Вопросы к экзамену по курсу «Введение в топологию»
Осенний семестр 2013–2014 г.
Лектор проф. И.А.Дынников

1. Опредление топологического пространства. Примеры топологий: тривиальная, дискретная, метрическая (в частности, в евклидовом пространстве), Зариского (на прямой). Гомеоморфизм топологических пространств.
2. Замкнутые множества. Определение топологии с помощью замкнутых множеств. Внутренние, внешние, предельные, изолированные точки подмножества, точки соприкосновения. Замыкание, внутренность и граница подмножества топологического пространства. Предельные точки и пределы последовательностей. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
3. Индуцированная топология. Метрический случай.
4. Пересечение топологий. Фактортопология. Непрерывное отображение топологических пространств. Связь с индуцированной топологией и фактортопологией.
5. База топологии, предбаза. Критерии того, что семейство подмножеств является базой или предбазой некоторой топологии. Топология произведения.
6. Фундаментальные покрытия топологического пространства. Фундаментальность открытых и локально конечных замкнутых покрытий.
7. Кардинальные числа. Теорема Кантора–Бернштейна о равномощных множествах.
8. Частично упорядоченные множества. Линейно упорядоченные множества. Направленные множества. Направленности, пределы направленностей.
9. Вполне упорядоченные множества. Аскиома выбора. Сравнение ординалов.
10. Лемма Цорна. Вывод из аксиомы выбора.
11. Теорема Цермело. Вывод из леммы Цорна.
12. Связное топологическое пространство. Связное подмножество. Связные объединения связных подмножеств. Связность непрерывного образа связного подмножества. Связность произведения связных пространств.
13. Связность замыкания связного подмножества. Связные компоненты. Замкнутость связных компонент. Вполне несвязные пространства.
14. Локально связные пространства. Открытость связных компонент локально связного пространства. Связность и линейная связность.
15. Компактное топологическое пространство. Компактное подмножество. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и непрерывного образа компакта. Достижение максимума функции на компакте.
16. Лемма Александера о предбазе. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.
17. Хаусдорфовы пространства. Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость множества совпадения отображений в хаусдорфово пространство. Хаусдорфовость подпространства хаусдорфова пространства и произведения хаусдорфовых пространств.
18. Аксиома отделимости T_3. Регулярные пространства. Регулярность подпространства регулярного пространства и произведения регулярных пространств.
19. Аксиома отделимости T_4. Нормальные пространства. Нормальность замкнутого подпространства нормального пространства. Плоскость Немыцкого.
20. Вторая аксиома счетности. Теорема Тихонова о нормальности.
21. Функциональная отделимость. Лемма Урысона. Теорема Титце.
22. Выполнение аксиом отделимости в метрических пространствах. Теорема Урысона о метризуемости.

23. Вторая аксиома счетности. Сепарабельность. Их равносильность для метрических пространств.
24. Локальная база. Первая аксиома счетности. Вывод первой аксиомы счетности из метризуемости и из второй аксиомы счетности.
25. Секвенциальная компактность и ее связь с компактностью для пространств, удовлетворяющих первой или второй аксиоме счетности.
26. Равносильность компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.
27. Локальная компактность. Ее сохранение при переходе к замкнутому подпространству. Одноточечная компактификация некомпактных локально компактных хаусдорфовых пространств.
28. Пространство непрерывных отображений. Компактно-открытая топология. Отображение $C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$.
29. Биекция $C(X \times Y, Z) \leftrightarrow C(X, C(Y, Z))$ в случае, когда Y регулярно и локально компактно или когда X и Y удовлетворяют первой аксиоме счетности.
30. Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность пространств. Фундаментальная группа.
31. Независимость класса изоморфизма фундаментальной группы линейно связного пространства от отмеченной точки. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы.
32. Симплициальные комплексы. Барицентрическое подразделение.
33. Цепные комплексы. Гомологии симплициального комплекса. Топологический смысл нулевых гомологий.
34. Гомоморфизмы цепных комплексов. Гомоморфизм измельчения. Симплициальные отображения.
35. Симплициальная аппроксимация непрерывного отображения. Существование симплициальной аппроксимации после подразделения.
36. Цепная гомотопия. Цилиндр над симплициальным комплексом.
37. Гомоморфизм прямого образа в гомологиях для произвольного непрерывного отображения симплициальных комплексов. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
38. Гомологии n-мерного шара и n-мерной сферы. Негомеоморфность евклидовых пространств разной размерности. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Теорема о барабане.