качестве последнего в репере.

В $U \times 1$ тогда ориентация будет положительной, если для получения ориентирующего репера в $\mathbb{R}^{n+1}$ репер, ориентирующий $U \times 1$, нужно дополнять в конце вектором, направленным наружу, из $U \times [0,1]$.

В первом случае для связной ломаной $l \subset G^{-1}y$ возьмем в симплексе $\sigma^n \in T_0$, содержащем один конец l, порядок вершин положительный относительно выбранной ориентации U, и пусть, скажем, $\deg(s_0, \sigma^n, y) = +1$. Распространим этот порядок на все n-симплексы в цепочке симплексов, пересекающих l. Это задаст положительный порядок вершин в очередном симплексе σ^{n+1}, гранью которого является предыдущий σ^n, если дополнительную его вершину мы возьмем последней, сохранив порядок вершин грани σ^n. Все $(n+1)$-симплексы в цепочке, через которую проходит l, будут иметь положительную ориентацию. В таком случае последний n-симплекс $\check{\sigma}^n$ в этой цепочке, лежащий на $U \times 0$, будет отрицательно ориентирован относительно выбранной ориентации $U \times 0$ (вектор репера, добавленный к реперу в $\check{\sigma}^n$ в качестве последнего, смотрит наружу). Степень отображения $G|_{\sigma_i^n}$ для каждого n-симплекса в этой цепочке одна и та же, если ориентировать их согласно с выбранным порядком. Но для последнего симплекса $\check{\sigma}^n$ эта ориентация противоположна ориентации U, и поэтому степень ограничения $G|_{U\times 0} = s_0$ на $\check{\sigma}^n$ противоположна степени $G|_{\sigma^n}$, так как мы должны взять ориентацию $\check{\sigma}^n$, индуцированную ориентацией U. Значит, $\deg(s_0, \check{\sigma}, y) = -1$.

Следовательно, $\deg(s_0, \sigma^n, y) + \deg(s_0, \check{\sigma}^n, y) = 0 = \sum_i \deg(\sigma_i^n, s_0, y)$, где сумма распространена на те n-симплексы, образы которых содержат y и при этом построенные для них связные цепочки n- и $(n+1)$-симплексов заканчиваются на $U \times 0$.

Аналогичное верно и в случае 2 (когда оба конца ломаной лежат на $U \times 1$).

Значит, $\deg(U, s_0, y) = \sum_i \deg(\sigma_i^n, s_0, y)$ и $\deg(U, s_1, y) = \sum_i \deg(\sigma_i^n, s_1, y)$, где обе суммы распространены на те n-симплексы, образы которых содержат y и при этом построенные для них связные цепочки n- и $(n+1)$-симплексов заканчиваются на противоположной стороне призведения.

Но для каждой такой цепочки, один конец которой σ_0^n лежит на $U \times 0$, а другой σ_1^n – на $U \times 1$, степени $\deg(\sigma_0^n, s_0, y)$ и $\deg(\sigma_1^n, s_1, y)$ равны.

Действительно, как и выше, порядок вершин $\sigma^n \subset U \times 0$ переносится в порядок вершин $\check{\sigma}^n \subset U \times 1$ и оба отображаются на симплекс, содержащий y, так, что вершины с одним номером отображаются в ту же вершину. Если репер R_n симплекса $\sigma^n \in T_0$ положителен относительно ориентации $U \times 0$, то репер R_{n+1}, дополняющий R_n последним вектором, направленным внутрь $U \times [0,1]$, будет ориентирующим в $\mathbb{R}^{n+1}$. Перенесенный, как в предыдущем случае, вдоль цепочки симплексов, он перейдет в репер, последний вектор которого смотрит наружу, значит, репер перенесенного симплекса $\check{\sigma}^n$ будет ориентирующим на $U \times 1$, и, значит, $s_0|_{\sigma^n}$ и $s_1|_{\check{\sigma}^n}$ одновременно положительны или отрицательны, т.е. $\deg(s_1, \check{\sigma}, y) = \deg(s_0, \sigma^n, y)$.

В результате $\deg(U, s_0, y) = \deg(U, s_1, y)$.

3) Итак, мы определили степень отображения в точке y, $\deg(U, f, y)$, показав попутно, что для симплициальных отображений степень не зависит от точки и не меняется при симплициальной гомотопии. Этого, однако, не достаточно, чтобы вывести аналогичные свойства для определенной нами степени непрерывного отображения, т.к. нужно еще установить, что симплициальная аппроксимация, выбранная для одной точки y, будет годна для другой.

-=-=-=-

Свойства степени.

1) **Независимость от точки.** *Степень* $\deg(f, U, y)$ *постоянна для точек* y*, принадлежащих одной компоненте дополнения к* $f(\mathrm{Fr}\, U)$.

Мы уже показали это для отображения g симплициального в триангуляции измельчающейся к границе U.

Для непрерывного отображения $f : U \to \mathbb{R}^n$, по определению, $\deg(f, U, y) = \deg(s, U, y)$, где s – любая достаточно близкая симплициальная аппроксимация к f. Для двух аппроксимаций s_0 и s_1, мы, переходя к подразделениям, можем найти триангуляцию, в которой оба отображения s_0 и s_1 симплициальны.

Возьмем произвольную точку $y_0 \in V$ и малый шар $B_1 \subset V$ с центром в y_0. Пусть y_1 другая точка этого шара и $B_0 \subset B_1$ – концентрический шар, не содержащий y_1. Пусть еще $B_2 \subset V$ шар, содержащий B_1 с тем же центром y_0, он также лежит на положительном расстоянии от $f(\mathrm{Fr}\, U)$.

Положим $Z_0 = f^{-1}(B_0) \subset Z_1 = f^{-1}(B_1) \subset Z_2 = f^{-1}B_2$, Z_2 лежит на положительном расстоянии от $\mathrm{Fr}\, U$.

Пусть s_0 – симплициальная аппроксимация f, для которой $\deg(U, s_0, y_0) = \deg(U, f, y_0)$, и s_1 – симплициальная аппроксимация, для которой $\deg(U, s_1, y_1) = \deg(U, f, s_1)$.

Если мы покажем, что $\deg(U, s_0, y_0) = \deg(U, s_1, y_1)$, то этим будет показано, что $\deg(U, f, y)$ – локально постоянная функция от y (т.к. точка y_1 бралась произвольно в шаре B_1). Так как V связное открытое множество, отсюда следует, что $\deg(U, f, y)$ постоянно в V по y.

Переходя к подразделениям, мы можем считать, что s_0 и s_1 симплициальны на одной и той же триангуляции T для U, измельчающейся к границе U. При этом, беря аппроксимации достаточно близкими к f и затем беря достаточно мелкое подразделение T, мы получим, что в точках $x \in Z_2$ отрезки $[s_0(x), s_1(x)]$ лежат в V (не пересекают $f(\mathrm{Fr}\, U)$).

Пусть φ – функция Урысона, равная 0 вне Z_1, 1 на Z_0, и $0 \le \varphi(x) \le 1$.

Построим (линейную) гомотопию $\tilde{s}_t$ отображения s_1. Сначала для каждой вершины v триангуляции T положим: $\tilde{s}_t(v) = t\varphi(v)s_0(v) + (1 - t\varphi(v))s_1(v)$.

Для каждого t продолжим это отображение на симплексы, используя барицентрические координаты в T. Отображение $\tilde{s}_1$ симплициально на T и $\tilde{s}_1 = s_0$ для симплексов, лежащих в Z_0, $\tilde{s}_1 = s_1$ для симплексов, лежащих вне Z_2 . Отсюда следует, что $\deg(U, \tilde{s}_1, y) = \deg(U, s_1, y)$ для точек y вне B_2, и, значит, $\deg(U, \tilde{s}_1, V) = \deg(U, s_1, V)$, и, аналогично, $\deg(U, \tilde{s}_1, y) = \deg(U, s_0, y)$ для точек $y \in B_0$, значит, $\deg(U, \tilde{s}_1, V) = \deg(U, s_0, V)$.

В частности, мы получаем требуемое равенство: $\deg(U, s_0, y_0) = \deg(U, s_1, y_1)$, что доказывает локальное постоянство $\deg(f, y)$ и заканчиает определение $\deg(U, f, V)$ как $\deg(U, f, y)$ для любой точки $y \in V$.

2) **Гомотопическая инвариантность.** *Для $y \notin f(Fr\,U)$ имеется такое $\delta > 0$, что если расстояние $f' : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ от f меньше δ, то $\deg(f, U, y) = \deg(f', U, y)$.*

Мы видели при определении степени в точке, что если два симплициальных отображения близки настолько, что при линейной гомотопии между ними образ границы U остается на положительном расстоянии от точки y, то их степени в y равны. Ясно, что если при линейной гомотопии между f и f' образ границы остается на положительном расстоянии от y, то это верно и для их близких симплициальных аппроксимаций.

В силу компактности отрезка из доказанного утверждения вытекает гомотопическая инваиантность степени:

3) **Формула композиции**.

Пусть даны две компактные (связные) области U и V в $\mathbb{R}^n$, $f : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ и $g : \bar{V} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывные отображения, и пусть дана точка $y \in g(V) \setminus (g(\operatorname{Fr} V) \cup gf(\operatorname{Fr} U))$. Положим V_i – компоненты связности $V \setminus f(\operatorname{Fr} U)$.

Теорема композиции.

$$\deg(U, gf, y) = \sum_i \deg(U, f, V_i) \deg(V_i, g, y).$$

(Число ненулевых слагаемых конечно, т.к. $g^{-1}y$ компактно.)

☐ Вначале покажем, что доказательство сводится к случаю, когда данные отображения симплициальны.

Конкретнее, допустим, что имеются отображения $t : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ и $s : \bar{V} \to \mathbb{R}^n$, симплициальные на U и V в триангуляциях T и S, измельчающихся к границам, причем t линейно отображает каждый симплекс T (невырожденно) в некоторый симплекс S. Считаем, что точка $y \in s(V) \setminus (s(\operatorname{Fr} V) \cup st(\operatorname{Fr} U))$ не лежит в $s(\sigma^k)$ ни для какого k-симплекса при $k < n$, и пусть δ – n-симплекс, содержащий y и лежащий в пересечении всех образов n-симплексов $\delta_m \in S$, содержащих y, $1 \le m \le p$.

Пусть $\Delta \xrightarrow{t} \delta_m \xrightarrow{s} \delta$, $\Delta \in T$, $y \in st(\Delta)$, тогда

$$\begin{aligned}\deg(\Delta, st|_\Delta, y) &= \deg(\Delta, st|_\Delta, \delta) = \\ &= \deg(\Delta, t|_\Delta, \delta_m) \deg(\delta_m, s|_{\delta_m}, \delta) = \deg(\Delta, t|_\Delta, \delta_m) \deg(\delta_m, s|_{\delta_m}, y)\end{aligned}$$

(st не обращает ориентацию, если t и s одновременно обращают ориентацию или не обращают, и наоборот).

По определению, $\deg(V, s, y) = \sum_m \deg(\delta_m, s, y) = \sum_m \deg(\delta_m, s, \delta)$ (каждое слагаемое это ± 1, в зависимости от того, обращает s ориентацию на δ_m или нет).

Если $\Delta_{ml} \in T$ – все n-симплексы, которые t отображает (линейно и невырожденно) в δ_m, $1 \le l \le r(m)$, то $\deg(U, t, \delta_m) = \sum\limits_{1 \le l \le r(m)} \deg(\Delta_{ml}, t, \delta_m)$ и

$$\deg(U, st, y) = \sum_{ml} \deg(\Delta_{ml}, st, y) = \sum_{ml} (\deg(\Delta_{ml}, t, \delta_m) \deg(\delta_m, s, \delta)).$$

Разделим теперь слагаемые в этой сумме на группы, относящиеся к компонентам V_i ($\bigcup_i V_i = t(U) \setminus t(\operatorname{Fr} U)$). Пусть число компонент p. Переобозначим соответственно симплексы δ_m как $\delta_{ij} \subset V_i$, $1 \le j \le q(i)$ и симплексы Δ_{ml} как Δ_{ijk}, ($t(\Delta_{ijk}) \subset \delta_{ij}$), $1 \le k \le r(i,j)$. Тогда

$$\deg(U, st, y) = \sum_{1 \le i \le p} \sum_{\substack{1 \le j \le q(i) \\ 1 \le k \le r(i,j)}} (\deg(\Delta_{ijk}, t, \delta_{ij}) \deg(\delta_{ij}, s, y)).$$

Но ввиду связности V_i сумма $\sum_k \deg(\Delta_{ijk}, t, \delta_{ij}) = \deg(U, t, \delta_{ij}) = \deg(U, t, V_i)$ – одна и та же для $\delta_{ij} \subset V_i$, и мы можем вынести ее за скобку: $\sum_i \Big(\deg(U, t, V_i) \sum_j \deg(\delta_{ij}, s, y)\Big)$.

По определению, $\sum_j \deg(\delta_{ij}, s, y) = \deg(V_i, t, y)$, и мы получаем требуемое равенство:

$$\deg(U, st, y) = \sum_i \deg(U, t, V_i) \deg(V_i, s, y).$$

Если мы можем для данных непрерывных отображений f, g найти симплициальные аппроксимации s, t с допущенными выше свойствами, степени которых совпадают со степенями f, g, то теорема доказана. Для q такая аппроксимация существует по определению степени для непрерывных отображений. Но для f мы должны брать свою аппроксимацию для каждой области V_i.

Поэтому придется провести следующее уточняющее построение.

Обозначим компактное множество $g^{-1}(y) \cap (f(\bar U) \cap \bar V)$ через Y. Оно лежит в $\bigcup\limits_i V_i$ и покрыто конечным числом этих областей, пусть $Y \subset \bigcup\limits_{1 \le i \le p} V_i$. Остальные области нас не интересуют, и мы считаем дальше, что $i \le p$. Положим $Y_i = Y \cap V_i$ и $Z_i = f^{-1}(Y_i)$. Z_i компактны в U и не пересекаются. Пусть U_i окрестность Z_i, $U_i \subset \bar U_i \subset U$, причем $\bar U_i \cap \bar U_j = \emptyset$, если $i \ne j$.

Пусть $t_i : \bar U \to \mathbb{R}^n$ симплициально в некоторой триангуляции T_i, измельчающейся к границе U, и служит аппроксимацией f на U_i ($f = t$ на $\operatorname{Fr} U$), s – аппроксимация g, симплициальная в триангуляции S, измельчающейся к границе V.

Аппроксимации t_i и s выбираются согласно определению степени, так что

$$\deg(U_i, f, V_i) (= \deg(U, f, V_i)) = \deg(U_i, t_i, V_i) (= \deg(U, t_i, V_i));$$
$$\deg(V, g, y) = \deg(V, s, y)$$

Имеется триангуляция T области U, служащая общим подразделением триангуляций T_i, все отображения t_i (автоматически) симплициальны относительно T.

Переходя к подразделению, мы можем допустить, что каждый полиэдр P_i, состоящий из (замкнутых) симплексов T, пересекающих Z_i, лежит в U_i (т.е. $St_T(Z_i) \subset U_i$).

Если достаточно малы симплексы S, то $St_S(Y_i) \subset V_i$ и $s^{-1}(y) \cap V_i$ лежит в $St_S(Y_i)$.

Снова переходя к подразделениям, мы можем считать, что t_i отображают симплексы T линейно в симплексы S. (Для симплексов $\tau \in T$ и $\sigma \in S$ возьмем $t^{-1}(t(\tau) \cap \sigma)$. Это выпуклый многогранник, и эти многогранники образуют комплекс многогранников в U. Конической конструкцией этот комплекс превращается в триангуляцию, которую мы продолжаем обозначать T, и симплексы этой триангуляции отображаются линейно в симплексы S.)

Переходя еще раз к подразделениям, мы получим триангуляцию, симплексы которой всеми t_i линейно отображаются в симплексы S, эту триангуляцию продолжаем обозначать T.

Ясно, что st является симплициальной аппроксимацией отображения gf, причем образ границы U для каждой из этих композиций находится на положительном расстоянии от y. Значит, $\deg(U, gf, y) = \deg(U, st, y)$. Но по доказанному для симплициальных отображений $\deg(U, st, y) = \sum_i \deg(U, t, V_i) \deg(V_i, s, y)$. С другой стороны $\deg(U, t, V_i) = \deg(U, t, \delta_{ij}) = \deg(U, t, y_{ij}) = \deg(U, f, y_{ij}) = \deg(U, f, V_i)$ и $\deg(V_i, s, y) = \deg(V_i, g, y)$. Отсюда следует требуемое равенство

$$\deg(U, st, y) = \sum_i \deg(U, f, V_i) \deg(V_i, g, y).$$

$\sum_j \deg(\delta_{ij}, g|_{\delta_{ij}}, y) = \deg(G_i, g|G_i, y)$, получаем

$$\deg(U, g|G_i f, y) = \deg(U, f, G_i) \deg(G_i, g|_{G_i}, y).$$

Наконец, так как

$\sum_i \deg(U, g|_{G_i f, y}) = \deg(U, gf, y)$, $\sum_i \deg U, f, y = \deg(U, f, V)$,

$\sum_i \deg(G_i, g|_{G_i}, y) = \deg(V, g, y)$, окончательно имеем:

$$\deg(U, fg, y) = \deg(U, f, V) \deg(V, g, y). \qquad \blacksquare$$

-=-=-=-

Доказательство теоремы Жордана – Брауэра

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы Жордана – Брауэра и установить, что число компонент дополнения к топологическому образу $(n-1)$-сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$ не больше двух. На самом деле в доказательстве ниже сразу доказывается, что число компонент равно двум.

Теорема. *Если $C \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно $(n-1)$-мерной сфере, то число компонент дополнения равно двум.*

☐ Пусть даны в $\mathbb{R}^n$ стандартная $(n-1)$-сфера (скажем, единичная сфера с центром в начале), которую будем обозначать S, и гомеоморфизм $h : S \to C \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $k : C \to S$ – обратный гомеморфизм.

Отображение замкнутого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, как мы знаем (см.стр.30), может быть продолжено до отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Нам нужны продолжения h и k до непрерывных отображений: $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H|_S = h$ и $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K|_C = k$. Мы можем потребовать, чтобы далекие точки переходили в далекие. Например, данное продолжение $\tilde{h}$ гомеоморфизма h можно заменить на $H(x) = q(x)\tilde{h}(x)$, где $q(x) = 1 + d(x)$, $d(x)$ –расстояние от точки x до C (здесь под $\tilde{h}(x)$ понимается радиус вектор точки). Аналогично для k.

В случае, когда «бесконечность переходит в бесконечность» (т.е. дополнение к большому шару, содержащему C и S, переходит в дополнение к такому же большому шару), мы можем пользоваться развитой техникой, не обращая внимание на некомпактность неограниченных компонент дополнения к C и S.

Мы знаем, что для C число компонент дополнения конечно, а для S оно равно двум. Пусть D_1 и D_2 – две компоненты $\mathbb{R}^n \setminus S$, G_i – компоненты $\mathbb{R}^n \setminus C$. Выберем точки $y_i \in D_i$, $z_j \in G_j$. По формуле композиции

$$\deg(D_i, KH, y) = \sum_j \deg(D_i, H, G_j) \deg(G_j, K, y_i).$$

Но так как на границе KH совпадает с тождеством: $(KH)|_C = \mathbf{1}_C$, $\deg(D_i, KH, y) = \deg(D_i, \mathbf{1}_C, y) = 1$. С другой стороны $\deg(G_j, K, y_i) = \deg(G_j, K, D_i)$, так что $1 = \sum_j \deg(D_i, H, G_j) \deg(G_j, K, D_i)$ и в результате число компонент D_i есть

$$2 = \sum_i \sum_j \deg(D_i, H, G_j) \deg(G_j, K, D_i).$$

Но ту же сумму справа, с точностью до перестановок сомножителей, мы получим и для гомеоморфизма HK, что даст нам число компонент G_j, которое, таким образом равно двум. ■

Замечание. Это доказательство взято из книги Gerald Teschl «Topics in Real and Functional Analysis», где доказан существенно более общий результат: число компонент дополнения к компакту в $\mathbb{R}^n$ инвариантно. (Как ни располагай восьмерку на плоскости, число компонент три.) Доказательство немного сложнее приведенного частного случая и может послужить хорошей задачей

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

-=-=-=-=-=-=-

ЧАСТЬ 3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

И ПОВЕРХНОСТИ

-=-=-=-=-=-

13. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ. ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

-=-=-=-

Отображения окружности в окружность.

Окружность $\mathbb{S}^1$ есть сфера размерности 1, и из предыдущих результатов мы можем сделать некоторые заключения о ее топологических и гомотопических свойствах. Прежде всего окружность принадлежит классу ANR. Поэтому отображения в $\mathbb{S}^1$ замкнутого подмножества A, например, компакта X продолжаемы на окрестность A в X. Гомеоморфный образ окружности на плоскости разбивает плоскость на две компоненты и служит их общей границей. Наконец, отображения окружности в себя могут быть негомотопными нулю – прежде всего, $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^1} \not\simeq \mathbf{0}$, т.е. окружность не стягиваема.

Оказывается, рассмотрение отображений $\mathbb{S}^n$ в себя для любого n может быть проведено с точки зрения теории гомотопий со всей полнотой. Именно, множество $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ гомотопических классов отображений сферы в себя (любой размерности $n > 0$) может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, причем в $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ вводятся две естественные операции, которые при этом соответствии переходят в арифметические операции сложения и умножения. Целое число, отвечающее гомотопическому классу отображений, называется *степенью* всех отображений этого класса.

Для окружности доказательство проще и имеет свои достоинства. Мы в этих лекциях остановимся только на этом случае. Общий случай рассматривается в курсе дифференциальной геометрии в рамках совсем иной техники.

Для того, чтобы описать для окружности $\mathbb{S}^1$ это соответствие, удобно представить себе ее единичной окружностью в плоскости комплексных чисел, т.е. как множество чисел $\mathbf{z} = x + \mathrm{i}y$ с условием $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Это множество параметризуется вещественным параметром φ (аргументом числа) с помощью *тригонометрической формы числа*: $\mathbf{z} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$. Аргумент φ представляет угол наклона вектора $\mathbf{z}$ к оси абсцисс, но эта параметризация неоднозначна, и для нас важно уточнить соответствие $\varphi \mapsto z$. Мы имеем отображение, $\mathbf{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{z}$, которое периодично – с периодом 2π, если φ есть радианная мера угла. Это значит, что вектор $\mathbf{z}$ параметризуется бесконечно многими значениями параметра φ, отстоящими друг от друга на расстояниях кратных 2π. Однако, если мы возьмем на прямой $\mathbb{R}$ интервал длиной меньше 2π, то он отобразится не только взаимно однозначно, но даже гомеоморфно (на самом деле изометрично, с сохранением длин). Более того, если мы возьмем на $\mathbb{S}^1$ интервал (дугу) $l = [\alpha, \beta]$ (для однозначности: двигаясь от α к β против часовой стрелки), то полный прообраз l распадется в счетное число интервалов $\tilde{l}_i$, получающихся друг из друга сдвигами на кратные 2π, причем каждый $\tilde{l}_i$ отображается гомеоморфно на l.

Функцию $\mathbf{e}(\varphi)$ представляют как комплексную показательную функцию $e^{\varphi\mathbf{i}}$ со свойством $e^{(\varphi_1+\varphi_2)\mathbf{i}} = e^{\varphi_1\mathbf{i}}e^{\varphi_2\mathbf{i}}$: умножению комплексных чисел отвечает сумма их аргументов (и произведение модулей, но модули у нас единичные).

Если теперь для некоторого пространства X нам даны два отображения $f_j : X \to \mathbb{S}^1$, $j = 1, 2$, то мы можем определить *произведение этих отображений:* $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ (умножение комплексных чисел), f снова будет отображением X в $\mathbb{S}^1$, причем порядок несуществен, так как $f_1(x)f_2(x) = f_2(x)f_1(x)$. Мы получаем, в частности, операцию во множестве отображений окружности в окружность. Кроме того, в этом множестве имеется еще одна операция – *операция композиции*: $g = f_1 \circ f_2 :\ g(x) = f_1(f_2(x))$ (эта операция зависит от порядка).

Теперь перейдем к формулировке результата:

Теорема. Имеется взаимно однозначное отображение $d : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ множества гомотопических классов отображений окружности в себя в кольцо целых чисел, при котором $d([f_1 f_2]) = d([f_1]) + d([f_2])$ и $d([f_1 \circ f_2]) = d([f_1])d([f_2])$ для любых двух отображений $f_j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $j = 1, 2$ (в частности, обе операции на классах коммутативны.)

$\square$ Пусть дано отображение $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Попробуем его *прологарифмировать*, т.е. представить в виде композиции отображения $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ и канонического отображения $\mathbf{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Иначе говоря, представить в виде $f(x) = e^{\tilde{f}(x)\,\mathrm{i}}$. Мы воспользуемся описанными выше свойствами отображения $\mathbf{e}$.

Нам удобно представить f как отображение $f : \check{\mathbb{S}}^1 \to \mathbb{S}^1$ одного экземпляра окружности в другой. Кроме того, удобно считать, что все наши отображения окружности в окружность будут переводить точку $\check{1}$ (комплексная единица в $\check{\mathbb{S}}^1$) в $1 \in \mathbb{S}^1$, в частности, $f(\check{1}) = 1$.

В силу равномерной непрерывности f, можно разбить $\check{\mathbb{S}}^1$ на некоторое число N равных отрезков (дуг) $l_j = [a_j,\, a_{j+1}]$, где $a_1 = \check{1}$ и $a_{N+1} = \check{1}$, так, что $f(l_j)$ лежит в дуге, которая меньше полуокружности. В таком случае образ любой дуги l длиной (в радианах) $\frac{2\pi}{N}$ будет лежать в дуге λ, прообраз которой при отображении $\mathbf{e}$ распадается в счетную систему интервалов μ_k в $\mathbb{R}$, которые гомеоморфно отображаются на λ и получаются друг из друга сдвигами кратными 2π.

Теперь будем "поднимать" отображение f, т.е. строить $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, последовательно переходя от интервала l_j к l_{j+1}. Начало положено условием $f(\check{1}) = 1$. Отобразим l_1 в $\mathbb{R}$ как композицию $\tilde{f}(x) = \mathbf{e}^{-1} f(x)$, считая, что $\tilde{f}(\check{1}) = 0$ и воспользовавшись тем, что диаметр $f(l_1)$ достаточно мал и лежит в интервале $l \subset \mathbb{S}^1$, прообраз которого $\mathbf{e}^{-1} l$ распадается в бесконечную дизъюнктную серию интервалов $\tilde{l}_j$, каждый из которых отображается на l гомеоморфно и каждый содержит гомеоморфный образ $f(l_1)$. Естественно, берется прообраз, содержащий 0 и лежащий в $\tilde{l}_1$: $\tilde{f}(x) = \mathbf{e}^{-1} f(x) \cap \tilde{l}_1$, $x \in l_1$.

Далее действуем по индукции. Считаем, что отображение $\tilde{f}$ уже построено на объединении первых i отрезков l_j. В таком случае точка a_{i+1} уже отображена. Тогда мы определяем $\tilde{f}|_{l_{i+1}}$ как композицию $\mathbf{e}^{-1} f|_{l_{i+1}}$, выбирая тот из прообразов $f(l_{i+1})$, который содержит только что определенную точку $\tilde{f}(a_{i+1})$.

В результате мы построим отображение $\tilde{f}$ на всей окружности $\check{\mathbb{S}}^1$ вплоть до начальной точки $\check{1}$. Однако здесь может возникнуть противоречие. Мы начали с того, что определили $\tilde{f}(\check{1}) = 0$. Совершив один обход окружности $\check{\mathbb{S}}^1$, мы не обязательно придем опять к 0. Мы можем придти к любой точке, лежащей над 1, т.е. к любой точке вида $2\pi d$, где d целое.

Построенное отображение $\tilde{f}$ непрерывно на любой дуге $[\check{1}, \varphi]$, $\varphi < 2\pi$ окружности, но терпит разрыв величиной $2\pi d$ в точке $\check{1}$. Целое число d мы и поставим в соответствие отображению f, назовем его *степенью* f и обозначим его $\deg f$.

Изучим свойства $\deg f$.

1. **Если отображения f_0 и f_1 гомотопны при гомотопии g_t такой, что $g_0 = f_0$, $g_1 = f_1$ и $g_t(\check{1}) = 1$ при всех t, то $\deg f_0 = \deg f_1$.**

□ Отрезок гомотопии можно разбить на конечное число столь малых интервалов $[t_j, t_{j+1}]$, что расстояние между отображениями g_{t_j} и $g_{t_{j+1}}$ будет меньше любого наперед заданного $\delta > 0$. Тогда и расстояние между соответствующими поднятыми отображениями $\tilde{g}_{t_j}$ и $\tilde{g}_{t_{j+1}}$, т.е. между точками $\tilde{g}_{t_j}(x)$ и $\tilde{g}_{t_{j+1}}(x)$ для всех x, будет меньше заданного ε. Но финальный образ $\check{1}$ выбирается в дискретном множестве прообразов $\mathbf{e}^{-1}(1)$ и не может измениться при малом изменении отображения. Поэтому для всех t $\tilde{g}_t(\check{1})$ одно и то же. ■

Итак, степень одна и та же для всех отображений данного гомотопического класса отображений окружности в окружность. Поэтому мы можем говорить о степени $\deg[f]$ гомотопического класса.

Заметим, что условие $f(\check{1}) = 1$ не является ограничением, т.к. если $f(\check{1}) = b$, то имеется гомотопия этого отображения в правильное простым поворотом окружности против часовой стрелки, переводящим b в $\check{1}$. Мы можем тогда определить $\deg f$ как степень полученного правильного отображения. Если данные отображения гомотопны, то и полученные правильные будут гомотопны, при правильной гомотопии.

Обратно. **Если степени равны, то отображения гомотопны.**

□ Если $\deg f_0 = \deg f_1$, то для двух поднятых отображений $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$ равны образы и 0 – начальной единицы, и d – финальной единицы. Рассмотрим линейную гомотопию $\tilde{g}_t = (1-t)\tilde{f}_0 + t\tilde{f}_1$. Очевидно, при всех t образ 1 при отображении $\tilde{g}_t$ и при начальном значении и при финальном тот же, что и у отображений $\tilde{f}_i$. Эта гомотопия отображением $\mathbf{e}$ переводится в гомотопию $\mathbf{e}\tilde{g}_t$ между f_0 и f_1. ■

3. **Степень комплексного отображения z^n («степень d комплексной степени»), рассматриваемого на $\mathbb{S}^1$, равна n.**

□ Радианная мера это мера длины на единичной окружности. Поэтому отображение z^n на единичной окружности ($\varphi(\mathbf{z}) \mapsto n\varphi$) растягивает длины в n раз, а $\mathbf{e}^{-1}$ сохраняет длины. После однократного обхода окружности точка $\tilde{f}(\check{1})$ есть $2n\pi$. ■

Мы построили взаимно однозначное отображение $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ на $\mathbb{Z}$.

В частности: Отображение имеет степень нуль ⇔ оно гомотопно нулю.

Степень гомеоморфизма либо 1, либо -1.

□ Если $|\deg h| \neq 1$, то h не может быть взаимно однозначным.

Другое доказательство: Так как $h^{-1}h = \mathbf{1}$ и $\deg \mathbf{1} = 1$, $\deg h = \pm 1 = \deg h^{-1}$ и знак для h и h^{-1} тот же. При этом знак указывает на то, сохраняет ли отображение положительное направление обхода. ■

Отображение гомотопно гомеоморфизму ⇔ степень отображения равна 1 или -1.

Соответственно говорится, что отображение *сохраняет или обращает ориентацию* (обход) окружности.

Теперь рассмотрим *алгебраические свойства* степени.

4. Мы можем проверить эти свойства на представителях.

Пусть $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ и f_t, g_t – гомотопии: $f_0 = f$, $g_0 = g$. Тогда $h_t(x) = f_t(x) \cdot g_t(x)$ – гомотопия от $h_0 = h = f \cdot g$ к $h_1 = f_1 \cdot g_1$. Аналогично для композиций.

В качестве представителей возьмем отображения $z \mapsto z^n$.

Мы получим: $z^n z^m = z^{m+n}$ и $(z^n)^m = z^{mn}$.

Следовательно, $([f \cdot g]) = d([f]) + d([g])$ и $d(f(g)) = d([f] \cdot d([g]))$. ■

-=-=-=-

Основная теорема алгебры

Теорема. Всякий комплексный многочлен $P_n(z)$ степени $n > 0$ от одной комплексной переменной z имеет корень.

Известно из алгебры, что если корень z_0 имеется, то $P_n(z) = P_{n-1}(z)\cdot(z - z_0)$, где P_{n-1} – многочлен степени $n-1$. Тогда по индукции получаем, что P_n имеет n корней, с учетом кратности.

Нам нужно установить существование хотя бы одного корня. Уравнение $P_n(z) = 0$ можно сократить на старший коэффициент многочлена, и мы допустим, что он единица, т.е. многочлен имеет вид $P_n(z) = z^n + Q_{n-1}(z)$, где Q_{n-1} многочлен степени $n-1$.

Имеется много доказательств этой знаменитой теоремы. Мы разберем два, которые ближе к началам топологии.

□ ***Первое доказательство.*** Воспользуемся отображением Борсука. Обозначим через $\mathbb{S}_r$ окружность радиуса r с центром в начале $\mathbb{O}$. Для любого непрерывного отображения $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ плоскости в себя и такого r, что $F(z) \neq \mathbb{O}$ для $z \in \mathbb{S}_r$, пусть $\pi_r : \mathbb{S}_r \to \mathbb{S}_r$ есть композиция $\varphi_r F|_{\mathbb{S}_r}$, где φ_r – радиальная проекция $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{S}_r$.

Назовем $d_r = \deg \pi_r$ числом обходов начала для радиуса r. Если радиус меняется непрерывно от r_0 до r_1, и ни при каком его значении образ окружности $\mathbb{S}_r$ не проходит через $\mathbb{O}$, то мы получаем гомотопию отображений окружности на себя и, значит, число d_r не меняется.

Пусть F данный многочлен $P_n(z) = z^n + Q_{n-1}(z)$. Возьмем столь большое r_0, что $|z^n| > |tQ_{n-1}|$ при $0 \le t \le 1$.

Для доказательства существования такого r_0 достаточно разделить обе части неравенства на $|z^{n-1}|$, тогда слева стоит $|z|$, а справа ограниченная величина.

Меняя t в сумме $P_n(z) = z^n + tQ_{n-1}(z)$ от 1 до 0, мы прогомотопируем $P_n|_{\mathbb{S}_{r_0}}$ к отображению $z^n|_{\mathbb{S}_{r_0}}$ и ни при каком t образ не пройдет через $\mathbb{O}$. В таком случае число обходов начала у P_n на $\mathbb{S}_{r_0}$ такое же, как у z^n, т.е. n.

Если корень у многочлена отсутствует, т.е. $P_n(z) \neq \mathbb{O}$ ни при каком z, то число обходов равно n для всех $r > 0$ – как мы видели, это число не меняется при непрерывном изменении радиуса, если образ окружности не проходит через начало.

Пусть теперь r_1 очень маленький радиус. Тогда, в силу непрерывности P_n, образ $\mathbb{S}_r$ лежит в как угодно малой окрестности точки $a_n = P_n(0)$ – свободный член многочлена. При радиальной проекции на $\mathbb{S}_r$ точка $b \in \mathbb{S}_r$, лежащая на прямой $\mathbb{O}a_n$, но с противоположной от a_n стороны, будет не покрыта образом $\mathbb{S}_r$. Поэтому степень отображения π_{r_1} равна нулю, как и число обходов. Таким образом, наш многочлен есть константа и в этом случае он не имеет корней (если константа не нуль.) ■

Это доказательство в конечном счете опиралось на гомотопическую технику.

Дадим ***второе доказательство***, которое использует теорему об обратном отображении, а в остальном чисто топологическое.

Для аналитической функции $w(z)$ производная определяется стандартным предельным отношением, но для этой же функции, рассматриваемой как гладкое отображение плоскости в плоскость, приходится приравнять производные по двум перпендикулярным направлениям. Если $z = x + \mathrm{i}y$ и $w(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, то

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{\triangle u(x,y)}{\triangle x} + \mathrm{i}\frac{\triangle v(x,y)}{\triangle x}\right) = \lim_{\triangle y\to 0}\left(\frac{\triangle u(x,y)}{\triangle \mathrm{i}y} + \mathrm{i}\frac{\triangle v(x,y)}{\mathrm{i}\triangle y}\right)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Это приводит к уравнениям Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Из этих уравнений следует, что якобиан отображения (определитель матрицы Якоби) равен $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$.

Обращение в нуль этого определителя означает обращение (в силу уравнений Коши – Римана) всех четырех частных производных и эквивалентно равенству нулю комплексной производной. В нашем случае это многочлен P_n' степени $n-1$, который, как мы знаем, может иметь не более $n-1$ корней.

□ Таким образом, матрица Якоби отображения $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, порожденного многочленом P_n, отлична от нуля всюлу, кроме конечного числа точек.

Согласно *теореме об обратном отображении*, в остальных случаях, если точка принадлежит образу, то и целая ее окрестность принадлежит образу. Иными словами, отображение открыто вне конечного числа точек и образ дополнения к этим точкам – связное открытое множество U.

Граничные точки U принадлежат образу плоскости. В самом деле, пусть последовательность $P_n(z_i)$ сходится к точке w_0. Если из последовательности z_i можно выделить сходящуюся к точке z_0 плоскости, то в силу непрерывности, $P_n(z_0) = w_0$, т.е. z_0 принадлежит образу. Иначе, последовательность z_i стремится к бесконечности.

Но мы видели выше, что для многочлена образ последовательности точек стремящейся к бесконечности, сам стремится к бесконечности.

Среди образов точек плоскости граничными точками U могут быть только образы нулей многочлена, $w_i = P(z_i)$, где $P'(z_i) = 0$.

Но поскольку в малой окрестости такой точки других граничных точек нет, вся эта окрестность принадлежит образу U, т.е. U открыто-замкнутое подмножество плоскости и, значит, совпадает со всей плоскостью, т.к. плскость связна.

Значит некоторая точка отображается в нуль. ■

-=-=-=-

Векторные поля на плоскости и сфере

∼ *Векторным полем* на множестве X в пространстве $\mathbb{R}^n$ или на сфере $\mathbb{S}^n$ называется сопоставление каждой точке $x \in X$ вектора $\mathbf{v}(x)$, который непрерывно зависит от точки. Вектор в $\mathbb{R}^n$ понимается в обычном смысле стрелки с начальной точкой x, конечной точкой $y(x)$, его координаты это разности координат y и x. Вектор на $\mathbb{S}^n$ это вектор в объемлюшем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, касательный к сфере, например, в том смысле, что он ортогонален ее радиусу.

Векторные поля имеют очень большое значенние в математике, например, для геометрической интерпретации дифференциальных уравнений.

∼ Точки, в которых векторное поле $\mathbf{v}(x)$ обращается в нуль, называются *нулями* поля, или *особыми точками.*

Пусть сначала для простоты векторное поле $\mathbf{v}(x)$ дано во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пусть $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ такое отображение, что в точках $z = g(u)$, $u \in \mathbb{S}^1$, образа C окружности векторы данного поля ненулевые.

Обозначим через $\varphi(z)$ угол наклона вектора $\mathbf{v}$ в точке $z \in C$ к оси абсцисс, считая угол (в радианной мере) координатой точки на окружности $\mathbb{S}^1$, так что $\varphi(z) \in \mathbb{S}^1$.

∼ Композиция $\varphi(g(u))$ дает отображение $\mathbb{S}^1$ в себя.

Степень этого отображения называется *вращением* поля $\mathbf{v}$ вдоль кривой $C = g(\mathbb{S}^1)$, мы ее обозначим $\omega_C(\mathbf{v})$.

Пусть g является гомеоморфизмом $\mathbb{S}^1$ на $C \subset \mathbb{R}^2$, в частности, g задает положительный обход C, (Положительным обходом $\mathbb{S}^1$ считается обход против часовой стрелки.) Предположим, что начало $\mathbb{O}$ лежит в компактной компоненте дополнения к C, а поле не имеет нулей вне начала.

Теорема. Если вращение поля вдоль C ненулевое, то $\mathbb{O}$ является нулем поля $\mathbf{v}$.

☐ Доказательство состоит в гомотопном стягивании кривой C вне начала к началу: имеется (радиальная) гомотопия $g_t : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, для которой $g_0 = g$, $g_t(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{O}$, $g_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{O}$. Для каждого $t < 1$ образ C лежит вне $\mathbb{O}$, так что степень определена и постоянна.

В процессе гомотопии вращение не меняется, но вблизи $\mathbb{O}$ векторы поля, ввиду непрерывности, почти параллельны вектору $\mathbf{v}(\mathbb{O})$, и тогда *если он не нулевой*, $\omega_C(\mathbf{v})$ равно нулю. ■

В этом доказательстве образ C при гомотопии выходит за пределы области, ограниченной кривой C. В следующем доказательстве нужно, чтобы гомотопия проходила по этой области. На самом деле, замыкание области, ограниченной гомеоморфным образом окружности на плоскости, гомеоморфно замкнутому диску. Но это добавление к теореме Жордана – *теорема Шенфлиса* – имеет довольно сложное доказательство, и в эти лекции не включается.

Однако, мы можем обойтись гомотопической версией этой теоремы:

Лемма 1. Компактная область U, ограниченная гомеоморфным образом окружности $\mathbb{S}^1$, стягивается по себе в точку.

☐ Из теоремы Жордана нам известно, что дополнение к C распадается на две компоненты – компактную (с компактным замыканием) U и неограниченную V, замыкание которой имеет ретракцию $q : V \searrow C$. Пусть C лежит в шаре B. Для B получается ретракция $\bar{q} : B \searrow \overline{U}$ ($\bar{q}(x) = q(x)$, если $x \in B \setminus U$ и $\bar{q}(x) = x$, если $x \in U$). Но тогда U стягиваемо как ретракт стягиваемого пространства B: если g_t – радиальное стягивание B, то $\bar{q}g_t|_{\overline{U}}$ – требуемое стягивание $\overline{U}$. ■

При этом стягивании, если $x \neq \mathbb{O}$ и $t < 0$, то и $qg_1x \neq \mathbb{O}$.

Теорема. Пусть $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ – вложение окружности, $g(\mathbb{S}^1) = C$, и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ – векторное поле, заданное в замыкании ограниченной компоненты U дополнения к C. Допустим, что $\mathbf{v}$ отлично от нуля в точках C, и вращение поля вдоль C равно нулю. Тогда $\mathbf{v}$ имеет особые точки в U.

☐ Предполагая, что особых точек в U нет, построим, на основе леммы, гомотопию $g_t : \mathbb{S}^1 \to \overline{U}$ отображения $g = g_0$ в постоянное $g_1(\mathbb{S}^1) = a \in U$. Вращение $\omega_C\mathbf{v}$ такое же, как вдоль малой окружности с центром a. Но так как вектор $\mathbf{v}(a)$ ненулевой, все векторы вблизи a почти параллельны ему, и, как и в предыдущем доказательстве, мы заключаем, что вращение вдоль этой окружности нулевое. ■

-=-=-=-

Индекс особой точки векторного поля на плоскости

Пусть теперь компактная область U, ограниченная кривой C (гомеоморфной окружности), содержит ровно одну особую точку, скажем, $\mathbb{O}$ поля $\mathbf{v}$. В таком случае вращение поля вдоль C может быть любым целым числом, нулевым, ненулевым, отрицательным, как угодно большим и т.д.

Число вращения грубо характеризует поведение поля вблизи особой точки.

Усилим предыдущую лемму. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to C \subset \mathbb{R}^2$ вложение окружности в плоскость, a точка в ограниченной компоненте U дополнения к C.

Пусть $S_r \subset U$ – окружность с центром a малого радиуса r, B – большой шар радиуса R с центром a и граничной сферой S, содержащий в себе $\overline{U}$.

Вложение $f : \mathbb{S}^1 \to C$ гомотопно, при гомотопии по промежуточной замкнутой области Q между C и S_r, гомеоморфизму $\tilde{g} : \mathbb{S}^1 \to S$.

Фиксируем какой-либо гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}_r$ и положим $g = fh^{-1}$ – гомеоморфизм S_r на C.

Замкнутая область K между S и S_r естественным образом представляется цилиндром $S_r \times [0, 1]$, положим p проекция прямого произведения.

Теорема. Проекция $p|_C$ гомотопна гомеоморфизму, знак степени которого ($+1$ или -1) зависит от ориентации (направления обхода) C.

При этом тождественное отображение C гомотопно гомеоморфному отображению C на S_r при гомотопии по замкнутой области Q между C и S_r.

□ 1. Имеется естественная радиальная гомотопия $\psi_t : K \to K$, $\psi_0 = \mathbf{1}$, $\psi_1(K) = S$: $x \mapsto \frac{(1-t)|x|+tr}{|x|}x$.

2. Имеется, как мы видели выше, ретракция $q : K \searrow Q$. С ее помощью гомотопия $\psi_t|_{S_r}$ порождает гомотопию $\varphi_t = q\psi_t|_{S_r} : S_r \to Q$, для которой $\varphi_0 = \mathbf{1}$, $\varphi_1(S_r) = C$.

3. С другой стороны проекция p прямого произведения K на S_r переводит эту гомотопию в гомотопию $\xi_t = p\varphi_t : S_r \to S_r$, $\xi_0 = \mathbf{1}$, $\xi_1 = p|_C\varphi_1$. Поскольку $p\varphi_0 = \mathbf{1}$, т.е. $p\varphi_1 \simeq \mathbf{1}$, $\deg(p\varphi_1) = 1$ и $\deg p|_C = \pm 1 = \deg(\varphi_1 : S_r \to C)$.

4. Считая, что гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}_r$ согласован с положительными обходами обеих окружностей (против часовой стрелки) и, значит, $\deg h = 1$, мы видим, что знак степени $\deg p|_C$ определен выбором исходного гомеоморфизма f, задающего обход кривой C. Мы можем поменять знак $\deg p|_C$ на обратный, заменив f на fs, где s зеркальная симметрия окружности $\mathbb{S}^1$. ■

- Мы получили в случае окружности уточнение теоремы Борсука (которое справедливо также и в случае сферы любой размерности):

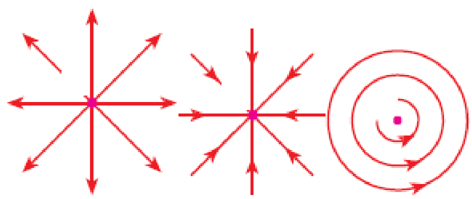
Если точка a лежит вне компактной компоненты дополнения к гомеоморфному образу C окружности, то C стягивается в точку в этой компоненте, т.е. вне точки a; если она лежит в компактной компоненте, то имеется гомотопия от тождественного гомеоморфизма C по этой компоненте к гомеоморфизму на малую окружность с центром в a.

Мы скажем во втором случае, что C *охватывает* a.

Из доказанного утверждения, к которому часто приходится прибегать при работе с векторными полями, следует, что вращение векторного поля по любой кривой, охватывающей изолированную особую точку одно и то же, и что подсчитывать это вращение, т.е. характеристику особой точки, достаточно по малой окружности с центром в этой точке.

$\sim$ Эта характеристика называется *индексом* особой точки.

В качестве упражнения подсчитайте индексы стандартных особых точек на рисунке.



of points.png

-=-=-=-

Теорема Пуанкаре.

$\sim$ Связная область $U \subset \mathbb{R}^2$ называется *односвязной*, если любое отображение окружности в U стягиваемо в U в точку.

Пусть теперь векторное поле $\mathbf{v}(x)$ задано в односвязной области $U \subset \mathbb{R}^2$. (Например, U может быть гомеоморфно открытому шару.) Допустим, известно, что $\mathbf{v}$ имеет в U конечное число особых точек.

Теорема Пуанкаре. Пусть дано гомеоморфное отображение $q : \mathbb{S}^1 \to C \subset U$ (вложение). Тогда вращение поля вдоль C равно сумме индексов особых точек поля в U.

☐ Обозначим через U область ограниченную кривой C. Пусть $a \in U$ неособая точка поля. Нетрудно соединить a с точками $a_i \in C$ простыми дугами l_i (гомеоморфными образами отрезка, например, ломаными) так, чтобы дополнение к ним в U распалось бы на связные области V_i, каждая содержащая в точности одну особую точку $x_i \in V_i$. Каждая дуга служит общей частью границы двух областей: V_i и V_{i+1}. Вращение поля $\mathbf{v}$ вдоль границы V_i есть сумма трех частей: поворот на части границы, принадлежащей C, и двух слагаемых – поворотов на дугах l_i и l_{i+1}. (Отложим строгое определение вращения поля на незамкнутых дугах до конца доказательства.)

В общую сумму вращений на границах V_i вращение на каждой дуге l_i войдет дважды, но, очевидно, с противоположными знаками. В итоге останется только вращение вдоль C. ■

Мы определили вращение поля вдоль замкнутой кривой, так сказать, глобально, через степень отображения. Но, вспоминая определение степени, нетрудно показать, что для ее вычисления достаточно разбить кривую на последовательные малые дуги и взять сумму приращений угла наклона вектора на этих дугах. Это определение годится также для незамкнутых кривых. При этом определении становится очевидным, что если дуга разбита точкой на две меньшие дуги, то вращение по ней оказывается равным сумме вращений по этим меньшим дугам.

-=-=-=-

Теорема о еже

Перейдем к векторным полям на сфере.

Нам понадобится так называемая стереографическая проекция сферы на плоскость. Пусть сфера $\mathbb{S}^2$ касается горизонтальной плоскости $\mathbb{R}^2$ в своей нижней ("южной") точке S. Противоположную ("северную") точку обозначим N и примем ее за центр проекции. Эта проекция определяет гомеоморфизм $\mathbb{S}^2 \setminus N$ на $\mathbb{R}^2$. При этом касательные векторы к сфере (стрелки, ортогональные радиусам точек, к которым они приложены) переходят в определенные векторы на плоскости (приложенные к образам этих точек).

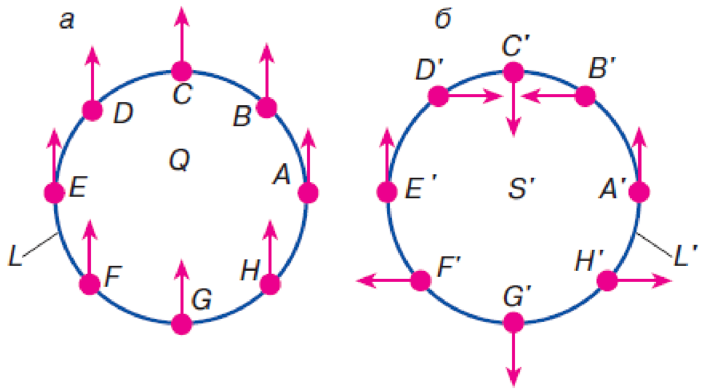
Теорема. На сфере не существует векторного поля, отличного от нуля в каждой точке сферы.

(Иными словами: векторное поле на сфере должно иметь особые точки.)

☐ Допустим, что имеется векторное поле $\mathbf{v}$ на сфере без особых точек. Рассмотрим его сначала на малой окружности с центром в N. В силу непрерывности поля векторы в точках такой окружности почти параллельны и вращение поля на ней равно нулю.

Теперь рассмотрим образ поля при стереографической проекции. Естественно, величина вращения получившегося поля на получившейся из S окружности в плоскости должна остаться прежней.

Однако следующая картинка показывает, что вращение стало равным двум! (Слева поле на сфере, справа – получившееся поле на плоскости.) ■



Группа Брушлинского

В полученной выше теореме о классификации гомотопических классов отображений окружности в окружность, которая отождествляет их множество с кольцом целых чисел, можно заменить окружность - прообраз любым компактом X. При этом, считая окружность - образ единичной окружностью в комплексной плоскости, мы получим, как и выше, что произведение функций (отображающих X в окружность) будет коммутативной группой. Эта группа называется *группой Брушлинского* (изучавшего ее в 1933 году).

Однако полного описания мы, конечно, не получим. Например, нет умножения, отвечавшего для отображений окрукжности операции композиции (так как нет и композиции). Нет и степени отображения.

Однако, на основе описанной техники логарифмирования (т.е. представления отображения f в виде $e^{i\tilde{f}}$) можно доказать (это оставляется в виде необязательной задачи), что отображение f компакта в окружность гомотопно нулю тогда и только тогда, когда его модно прологарифмировать, и два отображения гомотопны тогда и только тогда, когда можно прологарифмировать их отношение.

Рассмотрим теперь отображения окружности в топологические пространства с гомотопической точки зрения.

-=-=-=-=-=-

14. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

-=-=-=-

Определение фундаментальной группы

Мы будем рассматривать отображения окружности $\mathbb{S}^1$ в связное, локально линейно связное и локально компактное пространство X. В окружности отмечается одна точка, которую будем обозначать a и которую при необходимости будем отождествлять с комплексной единицей. В X также отметим точку x_0. Мы будем рассматривать отображения окружности, переводящие a в x_0, и гомотопии между ними, которые сохраняют это условие.

Оказывается множество гомотопических классов $[\mathbb{S}^1, X]$ естественным образом образует группу, которая называется *фундаментальной группой пространства* X и обозначается $\pi_1(X)$ (или $\pi_1(X, x_0)$ при необходимости указать отмеченную точку).

$\sim$ В частности, связные пространства, для которых любое отображение в них окружности гомотопно нулю, называются *односвязными.*

Стягиваемые пространства односвязны. Сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна при $n \geq 2$

Отображения q окружности в X называются *петлями* и отождествляются с отображениями отрезка (путями) с совпадающими концами. Если обозначить через $\lambda(t) = s$ стандартное отображение отрезка $[0,\ 1]$ на $\mathbb{S}^1$ с условием $\lambda(0) = a = \lambda(1)$ и гомеоморфное на $(0, 1)$, то петле $q : \mathbb{S}^1 \to X$ отвечает путь $p = q\lambda$. В множестве петель естественным образом вводится операция, которая, грубо говоря, отвечает последовательному прохождению соответствующих путей. Точное определение такое.

Пусть q_1 и q_2 две петли и p_1, p_2 отвечающие им пути. Определим сначала путь $p = p_1 \cdot p_2$:

$p(t) = p_1(2t)$, если $t \in [0, 1/2]$ и $p(t) = p_2(2t-1)$, если $t \in [1/2,\ 1]$.

Так как $p_1(1) = x_0 = p_2(0)$, полученное отображение непрерывно в точке $1/2$ и, значит, во всем отрезке.

$\sim$ Теперь определяем операцию *произведения петель* $q(s) = (q_1 \cdot q_2)(s) = p\lambda^{-1}(s)$.

Эта операция, очевидно, не коммутативна. Она также не ассоциативна, как легко проверить (ср. с определением композиции гомотопий стр.36).

Перейдем к гомотопическим классам.

Мы обозначаем гомотопический класс петли q через $[q]$ и иногда $[q]_{x_0}$.

Если подвергнуть петли $q_1(s)$ и $q_2(s)$ гомотопиям $(q_i)_t(s)$, $i = 1,\ 2$, с сохранением при всех t условия $(q_i)_t(0) = x_0 = (q_i)_t(1)$, то произведение $q(s)$, очевидно, также подвергнется гомотопии q_t (при $0 \le s \le 1/2$ полученной из гомотопии $(q_1)_t$, при $1/2 \le s \le 1$ – из $(q_2)_t$).

Таким образом, при каждом t мы имеем произведение петель $q_t = (q_1)_t \cdot (q_2)_t$.

Мы получили оперцию над гомотопическими классами петель: если петля q есть произведение двух петель, то произведение петель, которые гомотопны сомножителям, гомотопно петеле $q = q_1 \cdot q_2$. Эта операция может быть распространена на (последовательное) произведение любого числа петель и их классов. Для самих петель, как уже сказано, операция явно не ассоциативна: как правило, $q'(r) = (q_1(r) \cdot q_2(r)) \cdot q_3(r) \ne q''(r) = q_1(r) \cdot (q_2(r) \cdot q_3(r))$. Оказывается,

- при переходе к гомотопическим классам операция становится ассоциативной: $(\,[q_1] \cdot [q_2]\,) \cdot [q_3] = [q_1] \cdot (\,[q_2] \cdot [q_3]\,)$.

□ Заметим, что первое произведение совпадает с $q_1(r)$ на отрезке $[0, 1/4]$, с q_2 на $[1/4,\ 1/2]$, с q_3 на $[1/2,\ 1]$; второе произведение соотв. с q_1 на $[0,\ 1/2]$, с q_2 на $[1/2,\ 3/4]$, и с q_3 на $[3/4,\ 1]$.

Введем две гомотопии отрезка $[0,\ 1]$ по себе.

Построим сначала два отображения: $g'(r)$ переводит точки $(0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1)$ соотв. в $(0,\ 1/4,\ 1/2,\ 1)$, а $g''(r)$ точки $(0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1)$ в $(0,\ 1/2,\ 3/4,\ 1)$ и оба линейны на смежных интервалах. Стандартные линейные гомотопии $g'_t(r) = (1-t)r + tg'(r)$ и $g''_t(r) = (1-t)r + tg''(r)$ связывают эти отображения с тождественным отображением отрезка.

Тогда гомотопии $q'_t(r) = q'(g'_t(r))$ и $q''_t(r) = q''(q''_t(r))$ переводят отображения $q'(r)$ и $q''(r)$ в одно и то же отображение $q'(g'(r)) = q''(g''(r))$.

(Рассмотрим, например, отображения на отрезке $[0,\ 1/3]$. Композиция $q'_1 = q'(g'_1)$ переводит этот отрезок сначала посредством g'_1 линейно на $[0, 1/4]$, затем q' отображает $[0, 1/4]$ линейно на $[0, 1]$ и q_1 отправляет его в пространство X. В результате $[0, 1/3]$ сначала линейно отображается на $[0, 1]$, после чего применяется q_1.

С другой стороны, аналогично, отрезок $[0,\ 1/3]$ сначала линейно отображается на $[0, 1/2]$, затем q'_2 линейно отображает его на $[0, 1]$ и применяется q_1. В результате, как и выше, сначала $[0, 1/3]$ линейно отображается на $[0, 1]$ и дальше применяется q_1.) ■

$\sim$ Определим петлю q^{-1}, обратную петле q: $q^{-1}(r) = q(1-r)$.

Хотя произведение петель $q \cdot q^{-1}$ не является постоянным отображением, оно гомотопно постоянному отображению $\mathbb{S}^1 \to x_0$. Гомотопический класс этого постоянного отображения обозначают или 1 или 0 (если получается коммутативная группа). Мы будем пока обозначать его $[x_0]$. Итак,

покажем, что $[q] \cdot [q^{-1}] = [x_0]$.

☐ Построим гомотопию $g_t(r)$, стягивающую отрезок $[0,\, 1]$ в точку 0: $g_t(r) = r$ для $r \in [0,\, 1-t]$ и $g_t(r) = 1-t$ для $r \geq t$.

Рассмотрим гомотопию $h_t(r) = qg_t(r) \cdot (qg_t)^{-1}(r) = qg_t(r) \cdot qg_t(1-r)$.

(Напомню, что r в первом сомножителе меняется от 0 до $1/2$, а во втором от $1/2$ до 1.)

Проверьте, что при каждом t это отображение постоянно равно $q(t)$ на отрезке $t/2 \leq r \leq 1 - t/2$ и при $t = 0$ становится постоянным. ■

Нам нужно еще проверить, что

для любого класса $[q] : [x_0] \cdot [q] = [q] \cdot [x_0] = [q]$.

Доказательство то же, что и предыдущее.

В результате мы видим, что множество $[\mathbb{S}^1,\, X]$ гомотопических классов отображений окружности в постранство X с операцией произведения, определенной выше на представителях, во-первых, не зависит от выбра представителей и, во-вторых, удовлетворяет аксиомам группы:

1. операция ассоциативна,

2. для каждого класса имеется обратный так, что их произведение есть класс постоянного отображения,

3. Произведение каждого класса на постоянный совпадает с этим классом.

Мы будем обозначать класс постоянного отображения 1 (не путать с тождественным отображением $\mathbf{1}$) и называть его *единичным*, или, если нужно подчеркнуть, что группа оказалась коммутативной, обозначать 0 и называть *нулевым* или нулем. Кроме того, не будем использовать точку для обозначения операции (а в коммутативном случае будем использовать знак $+$.

Построенная группа для пространства X называется ***фундаментальной группой*** пространства и обозначается $\pi_1(X)$ или $\pi_1(X,\, x_0)$, чтобы указать отмеченную точку.

Фундаментальная группа называется также *группой Пуанкаре* пространства, Пуанкаре ввел ее в 1905 году.

Свойства фундаментальной группы

1. Каждое непрерывное отображение пространства X с отмеченной точкой x_0 в пространство Y с отмеченной точкой y_0, для которого $f(x_0) = y_0$, порождает гомоморфизм $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$. Этот гомоморфизм не меняется при гомотопной деформации f.

Именно, каждой петле $q(s) : \mathbb{S} \to X$ отвечает петля $fq : \mathbb{S} \to Y$, и так как гомотопия каждого элемента композиции порождает гомотопию самой композиции, ясно, что отображения гомотопные f порождают то же самое отображение $\pi_1(X)$ в $\pi_1(Y)$.

Это отображение есть гомоморфизм, так как произведение петель в X очевидным образом переходит в произведение петель в Y (Проверьте!) и гомотопия петель переходит в гомотопию петель.

Конечно, единичный элемент и обратные элементы переходят в единичный и в обратные.

2. Композиция gf отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ порождает композицию гомоморфизмов $g_* f_*$. Это свойство снова проверяется автоматически на представителях.

3. Так как, кроме того, очевидно, что $\mathbf{1}_*$ есть тождественный изоморфизм группы $\pi_1(X)$, мы получаем важное свойство:

Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные фундаментальные группы.

При этом изоморфизме мы подразумеваем, что все пространства имеют отмеченные точки и при отображениях отмеченные точки переходят в отмеченные. Кроме того, естественно ограничиться рассмотрением линейно связных пространств, т.к. петли с фиксированным началом могут лежать только в одной и той же компоненте линейной связности.

4. Фундаментальные группы пространства X, отвечающие различным отмеченным точкам, изоморфны, хотя этот изоморфизм не определен однозначно.

$\square$ Пусть в X даны две точки x_0 и x_0', соединенные путем $l(t)$, $l(0) = x_0'$, $l(1) = x_0$. Пусть дана петля $\alpha(s)$ с начальной точкой x_0. Поставим ей в соответствие петлю $\alpha'(s)$, являющуюся произведением трех путей: на отрезке $[0, 1/3]$ она совпадает с $l(3s)$, на отрезке $[1/3, 2/3]$ с петлей $\alpha(3s - 1)$ и на отрезке $[2/3, 1]$ с путем l, проходимом в обратном направлении: $l(3 - 3s)$.

Произведению петель $\alpha_1\alpha_2$ отвечает при этом произведение петель $(l\alpha_1 l^{-1} \cdot l\alpha_2 l^{-1})$ (с точностью до гомотопии, которая сократит проходимый в обратных направлениях между двумя петлями путь l). Конечно, стягиваемой петле отвечает стягиваемая петля. Возникает гомоморфизм $\pi_1(X, x_0)\pi_1(X, x_0')$. Но ему отвечает встречный гомоморфизм (с тем же путем l, но проходимым в обратном направлении). Композиция этих двух гомоморфизмов очевидным образом тождественна (с точностью до гомотопии). $\blacksquare$

{Мы построили *естественное* отображение гомотопической категории в категорию групп: объектам отвечают объекты, морфизмам – морфизмы, сохраняется ассоциативность композиций и единичные морфизмы. Такое отображение категории в категорию называется *функтором.* Переход от топологической категории к гомотопической упростил (огрубляя) геометрические построения и рассуждения, переход к теории групп приблизил возможность классификации объектов, замену геометрических построений вычислениями *инвариантов* (например, степень отображения). Дальнейшим шагом являлось введение гомологических групп (которые изучаются в 5 семестре), с переходом к категории абелевых групп (точнее, к их системам), что делает задачу вычислений инвариантов еще более достижимой. С точки зрения теории категорий должен быть сделан еще один шаг – введение *естественных преобразований* функторов. Например, операция коммутирования преобразует фундаментальную группу в одномерную гомологическую.

-=-=-=-

Примеры

A) Первый пример дает нам сама окружность. Мы подсчитали, что $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ – группа целых чисел по сложению.

Однако здесь требуется уточнение. Дело в том, что мы определяли произведение отображений окружности в окружность с помощью операции умножения комплексных чисел. Это не совпадает с операцией, определенной теперь в $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Нам следует убедиться, что для двух отображений f' и f'' гомотопны отображения $f' \cdot f''$ и $f'f''$ (где первое умножение комплексное, а второе – умножение петель).

Будем считать, что окружность параметризована отрезком [0, 1] ($t = \varphi/2\pi$). Мы определим гомотопии f'_t и f''_t, из которых первая переводит f' в отображение, постоянное на отрезке [0, 1/2], а вторая – f'' в отображение, постоянное на отрезке [1/2, 1]. Для полученных отображений комплексное умножение будет совпадать с умножением петлевым.

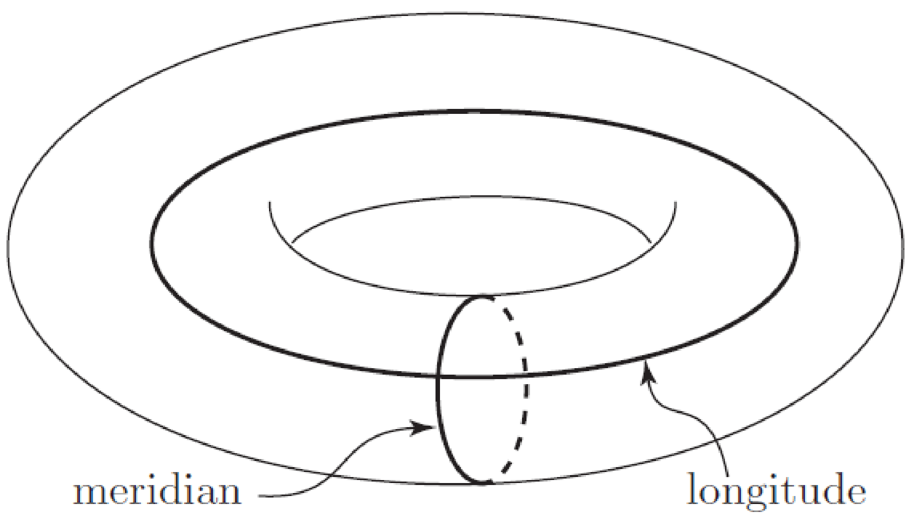
Именно, положим,

$f'_t(x) = f'(\frac{x}{1-t/2})$ для $x \leq 1 - t/2$ и $f'_t(x) = f'(\check{1})$ для $x \geq 1 - t/2$;

$f''_t(x) = f''(\frac{x-1/2}{1-t/2})$ для $x \geq t/2$ и $f'_t(x) = f'(\check{1})$ для $x \leq t/2$.

Проверка оставляется в качестве упражнения.

B) Второй пример есть «квадрат» предыдущего. Прямое произведение окружности на окружность $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ называется *тором*. Обозначим через e_i отображение прямой $\mathbb{R}_i$ на окружность $\mathbb{S}_i$. Тогда мы получим отображение $e = e_1 \times e_2$ плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$ на тор T. При этом отображении в отмеченную точку x_0 (произведение единиц) отобразятся точки с обеими координатами кратными 2π, т.е. $(2k\pi, 2l\pi)$.



Если теперь дана петля $\alpha : \mathbb{S}^1 \to T$, то применяя прием, описанный выше для отображения в окружность («логарифмирование»), мы построим такой путь $\tilde{\alpha}$ в $\mathbb{R}^2$ с началом в x_0, что $\alpha(s) = e(\tilde{\alpha}(s))$. Этот путь будет иметь своим концом одну из точек вида $(2k\pi, 2l\pi)$.

При этом мы получим, как и для окружности, что две петли α_i в T гомотопны (при фиксированном начале) тогда и только тогда, когда их «накрытия» имеют общую конечную точку. С другой стороны нетрудно построить петлю, накрытие которой имеет заданную точку указанного вида (в комплексной форме $e^{2\pi(k\varphi+l\psi)}$).

Решетка точек на плоскости с координатами $(2k\pi, 2l\pi)$ представляет собой коммутативную группу, являющуюся прямой суммой двух групп $\mathbb{Z}$. Это – *свободная коммутативная группа с двумя образующими.*

C) Более общим образом:

- Фундаметальная группа прямого произведения $X = Y \times Z$ пространств Y и Z является прямым произведением фундаментальных групп сомножителей: $\pi_1 X =$

$\pi_1(Y \times Z) = \pi_1 Y \times \pi_1 Z$.

□ Мы считаем, что начальная точка $x_0 \in X$ есть (y_0, z_0), где $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$ начальные точки в сомножителях. Отображение окружности в X порождает с помощью проекций прямого произведения два отображения в сомножители, которые однозначно определяют данное отображение. При этом гомотопии порождают гомотопии очевидным образом, и произведениям путей и петель в сомножителях отвечают произведения в X и обратно. Детали очевидны. ■

D) Фундаментальная группа стягиваемого пространства тривиальна т.е. единичная (или нулевая). Поэтому, например, фундаментальная группа баранки (произведения окружности на диск есть $\mathbb{Z}$).

E) Следующий пример аналогичен первым двум по доказательству, хотя выглядит совсем не похожим. Речь о $\pi_1 \mathbb{P}^n$, где $\mathbb{P}^n$ – проективное пространство. Мы докажем, что $\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$ – группа из двух элементов.

Известно, что $\mathbb{P}^n$ может быть представлено как многообразие прямых, проходящих через начало $\mathbb{O}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

(Рассмотрим плоскость $P = \{x^{n+1} = -1\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Каждой прямой, проходящей через начало, сопоставим или точку пересечения ее с P или связку параллельных ей прямых в P. Это соответствие отождествляет многообразие прямых с проективным пространством, получаемым добавлением бесконечно удаленных точек к обычной плоскости. При этом становится очевидно, что бесконечно удаленные точки имеют такие же окрестности, как обычные: вращением пространства любую прямую можно перевести в любую другую.)

Сфера $\mathbb{S}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ пересекает каждую прямую, проходящую через начало, в двух диаметриально противоположных точках. Поэтому пространство $\mathbb{P}^n$ можно представить себе как сферу, в которой отождествлены точки каждой диаметрально противоположной пары. При этом малая окрестность каждой точки сферы взаимно однозначно отображается на окрестность соответствующей точки $\mathbb{P}^n$ и мы можем считать это соответствие гомеоморфизмом.

Таким образом мы имеем двукратное отображение $e : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, которое не только является локальным гомеоморфизмом, но является *накрытием* в том смысле, что каждая точка в $\mathbb{P}^n$ имеет окрестность U, прообраз которой в $\mathbb{S}^n$ распадается на две области, каждую из которых отображение e гомеоморфно отображает на U.

Заметим, что в этом смысле отображение e рассмотренное выше для отображений окружности в окружность, является накрытием. Мы собираемся действовать по аналогии с этим случаем, отличие от которого только в том, что там точек в прообразе бесконечно много, а здесь две. Но зато аналогия состоит еще в том, что сфера $\mathbb{S}^n$ при n>1, как и прямая, является односвязным пространством (см. стр. **??**): отображения окружности в это пространство гомотопны постоянным.

□ Мы собираемся решать задачу представления отображения окружности в $\mathbb{P}^n$ в виде композиции e и отображения $\tilde{f}$ окружности в сферу $\mathbb{S}^n$: $f = e\tilde{f}$.

Пространство $\mathbb{P}^n$ компактно, как непрерывный образ компактной сферы. Покроем $\mathbb{P}^n$ конечным числом малых шаров D_i, для каждого из которых прообраз состоит из двух шаров D_i' и D_i'', $e^{-1}(D_i) = D_i' \cup D_i''$, гомеоморфно отображающихся на D_i.

Пусть дано отображение $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^n$, сохраняющее начало, за которое в $\mathbb{P}^n$ примем образ z_0 южного полюса Z сферы. В силу равномерной непрерывности, окружность можно разбить в последовательность малых дуг l_j, $0 \le j \le K$, каждую из которых e переводит в некоторый диск D_i.

Далее мы поступаем, как в разделе об отображениях $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{S}^1$. Начнем с того, что начальную точку $1 \in \mathbb{S}^1$ отобразим в Z: $\tilde{f}(1)$ =Z. Начальный отрезок l_0 f отображает в некоторый диск D_{j_0}. На него e гомеоморфно отображает диски D'_{j_0} и D''_{j_0}. Возьмем из них тот, который содержит Z, допустим, это D'_{j_0}, и в качестве $\tilde{f} : l_0 \to D'_{j_0}$ возьмем композицию $e^{-1}f|_{l_{j_0}}$.

Это построение мы можем продолжать индуктивно, как и в случае отображений $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{S}^1$, вплоть до финального отрезка l_K. Последняя его точка, снова 1$\in \mathbb{S}^1$, будет отображена в одну из двух точек диаметрально противоположных точек – либо Z, либо N.

Таким образом, множество всех петель в $\mathbb{P}^n$ распадается на два подмножества: тех, которые поднимаются в петли в $\mathbb{S}^n$, и тех, прообразы которых в $\mathbb{S}^n$ разрываются – их концы лежат в разных «полюсах».

Теперь мы используем односвязность сферы. Петли с началом в Z гомотопны нулю. Иными словами, отображение окружности продолжается до отображения двумерного диска и с помощью этого диска легко получить гомотопию петли в Z, при которой точка Z остается неподвижной.

С другой стороны, две дуги p_1 и p_2 с общими концами Z и N в $\mathbb{S}^n$, построенные для двух петель f_1 и f_2 в $\mathbb{P}^n$, вместе образуют петлю $p_{j'}^{-1}p_j$ (произведение путей) в $\mathbb{S}^n$. Такая петля также гомотопна нулю, и с помощью диска, по которому проходит ее стягивание, строится гомотопия одной дуги в другую с неподвижными концами.

Накрытие e переводит эту гомотопию в гомотопию между петлями f_1 и f_2 в $\mathbb{P}^n$.

В результате оказывается, что петли в каждом из двух классов, на которые было разбито множество петель в $\mathbb{P}^n$, гомотопны между собой. Таким образом, имеется всего два элемента в $\pi_1(\mathbb{P}^n)$: тривиальный (нулевой) и нетривиальный, получаемый как образ меридиана при отображении e. Имеется всего одна группа из двух элементов, так что $\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$. ■

-=-=-=-

Фундаментальные группы графов.

$\sim$ Одномерные полиэдры называются *графами.*

Мы хотим научиться вычислять фундаментальные группы графов.

Триангуляция графа состоит из вершин и ребер. Каждое ребро соединяет две вершины, каждая вершина является концевой для некоторого количества ребер. Мы примем, что это количество конечно, хотя может быть разным для разных вершин.

$\sim$ Мы назовем вершину, служащую концом только одного ребра, *оконечной* вершиной графа.

Если имеются две триангуляции T_1, T_2 графа Г, то, объявив вершинами новой триангуляции T все вершины обеих этих триангуляций, мы разобъем каждое ребро одной из старых трангуляций вершинами другой триангуляции и получим ребра T. Каждое ребро триангуляции T есть пересечение какого-то ребра T_1 с каким-то ребром T_2. Если его обе вершины принадлежат T_1, то это – ребро T_1, целиком лежащее в ребре T_2, и наоборот. Если же вершины ребра принадлежат одно T_1, другое T_2, то оно есть часть ребра T_1 и одновременно часть ребра T_2.

Таким образом, две триангуляции имеют общее подразделение.

Если v – вершина графа Г, служащая концом ровно для двух ребер, скажем, $\overline{u_1\, v}$ и $\overline{v,\, u_2}$, то заменяя эту пару ребер одним ребром $\overline{u_1,\, u_2}$, мы получим гомеоморфный полиэдр (т.к. пара $\overline{u_1\, v} \cup \overline{v,\, u_2}$ гомеоморфна отрезку $\overline{u_1,\, u_2}$ при гомеоморфизме неподвижном в концах u_1, u_2, так что гомеоморфизм можно взять неподвижным на остальной части графа).

Так как нас интересеует фундаментальная группа графа, мы интересуемся пространствами лишь с точностью до гомотопического типа.

Во всяком случае мы имеем право заменить полиэдр на гомеоморфный. При этом нас не интересует сейчас важный вопрос о вложимости абстрактно заданного комплекса как геометрического комплекса в евклидовом пространстве, в частности, вопрос, можно ли произвести замену двух ребер на одно, оставаясь в том же пространстве.

(Например, это, очевидно, не всегда можно сделать в плоскости. Впрочем, если граф конечен, мы можем взять в евклидовом пространстве достаточно большой размерности точки во взаимно однозначном соответствии с вершинами графа, привести их в общее положение и безболезненно соединять любую вершину графа ребром с любой другой.)

Итерируем описанную операцию, начав с графа Γ и применяя ее к получающимся новым графам. Так как на каждом шаге уменьшается число вершин и ребер, процесс приведет к графу, у которого нет вершин, соединяющих только два ребра.

Дальше будем упрощать полиэдр, оставаясь в пределах гомотопического типа (сохраняя обозначение Γ). Более того, мы не будем говорить о триангуляциях, будем рассматривать ребра как дуги. (Но Γ будет по-прежнему полиэдром, возможность триангулирования остается.)

Если имеется ребро $l=[u,v]$ с оконечной вершиной v, то стягивание этого ребра по себе к вершине u, даст граф, очевидно, ему гомотопически эквивалентный, у которого число вершин и ребер уменьшится на 1.

Устраним таким образом все оконечные вершины.

Пусть l ребро с вершинами a, b и средней точкой c. Отбросим l и отождествим a и b. Мы получим полиэдр $\Gamma' = (\Gamma\setminus l)\cup \bar c$ и отображение $r:\Gamma\to\Gamma'$, переводящее l с его концами в точку $\bar c$ и тождественное на остальной части Γ.

Отображение r есть гомотопическая эквивалентность.

$\square$ Построим отображение $g:\Gamma'\to\Gamma$ гомотопически обратное r. Для вершины a и ребра l_{ai}, с вершинами a и a_i, отличного от l, пусть $\bar l_{ai}$ соответствующее ребро Γ' с вершинами $\bar c$ и $\bar a_i$. Пусть $\bar d_{ai}$ середина ребра $\bar l_{ai}$. Положим: $g|_{\bar l_{ai}}$ гомеоморфно отображает отрезок $[\bar a_i,\bar d_{ai}]$ на l_{ai}, $g(\bar a_i)=a_i$, $g(\bar d_{ai})=a$, и отрезок $[\bar d_{ai},\,\bar c]$ на $[a,\,c]$, $g(\bar c)=c$. Аналогично со стороны точки b с заменой в обозначениях a на b.

Композиция $rg:\Gamma'\to\Gamma'$ тождественна вне звезды вершины $\bar c$, а каждое ребро $\bar l_{ia}$ и каждое $\bar l_{ib}$ переводит в себя с неподвижными концами. Ясно, что эта композиция гомотопна тождеству, при линейной гомотопии на ребрах.

Рассмотрим композицию $gr:\Gamma\to\Gamma$. Она переводит ребро l в c и гомотопна тождеству на этом ребре при линейной гомотопии. Каждое ребро l_{ai} переходит в пару отрезков $[a_i,\,a]\cup[a,\,c]$. На отрезке $[a_i,\,d_{ai}]$ композиция гомотопна тождеству при линейной гомотопии.

На отрезке $[d_{ai},a]$, который переходит в, вообще говоря, не параллельный ему отрезок $[a,\,c]$, гомотопию в тождество также можно представить линейной.

Именно, отобразим гомеоморфизмом h пару $[d_{ai},a]\cup[a,\,c]$ на отрезок $[0,\,1]$, $h(a)=1/2$, он переведет гомеоморфизм $gr|_{[d_{ai},a]}$ в $h(gr)h^{-1}:[0,\,1/2]\to[1/2,\,1]$. Линейная гомотопия q_t пееводит его в тождество на $[0,\,1/2]$ и гомотопия $h^{-1}q_th$ переводит $gr|_{[d_{ai},a]}$ в тождество.

Построенные гомотопии согласованы в общих точках a и d_{ai}. ■

$\sim$ Каждое стягивание ребра уменьшает число вершин и ребер на единицу. Заметим, что при этом разность числа вершин и числа ребер остается неизменной.

Эта разность называется *эйлеровой характеристикой* графа, обозначается $\chi(\Gamma)$ и является гомотопическим инвариантом, т.е. для всех пространств гомотопически эквивалентных Γ она одна и та же.

(Правда для более общих пространств, не разбитых на симплексы ее надо определять с помощью других инвариантов. В полной общности это здесь не доказывается. Мы доказали это только в области графов.)

В результате последовательных устранений ребер с оконечными вершинами и ребер, соединяющих разные вершины, мы придем к (топологическому) графу, имеющему одну вершину и некоторое число ($= 1 - \chi$) ребер. Поскольку вершины ребра склеены, оно представляет собойокружность.

В результате мы свели задачу подсчета фундаментальной окружности графа к графу, состоящему из некоторого числа k окружностей имеющих одну общую точку.

Если $k = 0$, т.е. граф свелся к одной вершине, исходный граф окаался стягиваемым.

Стягиваемый граф называется *деревом.*

Другое определение дерева – связный граф без циклов. Циклом в графе называется цепочка ребер, в которой начальная и конечная вершины совпадают.

Число циклов не меняется при наших преобрахованиях графа. Оно, следовательно, равно числу получившихся в конечном результате окружностей и,следовательно, на единицу больше взятой по модулю эйлеровой характеристиуи.

$\approx$ Пусть далее Γ состоит из k окружностей с общей точкой a.

Мы вычислим $\pi_1(\Gamma)$, используя тот же прием, что и выше: пытаясь поднять данную петлю $f : \mathbb{S}^1 \to \Gamma$ в отображение $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \widetilde{\Gamma}$, так, чтобы $f = e\tilde{f}$, где $\widetilde{\Gamma}$ и e имеют те же нужные свойства, что были в предыдущих примерах у прямой, плоскости, сферы вместе с соответствующими отображениями e. Это значит, что $\widetilde{\Gamma}$ должно быть односвязным, давать возможность строить линейные гомотопии, и при этом прообраз каждой малой окрестности U в Γ распадался бы в дизъюнктную систему окрестностей гомеоморфно отображающихся на U.

Для простоты мы рассмотрим случай $k = 2$.

Пусть $\Gamma = S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2 = a$ (граф - "восьмерка"). Ориентируем обе окружности (зададим направление обхода). Тогда связная малая окрестность $U(a)$ состоит из четырех полуинтервалов, которые мы обозначим s_1, s_2 и s_1', s_2', где s_1, s_2 имеют положительные ориентации ("выходят" из a), а s_1', s_2' отрицательные ("входят в a").

Теперь мы построим индуктивно бесконечный граф $\tilde{\Gamma}$ без оконечных точек и отображение e.

Начнем с того, что возьмем граф Q, состоящий из четырех отрезков l_1, l_2, l_1', l_2' с одной общей вершиной A, назовем его *крестом* и отобразим соответственно обозначениям эти ребра (гомеоморфно на внутренности) на окружности S_1 и S_2 с учетом ориентации (обхода).

Далее возьмем одну из оконечных точек Q (допустим, ребра l_1) и еще один экземпляр креста Q' и отождествим ребро l_1 первого экземпляра с ребром l_1' второго (оконечную точку первого с A' второго). Проделаем такую же операцию с каждым из трех оставшихся ребер и затем перейдем к оконечным точкам нового получившегося графа.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы и построим требуемый бесконечный граф $\tilde{\Gamma}$ и отображение e. Каждая вершина отображается в a, каждое ребро на одну из окружностей S_i с определенным направлением обхода. Начальную вершину в Γ мы продолжаем обозначать A, остальные перенумеруем и обозначим A_i.

Заметим, что каждой вершине A_i отвечает число подклеек крестов, нужных для ее получения, назовем его рангом A_i и обозначим $n(A_i)$. Для A_i однозначно определена вершина A_j, к звезде которой на некотором шаге построения была "прикреплена" звезда A_i. (Ранг A равен нулю, а ранг остальных вершин Q – 1.)

Это значит, что для каждой вершины A_i имеется единственный путь, являющийся цепочкой ребер в числе $n(A_i)$, в которой соседние имеют общую вершину, соединяющий A_i с A. (Если бы было два пути, то на каком-то шаге новая звезда была присоединена сразу к двум старым.) Каждый такой путь однозначно описывается последовательностью, состоящей из знаков l_1, l_2, l_1', l_2' (как говорится, «в этом алфавите»).

Таким образом имеется взаимно однозначное соответствие между вершинами графа $\widetilde{\Gamma}$ и конечными цепочками букв из этого алфавита, с единственным условием, чтобы рядом не стояли l_1 и l_1' и также l_2 и l_2' ("возвраты").

Граф $\widetilde{\Gamma}$ односвязен.

$\square$ Пусть дано отображение $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \widetilde{\Gamma}$, переводящее начальную точку окружности в A. Пусть $u = [x, y] \subset \mathbb{S}^1$ дуга, для которой $\alpha(u)$ лежит в некотором ребре l_j, причем $e(x) = A = e(y)$. тогда имеется линейная гомотопия по l_j, которая либо весь образ $\alpha(u)$ гомотопирует в одну вершину l_j, либо в гомеоморфизм u на l_j.

В силу компактности и равномерной непрерывности длины таких отрезков стремятся к нулю, и мы получим в пределе разбиение $\mathbb{S}^1$ на конечное число отрезков, некоторые из которых целиком отображаются в вершины $\widetilde{\Gamma}$, а другие линейно гомеоморфно отображаются на ребра. С помощью дополнительной гомотопии можно устранить отрезки первого вида, т.е. добиться, чтобы $\mathbb{S}^1$ была разбита на дуги, отображающиеся последовательно линейно на ребра $\widetilde{\Gamma}$. Мы продолжаем обозначать прогомотопированную петлю α.

Для каждого ребра $l \subset \widetilde{\Gamma}$ имеется направление "от A к бесконечности", совпадающее с направлением построения Γ (увеличение ранга вершины на единицу). Пусть имеется в образе петли ребро, за которым в порядке обхода $\mathbb{S}^1$ следует ребро в направлении к бесконечности. Тогда следующее ребро будет либо также в направлении к бесконечности, либо будет возвратом по тому же самому ребру. Такие возвраты (т.е. ребра, которое проходятся сначала к бесконечности и вслед за тем обратно к A) гомотопируются в вершину ребра. Имеется максимальный по рангу возврат. Устранив его гомотопией, мы уменьшим число проходов по ребрам. Через конечное число этих шагов возвратов не будет.

Устранив возвраты, мы одновременно устраним и движение к бесконечности. Но мы предположили, что образ начальной точки есть A, а отображение не может выйти из A без продвижения к бесконечности. Следовательно, мы прогомотопировали наше отображение в постоянное и, значит, $\widetilde{\Gamma}$ односвязно. $\blacksquare$

Приступим теперь к вычислению $\pi_1\Gamma$.

Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \Gamma$ данная петля в Γ. Открытые звезды вершин $\widetilde{\Gamma}$ отображаются на Γ непрерывно и взаимно однозначно, а их образы при гомотетии с коэффициентом $1 - \varepsilon$ с малым ε гомеоморфно. Поэтому мы можем действовать в точности так, как в предыдущих примерах.

В результате мы получим отображение $\tilde{f}$, для которого $f = e\tilde{f}$, причем образ есть путь в $\widetilde{\Gamma}$, соединяющий A с какой-то вершиной A_i.

Рассуждая, как выше, мы получим, что наш путь гомотопируется в путь, состоящий из последовательности ребер без возвратов, т.е. в ломаную без самопересечений, соединяющую A и A_i.

В таком случае элементы группы $\pi_1(\Gamma)$ взаимно однозначно соответствуют с одной стороны вершинам графа Γ, а с другой, как мы показали, конечным словам, составленным в алфавите l_1, l_2, l_1', l_2' без возвратов.

Заметим, что l_1 отвечает однократному обходу окружности S_1, т.е. образующей ее фундаментальной группы α_1, l_1' обходу этой же окружности в противоположном направлении, т.е. элементу α^{-1} (наша группа явно не коммутативна, и мы используем мультипликативную запись). Аналогично мы заменяем l_2 и l_2' на β и β^{-1}. Итак, мы получили группу с двумя групповыми образующими α и β, элементы которой произвольные конечные слова в этих образующих, в которых не стоят рядом α и α^{-1} и β и β^{-1} (иначе они сократятся.)

Эта группа называется свободной группой с двумя образующими.

Эта группа является также примером свободного произведения двух групп, в данном случае двух групп $\mathbb{Z}$: в ней нет соотношений, в которые входили бы элементы и одной и другой группы (в ней нет вообще никаких соотношений, кроме тривиальных $\gamma\gamma^{-1} = 1$).

Аналогично определяется свободная группа с любым числом образующих.

-=-=-=-=-=-

15. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ТЕОРИЯ ГРУПП.

-=-=-=-

Дискретные группы

Имеются две очень разные области математики, которые охватываются понятием группы, определяемым тремя простыми аксиомами.

С ождной стороны это *непрерывные группы*, как, например, группы матриц (группа невырожденных матриц, ортогональная группа, группа матриц с определителем 1 и много других). В этих группах, кроме групповых операций – произведения и взятия обратного – введена топология, причем так, что групповые операции непрерывны в этой топологии. Особое место среди этих групп занимают *группы Ли* (по имени норвежского математика), в них точки имеют окрестности гомеоморфные областям евклидова пространства и операции задаюся гладкими функциями.

С другой стороны рассматриваются дискретные группы, в которых операция задается с помощью системы *образующих* элементов и *определяющих соотношений*. Нас будут интересовать сейчас дискретные группы с конечным числом образующих и соотношений, они называются конечно определенными.

(Промежуточное положение занимают такие группы, как, например, канторово множество – прямая сумма счетного числа групп $\mathbb{Z}_2$.)

Конечно определенные группы

Пусть дано некоторое количество k символов ("букв"), которые мы обозначим a_i, $1 \le i \le k$. Добавим к ним еще символы a^{-1} и символ 1 и будем рассматриваь "слова" в алфавите из этих букв. Два слова назовем взаимнообратными, если одно получается из другого заменой букв на обратные и заменой порядка букв в слове на обратный.

Пусть во множестве всех слов фиксировано конечное число l слов r_j, $1 \le j \le l$, которые мы будем называть определяющими соотношениями или просто соотнршениями. Добавим к ним *тривиальные соотношения* $a_i a_i^{-1}$ и еще 1.

Введем отношение эквивалентности во множество слов: два слова называются эквивалентными, если одно получается из другого конечной последовательностью *вставок* (между любыми соседними буквами или в конце, или в начале) каких-либо определяющих соотношений или устранений (заменой определяющего соотношения единицей) или устранением 1, если, кроме 1, в слове имеются другие буквы. Соотношение r обычно записывают в форме $r = 1$.

То, что это отношение есть эквивалентность, очевидно. Обозначим множество классов эквивалентности через G. *Единицей* в G назовем класс, содержащий 1 и сохраним обозначение 1. Взаимнообратными назовем классы, если они содержат взаимнообратные слова. В G введем операцию "приставки" (angl. concatenation) для слов A, B слово AB получаеся продолжением слова A словом B. Ясно, что замена слова A эквивалентным словом A′ и B эквивалентным B′ приведет к слову A′B′ эквивалентному AB. Значит, мы получили операцию в множестве G.

Покажем, что эта операция удовлетворяет аксиомам группы. Доказательство можно вести на представителях.

1. Ассоциативность (AB)C=A(BC) очевидна: после устранения скобок слева и справа получится то же самое выражение.
2. Свойство 1: 1A=A1=A прямо следует из определения эквивалентности слов.
3. Произведение взаимнообратных классов есть класс, содержащий произведение взаимнообратных слов, которое есть 1 в силу тривиальных соотношений.

Итак, G есть группа.

Заметим, что при гомоморфизме G в какую-либо группу H для каждого соотношения в G образы образующих будут удовлетворять аналогичному соотношеию в H.

Примеры.

Простейший пример – тривиальная или единичная группа, состоящая из одного элемента.

Группа называется *коммутативной* (или абелевой), если в ней выполнено соотношение $ab = ba$ (т.е. $aba^{-1}b^{-1} = 1$). Достаточно потребовать, чтобы ему удовлетворяли образующие.

Группа целых чисел по умножению коммутативна.

Группа целых чисел по любому модулю m коммутативна по сложению, а по простому модулю p с исключенным нулем – по умножению.

Свободная группа. Так называется группа, в которой нет других соотношений, кромме тривиальных.

В этой группе нетрудно указаь алгоритм, определяющий равенство двух элементов или, что то же самое – равенство элемента единице. Именно, в данном представителе нужно устранить все пары вида aa^{-1}.

Доказательство несложно провести напрямую, но, кроме того, оно следует из вычисления, проведенного выше, фундаментальной группы букета окружностей. Мы показали, что эта группа свободна, т.е. не имеет соотношений (соотношение означает петлю, гомотопную нулю, но мы показали, что всякая петля гомотопируется в начальную точку с помощью устранения возвратов, т.е. с помощью тривиальных соотношений).

Итак, свободная группа с k образующими состоит из слов в алфавите из a_j, a_j^{-1}, $1 \leq j \leq k$, в которых отсутствуют взаимнообратные соседи.

Векторная группа – группа по сложению векторов вещественного или комплексного линейного пространства, конечно или бесконечномерного – не является дискретной, хотя в ней и можно ввести групповые образующие, мощность множества которых континуальна и относительно которых она свободна.

В частности, группы вещественных и комплексных чисел коммутативны и по сложению и (с исключенным нулем) по умножению, а кватернионов по сложению.

Беря в векторном пространстве целочисленные комбинации базисных векторов, мы получим *целочисленную решетку*, которая является свободной абелевой группой, в которой кроме тривиальных имеются еще только соотношения коммутативности. Мы встретились с такой группой с двумя образующими, вычислив фундаментальную группу тора.

Группа рациональных чисел, рассматриваемая как дискретная, по сложению имеет довольно сложное описание, а по умножению является свободной абклквой с бесконечным числом образующих (простыми числами).

Произведения групп.

Прямое произведение $G\times H$ имеет в качестве образующих пары $(a_i,\, b_j)$, где a_i образующие в G, а b_j – в H. Соотношения в $G\times H$ также являются парами соотношений из G и из H, т.е. они независимо могут применяться покоординатно.

Прямая сумма бесконечных циклических групп есть свободная абелева группа, число образующих в ней равно числу сомножителей.

Прямое произведение конечных циклических групп может быть циклической группой (если моджули взаимно просты), но $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\neq\mathbb{Z}_4$.

Свободное произведение. Эта операция двойственна операции прямого произведения в категорном смысле (т.е.в определении нужно изменить направления стрелок на обратные).

Группа G, обозначаемая $P{*}Q$, называется *свободным произведением* групп P и Q, если фиксированы гомоморфизмы $p: P\to G$ и $q: Q\to G$ так, что для любой группы R с гомоморфизмами $\bar p: P\to D$ и $\bar q: Q\to D$ имеется единственный гомоморфизм $r: G\to D$ так, что $\bar p = rp$, $\bar q = rq$.

Из этого определения легко вывести, что имеются “односторонние обратные” гомоморфизмы для p и q, так что эти гомоморфизмы оказываются мономорфизмами.

На языке образующих и соотношений группа $P*Q$ строится как группа, образующие и соотношения которой суть все образующие и соотношения групп-сомножителей. В частности, нет соотношений между образующими, которые бы не сводились к 1 с помощью только имеющихся соотношений в данных двух группах.

В частности, свободное произведение бесконечных циклических групп есть свободная группа.

Свободное произведение двух групп $\mathbb{Z}_2$ – это группа взаимных отражений двух зеркал, стояших друг проотив друга.

Теорема ван Кампена – Зейферта (без доказательства)

Пока у нас был один способ вычисления фундаментальных групп –построение односвязных накрывающих пространств (односвязные накрывающие называются универсальными).

Следующая теоорема,которая пр водится здесь без доказательства, позволяет вычислять фундаменальную группу, разбивая данное пространство на части, для которых это вычисление проводится легче или уже известно. За подробным доказательством отошлем к книгам Л.В. Келдыш Топологические вложения в евклидово пространство. Труды МИАН т.81 (1966) или ....

Теорема. *Пусть связное пространство* X *представлено как объединение двух открытых подмножеств* $X = X_1\cup X_2$, *причем пространства* X, X_1, X_2, $X_1\cap X_2$

линейно связны. Тогда фундамнтальная группа $\pi_1 X$ получается из свободного произведения $\pi_1 X_1 * \pi_2 X_2$ приравниванием любых двух классов $\alpha \in \pi_1 X_1$ и $\beta \in \text{ß}_1 X_2$ в случае, если оба класса содержат одну и ту же петлю в $X_1 \cap X_2$.

На языке образующих и соотношений это означает, что помимо образующих и соотношений обеих групп $\pi_1 X_1$ и $\pi_1 X_2$ задание группы $\pi_1 X$ имеет еще соотношения, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с образующими группы $\pi_1 X_1 \cap X_2$: каждой такой образующей c отвечает соотношение, полученное приравниванием выражений c в каждой из групп $\pi_1 X_1$ и $\pi_1 X_2$.

Простейший пример применения этой теоремы – вычисление группы $\pi_1 \mathbb{S}^n$, $n \geq 2$: сфера есть объединение двух открытых множеств гомеоморфных $\mathbb{R}^n$: дополнений к полюсам. Их фундаментальные группы тривиальны (т.к. $\mathbb{R}^n$ стягиваемо). Их свободное произведение также есть единичная группа, и добавление соотношений не изменит этого факта. Таким образом, $\pi_1 \mathbb{S}^n = 1$. Это рассуждение не применимо к $\pi_1 \mathbb{S}^1$, т.к. пересечение слагаемых в этом случае не связно.

Фундаментальная группа двух связных и локально линейно связных пространств, имеющих общую точку, есть свободное произведение фундаментальных групп слагаемых. Чтобы формально использовать теорему, удобно допустить, что общая точка в X имеет стягиваемую окрестность. Добавляя ее к слагаемым, мы получим открытые подмножества, не изменив фундаментальные группы, Так как фундаментальная группа пересечения единичная, соотношения от образующих группы пересечения не добавляются и получается свободное произведение фундаментальных групп слагаемых.

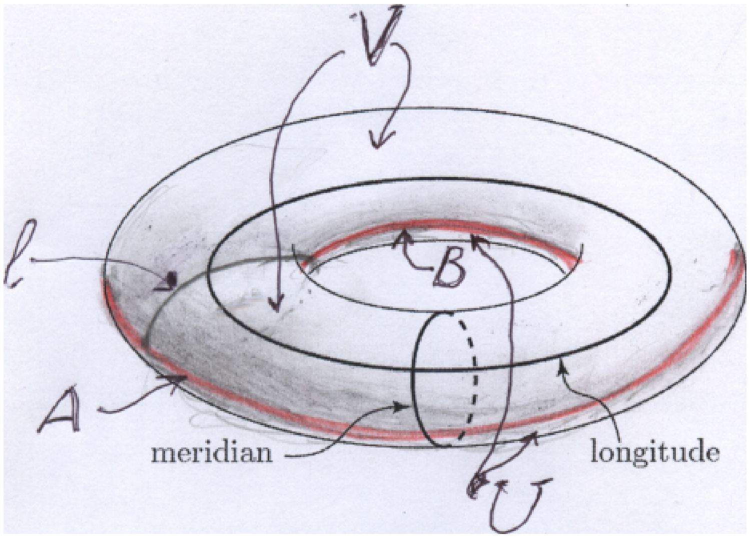
В частности, мы снова получаем, что фундаментальная группа букета окружностей есть сввободное произведение бесконечных циклических групп.

Фундаментальная группа тора $\mathbf{T}$

Теперь решим задачу немного посложнее: посчитаем с помощью теоремы ван Кампена группу тора (она посчитана нами уже два раза – это прямое произведение двух групп $\mathbb{Z}$).

Тор $\mathbf{T}$ есть поверхность баранки. Разрежем баранку горизонтальной плоскостью и рассмотрим отдельно две половины U и V поверхности $\mathbf{T}$. Каждая гомеоморфна кольцу (произведение окружности на отрезок) и, значчит, деформируется по себе в окружность. Это значит, что фундаментальная группа каждой половины есть $\mathbb{Z}$. Однако пересечение их состоит из двух окружностей, т.е. не связно. Чтобы использовать теорему, исправим положение следующим образом. Во-первых, возьмем начальную точку a на общей большой окружности A. Во-вторых, обозначим α образующую фундаментальной группы нижней половины U и β верхней половины V. Обе эти образующие представлены петлей, обходящей большую окружность A пересечения в положительном направлении (против часовой стрелки, если смотреть сверху). Ясно, что мы сразу имеем (по теореме) соотношение $\alpha = \beta$.

Теперь, для того, чтобы пересечение стало связным, добавим к нижней половине дугу l, которая по верхней половине соединяет точку a с точкой b на меньшей окружности B пересечения.



Верхняя половина не меняется, а у нижней увеличится фундаментальная группа. При деформации половины A тора по себе в окружность дуга l также превратится в окружность и мы получим букет двух окружностей, т.е. получим свободную группу с двумя образующими. Первая образующая старая α, вторую обозначим γ. Она представлена петлей, которая состоит из дуги l и дуги l', которая соединяет точки a и b в A.

Итак, у нас уже есть две образующие α, γ группы $\pi_1\mathbf{T}$. Теперь нужно найти образующие пересечения. Оно состоит из двух окружностей A и B и дуги l. Так как дугга стягиваема, мы получаем снова букет двух оокружностей и свободную группу с двумя образующими. Одна из них представлена обходом большой окружности, т.е. есть α. Вторая идет по дуге l, обходит в положительном направлении окружность B и возвращается по l, проходя ее в обратном направлении. Первая образующая дает нам соотношение, уже нами рассмотренное: $\alpha = \beta$. Рассмотрим второе.

Петля lBl^{-1} на верхней половине V, очевидно, представляет β, т.е. α в группе тора. Прогомотопируем эту петлю по нижней половине $A \cup l$ (делая тривиальные вставки) в петлю, записанную как произведение путей следующим образом: $lBl^{-1} \simeq l(l')-1l'B(l')^{-1}l'l^{-1}$. Первые два сомножителя дают петлю, представляющую γ, следующие три представляют $\beta = \alpha$ и последние два – γ^{-1}.

В таком случае мы получаем соотношение $\alpha = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ или $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, или $\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} = 1$. Последнее выражение называется коммутатором двух элементов α и γ и обозначается $[\alpha, \gamma]$.

Итак, мы снова получили результат, который уже был посчитан два раза: фундаментальная группа тора есть свободная абелева группа с двумя образующими. В качестве образующих мможно взять петли, представляющие меридиан и параллель тора.

Фундаментальная группа поверхности кренделя.

Крендель К это двойной тор. Он получается так: в каждом из двух торов берется небольшой диск, внутренняя часть которого выкидывается. Затем границы этих дисков, которые служат также границами оставшихся поверхностей T_1 и T_2 естественным образом отождествляются. Склеенные границы образуют на получившемся кренделе окружность C, которую можно назвать горловиной К.

Мы снова можем считать, что представив К объединением $T_1 \cup T_2$ с пересечением C, мы можем применить теорему ван Кампена (C имеет в К окрестность, которая на нее деформируется по себе).

Тор без диска деформируется на пару окружностей. Это проще всего увидеть, представив тор в виде квадрата, в котором склеены пары противолежащих ребер. Диск, который выкидывается лежит внутри квадрата (мы можем считать, что на торе он не пересекает ни меридиана, ни параллели). В таком случае имеется очевидная радиальная гомотопия, которая деформирует оставшуюся часть квадрата на границу, что и дает требуемую гомотопию тора без диска на две окружности, получаемые из границы квадрата.

Итак, каждое слагаемое имеет две свободные образующие, скажем α_i, β_i, и группа кренделя получает 4 образующие, а соотношение получается только из единственной образующей пересечения, которую обозначим γ.

Нам нужно выяснить, как петля, полученная обходом окружности C выражается в каждом слагаемом T_i.

Для этого снова обратимся к квадрату, из которого вырезан диск. Теперь посмотрим в какую петлю при описанной выше деформации переходит C. Очевидно это – однократный обход границы квадрата. Но этот обход состоит из четырех отрезков, каждый из которых однократно обходит либо меридиан, либо параллель тора. Мы получаем, что обход C представляет в T_1 элемент $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. В T_2 ситуация аналогичная. Поэтому получаем: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} = \beta_2\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2^{-1} = 1$ или $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} = 1$ или $[\alpha_1\beta_1][\alpha_2\beta_2] = 1$ – единственное нетривиальное соотношение в группе кренделя.

Крендель рода g

Теперь мы можем посчитать фундаментальную группу кренделя K_g рода g. Это поверхность, получаемая последовательной склейкой g торов с выброшенными дисками, которую для индуктиного рассуждения лучше представить как результат приклейки тора с дыркой к кренделю рода $g-1$ с дыркой.

Чтобы буквально повторить проведенное рассуждение, нужно представить крендель ввиде многоугольника с 4g сторонами, где каждая последовательная четверка обозначена $a_ib_i(a_i)^{-1}(b_i)^{-1}$. Это нетрудно сделать с помощью элементарных разрезов и склеек, но мы не будем этим здесь заниматься, указав немного ниже, где можно найти систематическое изложние топологии поверхностей.

Укажем только окончательный результат: $\pi_1\mathrm{K}_g$ есть группа с $2g$ образующими α_i, β_i и одним соотношением $[\alpha_1\beta_1]\dots[\alpha_g\beta_g] = 1$.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

{Сопоставление классу пространств одного гомотопического типа фундаментальной группы является примером *функтора* – перехода из одной категории в другую. При этом также и морфизмам сопоставляются морфизмы (с сохранением композиций и единичного морфизма). В данном случае гомотопным отображениям сопоставляется гомоморфизм фундаментальных групп.

Важность такого перехода состоит в огрубляющем упрощении свойств исходной категории, что позволяет пренебречь деталями, несущественными в тех или иных задачах, и сделать более явными нужные свойства. Последовательные такие переходы направлены обычно к тому, чтобы заменить геометрические рассуждения вычислением инвариантов (чисел, многочленов, простых групп и проч.).

В частности, это позволяет провести классификацию с нужной точки зрения объектов данной категории. Скажем, в топологии важен вопрос о гомеоморфизме. Например, оставаясь в рамках собственно топологии, непросто выяснить, гомеоморфны или нет те поверхности кренделя, о которых мы только что говорили. Функтор фундаментальной группы переводит этот вопрос в проблему изоморфизма групп. В общем виде эта задача в категории групп неразрешима – показано, что не существует общего алгоритма для установления изоморфизма двух групп, заданных наборами образующих и

соотношений. Однако, например, в случае групп поверхностей мы можем сделать еще один шаг – перейти в категорию коммутативных групп, добавив к полученному соотношению соотношения коммутирования (применив *функтор коммутирования*). Так как данное соотношение есть произведение коммутаторов, оно автоматически выполнено вследствие добавленных соотношений (приводится к виду 1=1). Значит, полученная этой операцией – коммутированием – группа есть свободная абелева группа, а для этих групп число образующих есть инвариант (подобно размерности для векторного пространства) и, следовательно, полученные фундаментальные группы не изоморфны, а наши "объекты" – поверхности кренделей – гомотопически не эквивалентны, тем более не гомеоморфны.}

-=-

Содержание

ЧАСТЬ 1. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ЧАСТЬ 2. ГОМОТОПИИ. ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА. КОМПЛЕКСЫ И ПОЛИЭДРЫ В $\mathbb{R}^n$.

ЧАСТЬ 3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

-=-=-=-=-=-