Задачи по курсу «Введение в топологию»
Осенний семестр 2013–2014 г. Лектор проф. И.А.Дынников

(1) Рассмотрим множество V, полученное из счетного дизъюнктного объединения отрезков $[0,1]$ отождествлением всех их начальных точек. Иначе говоря, V есть фактормножество множества $\mathbb{N}\times[0,1]$ по следующему отношению эквивалентности: $(k,x)\sim(l,y)$, если и только если $(k,x)=(l,y)$ или $x=y=0$. На множестве V рассмотрим следующие топологии:
- T^1 — фактортопология, на каждом экземпляре отрезка топология стандартная;
- T^2 — индуцированная топология при следующем вложении в бесконечное произведение $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times\ldots$:
$$(k,x)\mapsto\underbrace{0\times0\times\ldots\times0}_{k-1}\times x\times0\times0\times\ldots;$$
- T^3 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:
$$(k,x)\mapsto\Big(x\cos\frac{2\pi}{k},x\sin\frac{2\pi}{k}\Big);$$
- T^4 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:
$$(k,x)\mapsto\Big(x\cos\frac{\pi}{k},x\sin\frac{\pi}{k}\Big);$$
- T^5 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:
$$(k,x)\mapsto\Big(\frac{x}{k}\cos\frac{2\pi}{k},\frac{x}{k}\sin\frac{2\pi}{k}\Big);$$
- T^6 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:
$$(k,x)\mapsto\Big(\frac{x}{k}\cos\frac{\pi}{k},\frac{x}{k}\sin\frac{\pi}{k}\Big);$$
- T^7 — метрическая топология для метрики
$$\rho\big((k,x),(l,y)\big)=\begin{cases}|x-y|, & \text{если } k=l,\\ x+y, & \text{если } k\neq l;\end{cases}$$

Для каждой пары топологий из этого списка выяснить, какой из случаев имеет место: (а) топологии совпадают; (б) одна из топологий сильнее (какая?); (в) топологии несравнимы.

(2) Показать, что топология T^1 из предыдущей задачи неметризуема, т.е. не является метрической топологией ни для какой метрики на V.

(3) Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Доказать, что кажая из функций
$$\rho_s\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt[s]{\rho_X(x_1,x_2)^s+\rho_Y(y_1,y_2)^s}$$
при $s\geqslant1$ и
$$\rho_\infty\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\max\big(\rho_X(x_1,x_2),\rho_Y(y_1,y_2)\big)$$
задает метрику на $X\times Y$, метрическая топология которой совпадает с топологией произведения.

(4) Доказать, что топология бесконечного произведения $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times\ldots$ совпадает с метрической для метрики, в которой расстояние между двумя точками $x=(x_1,x_2,\ldots)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots)$ задается формулой

$$\rho_s(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|^s}{i^2}\Big)^{1/s},$$

где $s\geqslant 1$. Верно ли то же самое для метрики

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|?$$

(5) Найти число связных компонент линейных групп: $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $GL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $O(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(n)$.

(6) Доказать, что бесконечное счетное произведение $\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots$ гомеоморфно канторову множеству.

(7) Доказать, что одноточечная компактификация плоскости $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна двумерной сфере S^2.

(8) Открытым листом Мёбиуса называется факторпространство произведения $[0,1]\times(0,1)$ по отождествлению $(0,x)\sim(1,1-x)$. Доказать, что одноточечная компактификация листа Мёбиуса гомеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, топология на которой задается следующими определяющими условиями:
   (a) в аффинной части $\mathbb{R}^2$ индуцированная топология стандартна;
   (b) проективные преобразования являются гомеоморфизмами.

(9) Какие из топологических пространств в задаче (1) компактны?

(10) Какие из топологических пространств в задаче (1) локально компактны?

(11) Какие из топологий в задаче (1) удовлетворяют первой аксиоме счетности? Показать, что все они сепарабельны.

(12) Доказать, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\{(x,x)\in X\times X\}$ замкнута в $X\times X$.

(13) Доказать, что компактное хаусдорфово пространство нормально.

(14) Доказать, что любое выпуклое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$

(15) Пусть T — топология на $\mathbb{R}$, базу которой образуют все полуинтервалы вида $[a,b)$. Доказать, что пространство T нормально. Доказать, что $T\times T$ не является нормальным.

(16) Доказать, что конечное произведение локально компактных пространств локально компактно.

(17) Доказать, что, если произведение топологических пространств локально компактно, то количество некомпактных сомножителей в произведении конечно.

(18) Доказать, что счетное произведение пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, также удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(19) Доказать, что счетное произведение пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, также удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(20) Доказать, что счетное произведение сепарабельных пространств сепарабельно.

(21) Пусть K — компактное топологическое пространство. Доказать, что топология на пространстве непрерывных функций $C(K,\mathbb{R})$, заданная метрикой

$$\rho(f,g)=\max_{x\in K}|f(x)-g(x)|,$$

не слабее компактно-открытой топологии. Доказать, что для хаусдорфова K эти топологии совпадают.

(22) Доказать, что пространство $C([0,1],\mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на отрезке сепарабельно.
(23) Доказать, что отображение $C([0,1],\mathbb{R}) \to C((0,1),\mathbb{R})$, заданное ограничением функций с отрезка $[0,1]$ на интервал $(0,1)$, непрерывно и инъективно, но не является гомеоморфизмом на образ.
(24) Доказать, что плоскость $\mathbb{R}^2$ с n выколотыми точками гомотопически эквивалентна букету n окружностей, т.е. пространству, полученному из n окружностей, на каждой из которых отмечена одна точка, отождествлением этих отмеченных точек.
(25) Доказать, что фундаментальная группа декартова произведения двух пространств изоморфна произведению их фундаментальных групп:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

(26) Доказать, что фундаментальная группа окружности изоморфна $\mathbb{Z}$.
(27) Пусть K и L — симплициальные комплексы (с упорядоченными вершинами). Построим симплициальный комплекс M, взяв в качестве множества его вершин произведение $K_0 \times L_0$, а в качестве симплексов все подмножества $\sigma \subset K_0 \times L_0$ со следующими свойствами:
    (a) найдутся симплексы $\eta \in K$ и $\xi \in L$ такие, что $\sigma \subset \eta \times \xi$;
    (b) для любых двух вершин $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in \sigma$ выполнено либо $v_1 \leqslant v_2$ и $w_1 \leqslant w_2$, либо $v_1 \geqslant v_2$ и $w_1 \geqslant w_2$.

    Доказать, что геометрическая реализация $\widehat{M}$ этого комплекса гомеоморфна $\widehat{K} \times \widehat{L}$.
(28) Вычислить группы гомологий двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
(29) Вычислить группы гомологий проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.