ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ.

Часть II

Лекции Е.Г. Скляренко

(сентябрь – декабрь 1998.)

ВВЕДЕНИЕ

В этом курсе лекций мы должны научиться решать задачи такого типа:

1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ Евклида кратчайшими, как известно, служат прямые линии. На плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ кратчайшие – прямые по Лобачевскому, на сфере $\mathbb{S}^2$ – большие круги, а на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, на которую имеется проекция $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ с сохранением (локально) метрики – обычные проективные прямые (двумерная геометрия Римана).

2. Что представляют собой кратчайшие линии на гладкой поверхности в обычном пространстве $\mathbb{R}^3$?

3. При обходе на восток по параллели северного полюса наблюдатель постоянно сворачивает влево. Какова скорость его вращения влево? Эта скорость равна нулю на экваторе. Вблизи полюса наблюдатель повернется на угол около 2π, вблизи экватора угол отворота нулевой, на остальных параллелях заключен между 0 и 2π. Однако на плоскости Лобачевского угол отворота, равный 2π вблизи полюса, увеличивается с увеличением радуса окружности!

4. При каких условиях поверхность может бытъ без искажений ее структуры уложена на плоскость? Если бы это было возжно для участков поверхности Земли, это дало бы возможностъ получитъ отличные географические карты. Этим занимался Гаусс, по своей профессии – картограф. Наложение возможно в точности при условии, что *гауссова кривизна* равна нулю. Существуют, все же, карты, правильно изображающие углы между линиями. Они удобны в мореходстве.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ГЛАВА I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.

НАПОМИНАНИЕ ПОНЯТИЯ МНОГООБРАЗИЯ.

Определение восходит к Гауссу, занимавшемуся геодезическими измерениями и давшему математическую теорию картографирования поверхности Земли. Участки поверхности Земли отображались на карты, согласовывались между собой общие участки, изображенные на разных картах. Именно так определяется *многообразие* M^n размерности n:

Открытые части $U_j \subset M^n$ отображаются в $\mathbb{R}^n$ ($\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$) (локальные координаты или *карты*). Возникают функции-преобразования (взаимно обратные) $\varphi_i\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ и $\varphi_j\varphi_i^{-1}$. Они описываются обычными функциями от n переменных: $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^n),\ \ \alpha = 1, \ldots, n$, и $y^\beta = y^\beta(x^1, \ldots, x^n),\ \ \beta = 1, \ldots, n$.

Если M^n лежит в большем многообразии N^k и карты в M^n индуцируются картами в N^k, то M^n называется *подмногообразием*, а подмногообразия пространства $\mathbb{R}^k$ будут называться также *геометрическими.*

Топологическим многообразиям отвечают непрерывные функции.

Мы будем предполагать, что функции всегда много раз дифференцируемы. Получим *гладкие многообразия.*

Якобианы преобразований отличны от нуля и взаимно обратны. Достаточно считать, что отличен от нуля один из двух, тогда обратное преобразование также гладко (теорема о неявных функциях).

Имеют смысл понятия: гладкие кривые в M^n, гладкие функции, определенные на M^n , гладкие поверхности, k-мерные для любых $k < n$.

1.1 Вспомогательные теоремы о наличии специальных функций.

Вспомним, что такое финитная функция, со значением 1 на некотором шаре, и что такое разбиение единицы.

Теорема. *1. Для любой пары концентрических шаров радиусов ε и $\alpha\varepsilon$ ($\alpha > 1$) существует финитная функция, заключенная между 0 и 1, нулевая вне $\alpha\varepsilon$-шара и равная 1 в ε-шаре;*

2. Существует разбиение 1, подчиненное любому открытому покрытию.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и равна $e^{\frac{-1}{t}}$ при $t > 0$. Она бесконечно гладкая при $t = 0$ (и в остальных точках). По правилу Лопиталя предел $\frac{\varphi(t)}{t}$ при $t \to 0$ равен $\frac{\varphi(t)}{t^2}$. При дальнейших дифференцированиях (по Лопиталю) возникают суммы членов вида $\frac{\varphi(t)}{t^k}$, так что все производные при $t = 0$ равны 0.

Функция $t = \frac{x}{1-x}$ монотонно отображает полуинтервал $[0, 1)$ на полупрямую, а функция $\psi(x) = \varphi(\frac{x}{1-x})$ (равная $e^{\frac{x-1}{x}}$ для $x \in [0, 1)$) монотонно отображает $[0, 1)$ на $[0, 1)$ (и равна нулю на отрицательной полуоси). По непрерывности она продолжается в конец 1 и при этом все (односторонние) производные в концах 0 и 1 равны нулю. Продолжим ее постоянным значением 1 на отрезок $[1, 2]$ и рассмотрим функцию $\psi(x + 2)$. Она равна нулю на $(-\infty, -2]$, отображает $[-2, -1]$ на $[0, 1]$ и равна 1 на $[-1, 0]$. Рассмотрим симметричную функцию $\psi(-x + 2)$ на положительной оси. Вместе эти функции определяют функцию $\Phi(x) = \psi(|x|)$ на всей прямой, бесконечно гладкую, равную нулю в точности вне отрезка $[-2, 2]$, равную 1 на $[-1, 1]$ и меньшую 1 в остальных точках. Гладким монотонным преобразованием числовой прямой можно перевести пару отрезков $[-2, 2]$, $[-1, 1]$ в пару $[-\alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon]$, $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Заменяя $|x|$ на $\sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2}$, где $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ – центр концентрических шаров, получим функцию из утверждения 1.

Докажем второе утверждение. Впишем счетное локально конечное покрытие шарами радиусов $2\varepsilon_i$ так, чтобы и шары радиусов ε_i тоже давали покрытие, пусть ψ_i — финитные функции на них, построенные выше, ψ — их сумма. Она корректно определена, так как покрытие шарами локально конечно, и у каждой точки имеется окрестность, в которой только конечное число функций ψ_i отличны от нуля. Тогда функции $\frac{\psi_i}{\psi}$ дадут требуемое разбиение единицы. □

Замечание 1. *В утверждении 2. теоремы единичное значение функций ψ_i на меньших шарах несущественно. Эта часть утверждения понадобится в следующем разделе и в дальнейшем.*

1.2 О гладких и римановых многообразиях

Напоминания. Пусть $\boldsymbol{r} = r(u^1, \dots, u^k)$ – отображение из $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, точка $A \in U$, при этом $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$ — линейно независимы. Тогда это есть *росток* k-поверхности в A (в том смысле, что нам неважен размер окрестности U). В частности, возможно $k = n$, тогда это переход в пространстве от обычных координат к криволинейным.

Важный пример применения специальных функций.

Теорема 1. *Компактное многообразие M^n вкладывается в $\mathbb{R}^N$ для некоторого достаточно большого N.*

Доказательство. Пусть V_i,W_i две системы карт на M^n, причем замыкание $[V_i] \subset W_i$. Пусть $x_i^1, \dots, x_i^n$, — координаты на карте W_i. Пусть функции f_i равны 1 на $[V_i]$ и нулю вне W_i, при этом $0 \le f_i \le 1$. Пусть $f_{ij} = x_i^j f_i$, тогда f_{ij} – функция гладкая на всем M^n . Рассмотрим векторы с координатами

$$(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, f_{21}, \dots, f_{2n}, \dots, f_{k1}, \dots f_{kn}, f_1, \dots, f_n),$$

где k — число карт. Это дает (очевидно, регулярное) отображение $f : M^n \to \mathbb{R}^N,\ N = nk + n$, которое и есть искомое вложение.

Действительно, если A, B — точки в одной и той же карте V_i, то для них отличаются $f_{i1}, \dots, f_{in}$, а если $A \in V_i, B \notin V_i$, то $f_i(A) = 1$, а $f_i(B) < 1$. Образ будет правильно параметризованным геометрическим многообразием. □

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — гладкая кривая на поверхности M^k в $\mathbb{R}^n$, $\{x^i(u^j)\}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$ – регулярная локальная параметризация M^k и $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(x^i(t)) = \boldsymbol{r}(x^i(u^j))$. Из того, что параметризация взаимно однозначна и ранг матрицы Якоби $\{\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\}, 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k$, равен k, следует, что $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u^1(t), \dots, u^k(t))$ и $d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt} = \boldsymbol{m}_i du^i$. (Кривая «перенесена» в координатную плоскость.)

Понятие римановой метрики на гладком многообразии вводилось в 1-й части. Напомним: говорят, что в области с локальными координатами $(u^1, \dots, u^k)$ задана *риманова метрика*, если заданы функции $g_{ij}(A)$ в этой области, так что матрица Грама $g_{ij} = G = G(A)$ симметрична и положительно определена.

При этом возникает скалярное произведение векторов скоростей кривых, проходящих через точку A: $ds^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} du^i dv^j$.

Это запись метрики на k-поверхности в $\mathbb{R}^n$. Можно вычислять и углы между пересекающимися кривыми.

При $k = n$ получается евклидова метрика, но в криволинейных координатах: матрица Грама $G = G(A)$ — зависит от точки A. При $k < n$ возникает риманова метрика, симметричная и положительно определенная). В общем случае она отлична от евклидовой (не приводится заменой переменной к единичной сразу во всех точках области).

При переходе к другим координатам $(v^1, \dots, v^n)$, $ds^2 = g'_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta$, где $g'_{\alpha\beta} = (m'_\alpha, m'_\beta) = (\frac{dr}{dv^\alpha}, \frac{dr}{dv^\beta}) = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}$.

Так что ds^2 можно вычислять во всех координатах. Карта в $\mathbb{R}^n$ называется областью с римановой метрикой. Аналогично можно рассматривать области с псевдоримановой метрикой ($G(A)$ — симметрична и невырождена, но может не быть положительно определенной).

Риманово многообразие (гладкое, конечно) — это многообразие, такое что на всех картах заданы метрики Римана, а функции перехода $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ — изометрии. Это означает, что на пересечениях карт G меняется по указанному закону.

(В геометрии рассматриваются также и псевдоримановы многообразия).

Теорема 2. *На любом гладком многообразии существуют римановы метрики.*

Доказательство. Пусть V_i,W_i две системы карт на M^n, причем $[V_i] \subset W_i$. Пусть функции f_i равны 1 на $[V_i]$ и нулю вне W_i, при этом $0 \le f_i \le 1$. Пусть ρ_i — любая метрика на карте V_i. Она существует благодаря тому, что у нас есть координаты $x_i^1, \dots, x_i^n$ на V_i, дающие вложение $V_i \subset \mathbb{R}^n$. Искомой метрикой на M^n будет $\sum \rho_i \varphi_i$ (где сумма берется в координатах данной карты, т.е. каждая φ_i должна пересчитываться в эту карту из своей карты). □

Замечание 2. *Сумма положительно определенных симметричных квадратичных форм, очевидно, положительно определенная симметричная форма. Доказательство не проходит для псевдоримановых форм, ибо сумма невырожденных квадратичных форм может оказаться вырожденной.*

2 ГЛАВА 2 ПРОСТРАНСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ В ТОЧКЕ.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, \ldots, u^k)$ – отображение области $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, при этом $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$ — линейно независимы. (Это k-поверхность, а при $k = n$ — переход к криволинейным координатам). Пусть $v^1, \ldots, v^k$ – новые координаты, $\boldsymbol{m}'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i}$ – новый базис векторов.

Они связаны соотношением $\boldsymbol{m'}_i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\boldsymbol{m}_j$. Введем матрицу $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$, называемую *матрицей Якоби* или матрицей перехода. Тогда предыдущее равенство запишется как $\boldsymbol{m'}_i = J\boldsymbol{m}_j$.

Верны равенства $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{m}_i \frac{\partial u^i}{\partial t} = \boldsymbol{m}_i \dot{u}^i;\ dr = \boldsymbol{m}_i du^i$. С другой стороны, $\dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\dot{v}^j$ или $du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}du^j$.

В тензорном подходе обычно новое выражается через старое $\frac{dv^j}{dt} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}$ или $dv^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}du^i$ (*).

Итак, координаты вектора преобразуются *контравариантно,* с матрицей $\mathcal{J} = J^{-1}$, а касательный вектор — это вектор касательный к кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, причем либо реальный (т.е. стрелка) в точке k-поверхности в $\mathbb{R}^n$, либо на карте k-поверхности — изображение реального вектора. Пусть V_A — все касательные векторы в точке A с координатами $(u_0^1, \ldots, u_0^k)$ (ко всем кривым, проходящим через эту точку).

Теорема 3. *V_A — это k-мерное векторное пространство.*

Доказательство. Фиксируем локальные координаты $u^1, \ldots, u^k$. Любой набор чисел $(\alpha^1, \ldots, \alpha^k)$ — координаты некоторого касательного вектора. Достаточно рассмотреть кривую $u^i = u_0^i + \alpha^i t$.

Определены *покоординатные* операции сложения и умножения на числа λ. □

Второе определение касательного вектора – это наборы чисел: $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ в координатах $u^1, \ldots, u^k$; $\beta^1, \ldots, \beta^k$ — в координатах $v^1, \ldots, v^k$ и т.д., при замене координат они преобразуются по законам

$$\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \ldots\\ \alpha^k\end{pmatrix} = J \begin{pmatrix}\beta^1\\ \ldots\\ \beta^k\end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix}\beta^1\\ \ldots\\ \beta^k\end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix}\alpha^1\\ \ldots\\ \alpha^k\end{pmatrix}$$

Заметим: Производная $\frac{df}{dt}$ зависит не от кривой, а лишь от касательного вектора в точке A_0, и для всех кривых с одним и тем же вектором скорости в этой точке она одна и та же. Она равна значению дифференциала $df = \frac{\partial f}{\partial u^i}du^i$ на векторе $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (\frac{du^1}{dt}, \ldots, \frac{du^n}{dt})$

Вывод. Следует говорить не о производной по кривой, а о производной по вектору $\boldsymbol{m} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ (в локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$).

Независимость от карты: при замене выражение дифференциала сохраняется. Если $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$ — координаты $\boldsymbol{m}$ в локальных координатах $v^1, \ldots, v^n$, то: $df = \frac{\partial f}{\partial v^i}dv^i = \frac{\partial f}{\partial v^i}\beta^i = \frac{\partial f}{\partial v^i}(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\alpha^j) = \frac{\partial f}{\partial u^j}\alpha^j = \frac{\partial f}{\partial u^j}du^j$

Замечание. В анализе говорят о производной функции по направлению (а не по вектору), подразумевая производную по единичному вектору, характеризующую скорость изменения функции по направлению. Мы же рассматриваем производную по вектору, который может иметь произвольную величину (т.е. рассматриваем скорость изменения не только по направлению, но и по величине: если вектор возрастет в p раз, то и скорость изменения f возрастет в p раз).

Вывод: Вместо $\frac{df}{dt}$ пишем далее $\frac{df}{d\boldsymbol{v}}$. Поскольку за f берутся любые функции, то f можно не писать, а писать (имея в виду операцию дифференцирования) просто $\frac{d}{d\boldsymbol{v}}$. Итак, каждому касательному вектору $\boldsymbol{v}$ соответствует отображение $\frac{d}{d\boldsymbol{v}} : \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$. ($\mathcal{C}$ – пространство гладких функций на M.) Если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, то $\frac{d}{d\boldsymbol{v}} = \frac{d}{d\boldsymbol{v}_1} + \frac{d}{d\boldsymbol{v}_2}$, $\lambda\boldsymbol{v}$ отвечает $\frac{d}{d\lambda\boldsymbol{v}} = \lambda^{-1}\frac{d}{d\boldsymbol{v}}$. При этом, очевидно, $\frac{d}{d\boldsymbol{m}_i} = \frac{\partial}{\partial u^i}$ (ибо для $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}$ имеем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (0 \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$).

Свойства дифференцирования по вектору: $\frac{d}{d\boldsymbol{v}^i}(\lambda f_1+\mu f_2) = \lambda\frac{df_1}{d\boldsymbol{v}^i}+\mu\frac{df_2}{d\boldsymbol{v}^i}$, $\frac{dfg}{d\boldsymbol{v}^i} = \frac{df}{d\boldsymbol{v}^i}|_{A_0}g(A_0)+f(A_0)\frac{dg}{d\boldsymbol{v}^i}|_{A_0}$.

Обобщим это понятие:

Абстрактное дифференцирование в точке А кольца функций есть отображение $\partial : \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$ со свойствами $\partial(\lambda f + \mu g) = \lambda\partial f + \mu\partial g$, $\partial(fg) = \partial f g(A) + f(A)\partial g$.

Лемма 1. *Множество абстрактных дифференцирований $\{\partial\}$ — векторное пространство.*

Доказательство. Это очевидно, ибо если ∂' и ∂'' имеют указанные свойства, то $\partial = \partial'+\partial''$ и $\partial = \lambda\partial$ также их имеют. □

Выше было построено линейное отображение $V_A \to \{\partial\}$, а именно, $\boldsymbol{v} \to \frac{d}{d\boldsymbol{v}} = \partial \in \{\partial\}$. Оно, очевидно, мономорфно.

Теорема 4. *Это отображение $V_A \to \{\partial\}$ — изоморфизм.*

Доказательство. Нужно показать, что любое абстрактное дифференцирование есть дифференцирование функций по некоторому вектору.

Начнем с того, что покажем, что $\partial f = \partial g$, если f и g совпадают в окрестности точки A. Это будет означать, что дифференцирование определено на *ростках* функций. Две функции определяют один росток в точке, если они совпадают на какой-либо окрестности точки. (Это отношение симметрично и транзитивно, т.е. есть эквивалентность.) Функции могут как угодно отличаться вне окрестности или не быть определенными на всем многообразии – результат дифференцирования будет один и тот же.

Достаточно показать, что $\partial f = 0$, если f нулевая функция в окрестности A. Пусть φ — финитная функция, равная 1 на некоторой окрестности, где f равна нулю, и равная нулю там, где f не нуль. Имеем $\varphi f = 0$, поэтому $\partial(\varphi f) = 0$. Но $\partial(\varphi f) = \partial\varphi f(A)+\varphi(A)\partial f = \partial f$, т.е. $\partial f = 0$, что и требовалось.

Если $f = c = const$, то для любого абстрактного дифференцирования ∂ имеем $\partial c = \partial(1 \cdot c) = \partial 1 c + 1\partial c = \partial(c \cdot 1) + \partial c = 2\partial c$, значит, $\partial c = 0$.

Пусть $u^1, \dots, u^k$ - локальные координаты в окрестности точки A. Можно считать, что эти функции определены на всем многообразии. Действительно, если это не так, то поступаем следующим образом. Мы знаем, что существует функция φ на M, равная единице в достаточно малой окрестности A и нулю вне того множества, где $u^1, \dots, u^k$ являются координатами. Тогда функции $\varphi u^1, \dots, \varphi u^k$ будут определены уже на всем многообразии и будут совпадать с $u^1, \dots, u^k$ в окрестности A.

Функция $f(u) \in C(M)$ представляется в окрестности A в виде $f(u) = f(A) + h_i(u)(u^i - u^i_0)$. При этом $h_i(A) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)$. Так как u^i - локальные координаты, то этот факт ("лемма Адамара") известен из математического анализа.

Отсюда следует теорема (пользуемся тем, что ∂f зависит лишь от строения f в малой окрестности точки).

$\partial f = \partial(f(A))+\partial(u^i-u^i_0)h_i(A)+(u^i-u^i_0)\mid_A \partial h_i = 0+(\partial u^i-0)\frac{\partial f}{\partial u^i}(A)+0 = \alpha^i\frac{\partial f}{\partial u^i}(A)$, где $\alpha^i = \partial u^i$. Мы можем положить $\partial = \frac{d}{d\boldsymbol{v}}$, где $\boldsymbol{v} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$.

Действительно, для двух систем координат имеем: $\partial f = \alpha^i\frac{\partial f}{\partial u^i}(A) = \alpha'^i\frac{\partial f}{\partial v^i}(A) = \alpha'^i\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}(A)$. Применяя это равенство к координатным функциям $f = u^i$, получим правильное преобразование коэффициентов: $\alpha^i = \alpha'^j\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$. □

Полезно обозначение — $\frac{d}{d\boldsymbol{v}} = \partial_{\boldsymbol{v}}$.

Выводы: Для поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, \dots, u^n)$ в N-мерном пространстве за базисные векторы $\boldsymbol{m}_i$ брались $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = (\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^N}{\partial u^i})$. Теперь же $\boldsymbol{m}_i$ — это $\frac{d}{d\boldsymbol{m}_i}$, дифференцирование в кольце функций (фактически $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$ отождествляется с дифференцированием по $\boldsymbol{m}_i$). При замене координат имели: $\boldsymbol{m}'_i = \boldsymbol{m}_j\frac{\partial u^j}{\partial v^i}$, теперь имеем $\frac{\partial}{\partial v^j} = \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$.

2.1 Дифференциал гладкого отображения $\psi : N^n \to M^m$

Пусть $A \in N, B = \psi(A) \in M$, $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^m)$ – карты. Отображение ψ — гладкое, если $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ — гладкие функции. Очевидно, определение не зависит от выбора карт. С помощью композиции ψ переводит параметризованные кривые в N в параметризованные кривые в M.

Теорема 5. *Ставя в соответствие вектору скорости кривой в точке A, вектор скорости в точке B ее образа, мы получим линейное отображение $V_A \to V_B$.*

Это отображение называется *дифференциалом* отображения ψ и обозначается $d\psi|_A$.

Доказательство. Гладкая кривая $(x^1(t),\dots,x^n(t))$ переходит в гладкую кривую $(y^1(x^1(t),\dots,x^n(t)),\dots,\ y^m(x^1(t),\dots,x^n(t))$. (Строго говоря, в непрерывно дифференцируемую, не обязательно гладкую: у кривой-образа могут возникнуть и нулевые векторы скорости.)

Имеем $\frac{dy^i}{dt}=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}$, или $dy^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j$, или $Y^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}X^j$. С одной стороны это отображение действительно линейно с матрицей $I=\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\}$ в качестве матрицы отображения, с другой – оно переводит вектор скорости кривой в вектор скорости ее образа. $\square$

Прямоугольная матрица $I=\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\}$ есть матрица Якоби отображения ψ в точке A.

Определение дифференциала не зависит от выбора карт, поскольку использует векторы скорости кривых, а определения касательных векторов в конечном итоге инвариантны. Возникшее отображение $d\psi : V_A\to V_B$ можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\dots\\ dy^i\\ \dots\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}\dots\\ dx^j\\ \dots\end{pmatrix}$$

Матрицу Якоби $I=\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\}$ отображения ψ не следует путать с аналогичными матрицами для преобразования карт в N^n или M^m) (i в I – номер строки).

2.2 Векторные поля и их интегральные траектории

Допустим, что либо на всем M, либо на $U\subset M$, задано по вектору $\boldsymbol{v}(A)$ из V_A в каждой точке A. В локальных координатах возникают функции $X^1(A),\dots,X^n(A)$ – координаты $\boldsymbol{v}(A)$. Мы можем сказать, что нам дана функция, которая сопоставляет точке A вектор из касательной плоскости в этой точке. Однако от обычной функции это сопоставление отличается тем, что образы векторов не лежат в одном векторном пространстве, а «разнесены» по области U. Мы будем называть такую функцию *векторным полем.* (Термин «поле» — по аналогии с хлебным полем). Поле $\boldsymbol{v}(A)$ называется непрерывным, гладким, если таковы в локальных координатах функции X^i. Гладкость, непрерывность поля не зависят от координат.

Примеры.

1. *координатные поля* $A)i=(0,\dots 1,\dots,0)$
2. любое поле в пределах координатной окрестности задается набором координатных функций, и любой набор таких (гладких) функций задает векторное поле в координатной окрестности.

Поля можно складывать, умножать не только на числа, но и на функции (с законами дистрибудивности). Множество векторных полей — бесконечномерное векторное пространство. *Интегральная траектория поля* — это кривая $A=A(t)$, такая что $\frac{dA}{dt}=\boldsymbol{v}(A)$. Пусть $A_0=(x_0^1,\dots,x_0^n)$ – любая точка в области определения поля.

Теорема 6. *Через A_0 проходит единственная интегральная траектория.*

Доказательство. Это следует из соответствующей теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений в применении к системе $\frac{dx^i(A)}{dt}=X^i(A), i=1,\dots,n$, с начальным условием $A(0)=A_0$. $\square$

Напомним координатные преобразования: для базисных полей – $e_i'=\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}A)\alpha$, $J=\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\}$; для координат векторных полей – $Y^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}X^\alpha$, $\mathfrak{J}=\{\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\}=J^{-1}$.

2.3 Касательное расслоение.

Множество $VM = \bigcup_A V_A$ состоит из "слоев" V_A.

Теорема 7. *VM — $2n$-мерное гладкое многообразие.*

Доказательство. Пусть U — карта, $VU = \bigcup_{A \in U} VM$ — часть VM. Введем в VU координаты: $(x^1, \dots, x^n; X^1, \dots, X^n)$, где $(X^1, \dots, X^n) = \boldsymbol{v}$ — касательный вектор в точке $A = (x^1, \dots, x^n)$. Пусть V — другая карта, содержащая A, следовательно, и $\boldsymbol{v} \in V_A \subset VV$. Функции перехода таковы: $x^j = x^j(y^1, \dots, y^n)$ — для A и $X^i = \frac{\partial X^i}{\partial y^\alpha} Y^\alpha$ — для $\boldsymbol{v}$. Итак, старые координаты выражаются через новые $(y^1, \dots, y^n; Y^1, \dots, Y^n)$ гладко. Какова матрица Якоби? Она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ * & J \end{pmatrix}$$

(матрица Якоби линейного преобразования совпадает с матрицей самого этого преобразования.)

Часть * составлена членами вида $\frac{\partial X^i}{\partial y^j}$. Проверка хаусдорфовости VM:

Если векторы касаются в разных точках, то берем карты U и V, так чтобы $U \cap V = \emptyset$, тогда и $VU \cap VV = \emptyset$. А если оба в точке A? Тогда $VU = U \times \mathbb{R}^n$ — прямое произведение! А оно хаусдорфово.

Покажем, что из паракомпактности M следует паракомпактность VM. Счетность атласа VM – из счетности для M. Из этого следует, что VM есть объединение расширяющейся системы (последовательностй) компактов, откуда очевидно наличие как угодно мелких локально конечных покрытий. □

Фиксирована проекция $\pi : VM \to M$, сопоставляющая вектору точку его приложения, причем $\pi^{-1}U = VU = U \times \mathbb{R}^n$ для карт U данного атласа.

Говорят, что VM – касательное *расслоение над M со слоем* $\mathbb{R}^n \approx V_A$, V_A называется слоем над A.

Сечением расслоения над U называется отображение $s : M \to VM$, сопоставляющее точке $A \in U$ точку B *в ее слое* V_A.

Примем, что $M \subset VM$ лежит как *нулевое сечение* расслоения: отождествляем $A \in M$ с нулем в V_A.

Гладкое векторное поле $\boldsymbol{v}$ *отождествляется с сечением*, при котором $\boldsymbol{v}(A) = s(A) \in V_A$. При этом $\pi s = \mathbf{1}$ – тождественное отображение M.

Замечание 3. *Для поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ касательное расслоение VM четырехмерно. Касательные плоскости пересекаются в $\mathbb{R}^3$, но пересечения игнорируются (ибо точки касания плоскостей с поверхностью разные).*

2.4 Расслоения.

Прямое произведение $M \times N$ — гладкое многообразие суммарной размерности, причем проекции произведения — гладкие отображения. Они имеют максимальный ранг (все точки регулярны).

Рассмотрим гладкое отображение M на N, $m = dimM \geq dimN = n$. Пусть $B \in N$.

Лемма 2. *Если все точки $A \in f^{-1}(B)$ регулярны, то $f^{-1}(B)$ — многообразие (размерности $m-n$).*

Доказательство. Пусть $x^1, \dots, x^m$ — координаты вблизи A, $y^1, \dots, y^n$ – координаты вблизи B, матрица $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ имеет ранг n. Допустим, что минор в первых n столбцах ненулевой. Тогда при $i \leq n$ имеем $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ – диффеоморфно. Следовательно, вокруг A возникают координаты $(y^1, \dots, y^n, x^{n+1}, \dots, x^m)$, матрица Якоби перехода от них к $x^1, \dots, x^m$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} J & 0 \\ \star & E \end{smallmatrix} \right)$, где E задана равенством $A)ij = \delta_{ij}$

В этой системе координат отображение f выглядит так: $f(y^1, \dots, y^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (y^1, \dots, y^n)$, а его матрица Якоби имеет вид $(E|0)$. Если $B = (y_0^1, \dots, y_0^n)$, то $f^{-1}(B)$ вокруг A описывается как $(y_0^1, \dots, y_0^n; x^{n+1}, \dots, x^m))$ причем как раз $x^{n+1}, \dots, x^m$ и следует считать координатами в $(m-n)$-мерном слое $f^{-1}(B)$ вблизи A. Если $\widetilde{x^1}, \dots, \widetilde{x^m}$ — другие координаты вокруг A, то по ним строим снова координаты $(y^1, \dots, y^n; \widetilde{x^{n+1}}, \dots, \widetilde{x^m})$. Функции перехода между ними и $(y_0^1, \dots, y_0^n; x^{n+1}, \dots, x^m))$ гладкие, остается в этих функциях учесть, что $y^i = y_0^i$ — постоянные. Хаусдорфовость и паракомпактность $f^{-1}(B)$ следует из того, что $f^{-1}(B)$ — замкнутое подмножество в M. □

Определение 1. Отображение $f : M \to N$ называется *гладким расслоением*, если для достаточно малых $U \subset N$ прообразы $f^{-1}(U)$ диффеоморфны $U \times f^{-1}(B)$ (а f действует как проекция).

В частности, если N — связно, все $f^{-1}(B)$ диффеоморфны. Пример расслоенного отображения уже был — касательное расслоение.

Теорема 8. *Пусть $f : M^m \to N^n$ — гладкое сюръективное отображение с компактными прообразами точек, N — связное и все точки f регулярны. Тогда f — гладкое расслоение. (В частности, все прообразы — одинаковые многообразия).*

Доказательство. Пусть B_0 — любая точка в N. По предыдущему $f^{-1}(B_0)$ — многообразие, обозначим его F. Пусть U — карта вокруг B_0, диффеоморфная шару, причем $B_0 = (0, \ldots, 0)$ в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на карте (считаем, что карта U реализована как шар).

В соответствии с предыдущим, вблизи каждой точки $A_0 \in F = f^{-1}(B)$ можно рассматривать карты с координатами $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m)$ (кстати, при $m = n$ теорема — следствие леммы), в которых $f(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n)$. Такая карта содержит в себе декартово произведение некоторой n-области $(x^1, \ldots, x^n)$ в N на некоторую область $(x^{n+1}, \ldots, x^m)$ многообразия F вокруг A_0. Однако n-поверхность $(x^1, \ldots, x^n, x_0^{n+1}, \ldots, x_0^m)$, где x_0^j при $j > n$ – координаты A_0 в F, не совпадает с (аналогичной) n-поверхностью $(\widetilde{x^1}, \ldots, \widetilde{x^n}; \widetilde{x_0^{n+1}}, \ldots, \widetilde{x_0^m})$ при переходе к другим таким же координатам вокруг A_0.

Чтобы устранить эту зависимость n-поверхности вокруг A_0, снабдим M^m некоторой римановой метрикой. На карте $(x^1, \ldots, x^m)$ рассмотрим базисные векторные поля $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})m$ с координатами $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Матрица Якоби f имеет в этой карте вид $(E|0)$. Таким образом, $df(\boldsymbol{A})j) = 0$ при $j > n$ и $df(\boldsymbol{A})i) = \widetilde{\boldsymbol{A})i}$, $i \le n$, $\widetilde{\boldsymbol{A})i}$ — базисные поля на карте N вокруг B_0. Поля $\boldsymbol{A})1, \ldots \boldsymbol{A})n$ вблизи A_0 заменим на другие $\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_n$ следующим образом.

Для фиксированных $X^1, \ldots, X^n$ найдем векторное поле вокруг A_0, ортогональное всем $\boldsymbol{A})n+1, \ldots, \boldsymbol{A})m$, с координатами $(X^1, \ldots, X^n, X^{n+1}, \ldots, X^m)$. Условия $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A})j) = 0$, $j > n$, или $g_{1j}X^1 + \ldots + g_{nj}X^n + g_{n+1j}X^{n+1} \ldots + g_{mj}X^m = 0$ дают всего $m - n$ однородных уравнений относительно неизвестных $X^{n+1}, \ldots, X^m$. Матрица при них — это матрица $\{g_{ij}\}$ при $i > n, j > n$, часть матрицы Грама, она невырождена. Поэтому X^j при $j > n$ — гладкие функции от $X^1, \ldots, X^n$ и от координат точек $(x^1, \ldots, x^n)$, входящих в g_{ij}. Всякое решение $\boldsymbol{a}$ есть $\boldsymbol{a} = \sum X^i \boldsymbol{a}_i$, где $\boldsymbol{a}_i$ — фундаментальная система решений, $\boldsymbol{a}_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0, X_i^{n+1}, \ldots, X_i^m), i = 1, \ldots n : \boldsymbol{a}_i \perp \boldsymbol{A})j, \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{A})j$ на карте вокруг A_0.

Заданием чисел $X^1, \ldots, X^n$ поле $\boldsymbol{a}$ определяется из указанных $m - n$ уравнений однозначно, поэтому поле $\boldsymbol{a}$ (и все $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$) не зависят от выбора карты (рассматриваемого вида) вокруг A_0.

Поскольку $f^{-1}(B_0)$ компактно, существует конечное число таких карт, покрывающих слой F (для некоторых точек $A_{01}, \ldots, A_{0N}$). Таким образом, найдется малая шарообразная карта U вокруг $B_0 \in F$, для которой $f^{-1}(U)$ будет покрыто указанными картами.

Построим отображение $U \times F \to f^{-1}(U)$: точкам $(B, \bar{A})$ отнесем точку $\widetilde{B}$, лежащую на выходящей из $A_0 \in F$ интегральной траектории поля $\boldsymbol{a} = \sum X^i \boldsymbol{a}_i$ при $t = 1$, где $(X^1, \ldots, X^n)$ — координаты B в карте U. Координаты $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m)$ точки $\widetilde{B}$ в карте вокруг A_0 в M являются функциями от $(X^1, \ldots, X^n)$ и $(\bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^m)$ (координаты $\bar{A}$ в N). Уравнение траектории $\frac{dr}{dt} = \boldsymbol{a}$ или $\frac{dx^i}{dt} = X^i$, $\boldsymbol{a} = (X^1, \ldots, X^n; X^{n+1}, \ldots, X^m)$.

Функции x^j дифференцируемы по $\bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^m$, это следствие гладкой зависимости решения $\boldsymbol{r}(t)$ дифференциального уравнения по начальным условиям. Координаты же $(X^1, \ldots, X^n)$ точки B выступают как параметры в правой части дифференциального уравнения для $\boldsymbol{r}(t)$, поэтому x^j дифференцируемы по параметрам $X^1, \ldots, X^n$. Таким образом, матрица Якоби (от $x^1, \ldots x^m$ к $X^1, \ldots, X^n, \bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^m$) гладкая. Но в точке $\bar{A}$ $\frac{dr}{dx^i} = A)i$ при $i > n$. Меняя параметр X^i и оставляя остальные параметры нулевыми, получим, что точка движется по траектории с вектором скорости $\boldsymbol{a}_i$, поэтому производная по параметру X^i в точке $\bar{A}$ коллинеарна $\boldsymbol{a}_i$. Но векторы $(\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_n, A)n+1, \ldots, A)m)$ линейно независимы в точке $\bar{A}$ и, значит, якобиан отличен от нуля. □

Пояснения: 1) Координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ точки $\widetilde{B}$ – гладко дифференцируемые по $\bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^m$ и по $X^1, \ldots, X^n$ функции. При $\widetilde{B} = \bar{A}$ их производными служат векторы $\boldsymbol{A})n+j, \ldots, \boldsymbol{A})m$ и $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, а они линейно независимы.

2) Для построенной точки $\widetilde{B}$ имеем $f(\widetilde{B}) = B$, поскольку интегральная траектория из $\bar{A}$ накрывает луч $(X^1, \ldots, X^n)$ из B_0 в B (поле $\boldsymbol{a} = (X^1, \ldots, X^n; X^{n+1}, \ldots, X^m)$ отображается в $(X^1, \ldots, X^m)$ на карте U вокруг B_0), при $0 \le t \le 1$ получаем, что интегральные траектории поля $\boldsymbol{a}$ от $\bar{A}$ до $\widetilde{B}$ в M накрывают лучи от B_0 к B в N.

2.5 Коммутатор векторных полей.

Итак векторному полю $\boldsymbol{v}$ отвечает $\frac{d}{d\boldsymbol{v}}$, причем $\boldsymbol{e}_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{d\boldsymbol{e}_i}$. Что есть $\partial = \frac{d}{d\boldsymbol{w}}(\frac{d}{d\boldsymbol{v}})$? Например, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$? Это не есть дифференцирование по вектору, не есть $\frac{d}{d\boldsymbol{u}}$ для поля $\boldsymbol{u}$. Неверна формула $\partial(fg) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g$, из $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ не следует, что $f = const$.

Хорошо известно, что $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ — не зависит от порядка. А как для произвольных $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$?

Вычислим $(\frac{d}{d\boldsymbol{w}}(\frac{d}{d\boldsymbol{v}}) - \frac{d}{d\boldsymbol{v}}(\frac{d}{d\boldsymbol{w}}))(f)$ для любой функции f. Пусть $\boldsymbol{v} = (X^1, \dots, X^n)$, $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$, $\boldsymbol{w} = (Y^1, \dots, Y^n)$, $Y^i = Y^i(x^1, \dots, x^n)$. Тогда:

$\frac{df}{d\boldsymbol{v}} = \frac{df}{dx^i} X^i$, $\frac{d}{d\boldsymbol{w}}(\frac{df}{d\boldsymbol{v}}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} X^i Y^j + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j$, $\frac{d}{d\boldsymbol{v}}(\frac{df}{d\boldsymbol{w}}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} X^j Y^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} X^j$

После вычитания: $\frac{d}{d\boldsymbol{v}} \frac{df}{d\boldsymbol{w}} - \frac{d}{d\boldsymbol{w}} \frac{df}{d\boldsymbol{v}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j)$. Легко проверить (это упражнение!), что выражение в скобках $Z^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j$ преобразуется при замене переменных как вектор. Обозначим его $\boldsymbol{u} = (Z^1, \dots, Z^n)$. Тогда получается, что применение коммутатора двух векторных полей $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ к любой функции есть дифференцирование этой функции по вектору $\boldsymbol{u}$ (что может быть проверено и непосредственно).

Для базисных полей — из-за постоянства их координат — получится нуль. В общем же случае набор $\{Z^j\}$ ненулевой!

Итак, в общем случае коммутирования вторые прозводные исчезают, и $\frac{d}{d\boldsymbol{v}} \frac{d}{d\boldsymbol{w}} - \frac{d}{d\boldsymbol{w}} \frac{d}{d\boldsymbol{v}} = \frac{d}{d\boldsymbol{u}}$ — третье векторное поле.

Определение 2. $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]$ — коммутатор векторных полей (произведение Ли, скобка Пуассона). Ясно, что $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0$.

Свойства:

1. $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]$ — гладкое, инвариантное при диффеоморфзмах (видно из координат) векторное поле.

2. Антикоммутативность: $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}]$.

3. Линейность: $[\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}] = \lambda_1 [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{w}] + \lambda_2 [\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{w}]$

4. $[g\boldsymbol{v}, h\boldsymbol{w}] = gh[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}] - \frac{dg}{d\boldsymbol{w}} h\boldsymbol{v} + \frac{dh}{d\boldsymbol{v}} g\boldsymbol{w}$, ибо $\frac{d}{dg\boldsymbol{v}} \frac{d}{dh\boldsymbol{w}} - \frac{d}{dh\boldsymbol{w}} \frac{d}{dg\boldsymbol{v}} = g \frac{d}{d\boldsymbol{v}}(h \frac{d}{d\boldsymbol{w}}) - h \frac{d}{d\boldsymbol{w}}(g \frac{d}{d\boldsymbol{v}}) = gh \frac{d}{d\boldsymbol{v}} \frac{d}{d\boldsymbol{w}} + g \frac{d}{d\boldsymbol{v}} \frac{d}{d\boldsymbol{w}} - gh \frac{d}{d\boldsymbol{w}} \frac{d}{d\boldsymbol{v}} - h \frac{d}{d\boldsymbol{w}} \frac{d}{d\boldsymbol{v}}$.

5. Тождество Якоби: $[\boldsymbol{u}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]] + [\boldsymbol{v}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}]] + [\boldsymbol{w}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]] = 0$. Для этого расписываем:

   $[\boldsymbol{u}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]] = \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]} - \partial_{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]} \partial_{\boldsymbol{u}} = \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{w}} - \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{v}} - \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{u}} + \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{u}}$

   $[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}]] = \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{u}} - \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{w}} - \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{v}} + \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{w}}$

   $[\boldsymbol{w}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]] = \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{v}} - \partial_{\boldsymbol{w}} \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{u}} - \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{w}} + \partial_{\boldsymbol{v}} \partial_{\boldsymbol{u}} \partial_{\boldsymbol{w}}$

2.6 Признак голономности базисных полей.

Для карты существуют базисные поля $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, $[\boldsymbol{A})i\boldsymbol{A})j] = 0$. Верно ли обратное? Пусть $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ — гладкие поля, являются ли они базисными именно для карты? Необходимые условия: они линейно независимы и $[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j] = 0$.

Теорема 9. *Локально эти условия и достаточны, т.е. $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i$, для некоторых координат вблизи любой точки.*

Такие поля называются голономными. Мы докажем более общее

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$, $k \leq n$ — гладкие линейно независимые поля, для которых $[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j] = 0$. Тогда вблизи каждой точки существуют координаты, для которых $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$ при $i \leq k$.*

Доказательство. Пусть сперва $k = 1$. В точке A_0 возьмем маленькую плоскость, пересекающую $\boldsymbol{a}_1$, в ней любой базис $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и координаты $\alpha^2, \dots, \alpha^n$. В окрестности A_0 проведем траектории поля $\boldsymbol{a}_1$. Пусть $x^1, \dots, x^n$ — прежняя система координат. Отнесем точке A ее параметр t по траектории и координаты $\alpha^2, \dots, \alpha^n$ пересечения траектории с плоскостью. Тогда x^j — гладкие функции и по t, и по $\alpha^2, \dots, \alpha^n$ (гладкая зависимость от начальных условий). Но $\{\frac{\partial x^i}{\partial t}\}$ есть $\boldsymbol{a}_1$, а $\{\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j}\}$ при $t = 0$ есть вектор $\boldsymbol{e}_j$. Система $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, … $\boldsymbol{e}_n$ линейно независима, так что якобиан вблизи A_0 не равен 0.

При произвольном k воспользуемся индукцией. Считаем, что вблизи A имеются координаты $x^1, \dots, x^n$, для которых $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$ при $i < k$. Пусть $\boldsymbol{a}_k = (X^1 \dots, X^n)$ в этих координатах. Поскольку

$\boldsymbol{a}_i = (0, \ldots, 1_i, 0 \ldots, 0)$, $i < k$, условие $Z = [\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k] = 0$ влечет $Z^j = 0 = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} 1_i$. Это означает, что $\boldsymbol{a}^k$ не меняется в направлении $\boldsymbol{e}_i$ при $i < k$, т.е. $X^j = X^j(x^k, \ldots, x^n)$.

Координаты X^i при $i \geq k$ суть ненулевые, поэтому считаем, что $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots$ независимы. Итак, векторы поля $\boldsymbol{a}_k = (X^1, \ldots, X^n)$ одинаковы в точках $(x_1^1, \ldots, x_1^{k-1}, x^k, \ldots, x^n)$ и $(x_2^1, \ldots, x_2^{k-1}, x^k, \ldots, x^n)$. Считаем, что точке A_0 отвечают координаты

$x^j = 0$. Рассмотрим координатную поверхность $x^1 = \ldots = x^k = 0$, ее точки имеют кординаты $(0, \ldots, 0, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n)$. Через каждую такую точку проведем траекторию поля $\boldsymbol{a}_k$, $\widetilde{r}(t, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n)$, t — параметр по траектории, $\frac{d\widetilde{r}}{dt} = \boldsymbol{a}_k$, остальные α^i — это начальные условия, от которых гладко зависит траектория. Поскольку $\boldsymbol{a}_k$ не зависит от $x^1, \ldots, x^{k-1}$, то для данных $x^1, \ldots, x^{k-1}$ точки $\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i<k} x^i \boldsymbol{e}_i + \widetilde{r}(t)$ — тоже интегральная траектория, ибо $\frac{dr}{dt} = \frac{d\widetilde{r}}{dt} = \boldsymbol{a}_k$, причем $r(0) = (x^1, \ldots, x^{k-1}, 0, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n)$.

Поставим набору $x^1, \ldots, x^{k-1}, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n$ в соответствие точку $\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i<k} x^i \boldsymbol{e}_i + \widetilde{r}(t, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n)$. Имеем $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i$ при $i < k$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \boldsymbol{a}_k$, и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha^i}$ при $i > k$ — некоторые гладкие векгоры (из дифференцируемости траектории по начальным условиям $(0, \ldots, 0, a^{k+1}, \ldots, a^n)$). Таким образом матрица Якоби по крайней мере состоит из гладких функций (из координат $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a^i}$), и ее невырожденность достаточно проверить в точке A, т.е. при $t = 0$. Но при $t = 0$ все указанные частные производные от $\boldsymbol{r}$ — это векторы $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Это означает, что матрица Якоби перехода от $x^1, \ldots, x^n$ к параметрам $(x^1, \ldots, x^{k-1}, t, a^{k+1}, \ldots, a^n)$ невырождена, т.е. указанные параметры — координаты в окрестности точки A. Для них $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i$ при $i \leq k$ (здесь $x^k = t$). □

2.7 Ковекторные поля — линейные дифференциальные формы.

Напоминания из алгебры. V^* — сопряженное пространство — пространство линейных функций на V. В базисе $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in V$ они записываются как $\xi(\boldsymbol{a}) = \xi_i X^i$ $(\boldsymbol{a} = (X^1, \ldots, X^n))$. При этом $\xi_i = \xi(\boldsymbol{e}_i)$. В сопряженном базисе $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in V^*$ $\boldsymbol{\varepsilon}^i(\boldsymbol{a}) = X^i$ и $\xi(\boldsymbol{a}) = \xi_i \boldsymbol{\varepsilon}^i(\boldsymbol{a})$, т.е. $\xi = \xi_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$, ξ_i – координаты ξ, поскольку $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ линейно независимы ($\dim V^* = n$ из изоморфизма пространству строк $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$).

Взаимная сопряженность V и V^* видна из симметрии записи $\xi(\boldsymbol{a}) = \xi_i X^i$: при фиксировании ξ это линейная функция аргумента $\boldsymbol{a} \in V$, при фиксировании $\boldsymbol{a}$ этот вектор — функция линейная на всех $\xi \in V^*$. Поэтому используется и симметричная запись: $\xi(\boldsymbol{a}) =< \xi, \boldsymbol{a} >$. Взаимная сопряженность базисов вытекает из определяющего соотношения $< \boldsymbol{\varepsilon}^i, A)j >= \delta^i_j$.

У нас $V = V_A$, причем A изменяется, и V_A^* определено сразу во всех точках M или карты $U \subset M$. Теперь $A)1, \ldots, A)n$ это не базис в точке, а базисные векторные поля в U.

Пусть $\xi \in V_A^*$ заданы в каждой точке $A \in U$ (или $A \in M$). Говорят, что ξ — поле ковекторов или линейных функций. Оно непрерывное или гладкое, если $\xi_i = \xi_i(A)$ — соответствующего класса функции. Встает вопрос о независимости определения от координатных карт. Решим этот вопрос.

I. $e_i' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A)\alpha$; $\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$; $J = \{\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\} = C$ – это матрица перехода к новым базисным полям.

II. $Y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} X^\alpha$; $\mathcal{J} = \{\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\} = J^{-1} = C^{-1}$. При переходе к новой координатной карте $\xi_i' =< \xi, e_i' >$. Поэтому из [I] немедленно следует [III]:

III. ${\xi'}_i = =< \xi, e_i' > =< \xi, \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A)\alpha > = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \xi_\alpha$.

Следствие: независимость определения гладкости или непрерывности поля ξ от выбора координат.

Координаты ξ преобразуются точно как базисные векторы. Поэтому говорят, что ξ – тензор типа $(1, 0)$, один раз ковариантный (в отличие от вектора a, его координаты преобразуются с помощью матрицы $C^{-1} = \mathcal{J}$; а вектор это контравариантный тензор типа $(0, 1)$).

Примером ξ служит дифференциал функции $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, значение которого на векторе a есть $\frac{\partial f}{\partial x^i} X^i = \frac{df}{da}$ – производная от f по вектору $a = (X^1, \ldots, X^n)$. Часто используют обозначение $grad\, f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ и называют это вектором (в механике и физике). Однако такого вектора нет! В самом деле, $\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial y^i}$ совпадает с III, но вовсе не с преобразованием координат векторов по закону II. Заметим, что в прямоугольных координатах законы II и III совпадают, поскольку для ортогональных матриц $C^{-1} = C^t$.

Поскольку координаты вектора $(X^1, \ldots, X^n)$ обозначаются также $(dx^1, \ldots, dx^n)$, то линейную функцию ξ можно записывать в виде $< \xi, a >= \xi_i dx^i$ — в форме дифференциала. Поэтому ковекторные поля именуют также полями линейных дифференциальных форм (т.е. имеющих форму дифференциала). Заметим, что у нас будут и не только линейные дифференциальные формы.

Не всякая линейная дифференциальная форма ξ есть дифференциал df от некоторой функции, для этого необходимы соотношения $\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i}$.

Простейший пример функции есть $f(A) = x^i(A)$ — i-тая координата A. Для нее $df = dx^i$, $< df, a >= X^i$, поэтому $dx^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i$! Итак, *базисные ковекторные поля* $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ *— это* dx^i.

Отметим: $\boldsymbol{\varepsilon}^i = dx^i$ и $A)i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Уже по III можно заключить, что сопряженные базисы при смене координат должны преобразовываться с матрицей $\mathfrak{J}$ (ибо координаты в V^* преобразуются по III с матрицей $J = \mathfrak{J}^{-1}$). Это независимо получаем из того, что $dx^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i : \boldsymbol{\varepsilon}'^i = dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$.

3 ГЛАВА 3. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ.

Пусть точка A фиксирована на M и $V_A = V$ – касательная плоскость. Обозначаем: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \ldots \in V$, $\xi, \eta \ldots \in V^*$.

Первое определение тензора. Тензор T типа (p, q) — это полилинейная функция от p векторных и q ковекторных аргументов: $T = T(\boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{v}; \xi, \ldots, \eta)$ линейно по каждому отдельному аргументу.

Говорят, что T тензор валентности $p + q$, или p раз ковариантный и q раз контравариантный. Координаты тензора $T^{k,\ldots,l}_{i,\ldots,j} = T(A)i, \ldots, A)j; \boldsymbol{\varepsilon}^k, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^l)$. Всего их n^{p+q} (p нижних индексов и q верхних, каждый меняется от 1 до n).

Лемма 3. *T полностью определяется своими координатами.*

В самом деле, $T(\boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{v}; \xi, \ldots, \eta) = T^{k,\ldots,l}_{i,\ldots,j} X^i \ldots Y^j \xi_k \ldots \eta_l$, ибо это есть $T(X^i A)i, \ldots, Y^j A)j; \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k, \ldots, \eta_l \boldsymbol{\varepsilon}^l)$.

Следствие 1. *Тензоров много: при фиксированном базисе в V каждому тензору отвечает $p+q$-мерная матрица, и наоборот (всего n^{p+q} членов в матрице).*

Замечание 4. *В частности, базисными можно считать "матрицы", имеющие один ненулевой элемент, равный 1, и остальные нулевые. Введенные координаты являются координатами в этом базисе в n^{p+q}-мерном векторном пространстве.*

Заметим, что нас интересуют не все базисы тензорного пространства, а только те, которые порождаются, как указано, тем или иным базисом в основном пространстве V. Их называют *Тензорными базисами.*

Примеры.

1. Тензоры типа (0,0) — числа (и $n^0 = 1$).
2. Ковекторы ξ, $\xi_i = \xi(A)i)$, имели тип $(1, 0)$, валентность 1.
3. Вспомним, что вектор $\boldsymbol{u}$ лежит в $V = V^{**}$, причем $X^i = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon}^i) =< \boldsymbol{\varepsilon}^i, \boldsymbol{u} >$. Тип (0,1).

Другие примеры были в алгебре (преобразования векторных пространств, билинейные функции и т.п.). Еще примеры мы приведем дальше.

Как меняются координаты T? Здесь имеется в виду замена базиса в векторном пространстве V, не обязательно индуцированная заменой локальных координат в окрестности A.
$T'^{k\ldots l}_{i\ldots j} = T^{\gamma\ldots\delta}_{\alpha\ldots\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \cdots \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma} \cdots \frac{\partial y^l}{\partial x^\beta}$ ($J = (\frac{\partial x^i}{\partial y^j})$, $\mathfrak{J} = (\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$ - просто матрицы перехода).

Второе (классическое) определение тензора — это таблицы чисел для каждой системы координат, преобразующиеся по написанному выше закону (внизу p индексов, вверху q, тип (p, q) и т.п; индексы от 1 до n).

Предложение 2. *Оба определения эквивалентны.*

Доказательство. Мы уже получили 2-е из первого. Пусть дан указанный закон преобразования. Берем любой базис в V, по (1) определяем полилинейную функцию (с коэффициентами $T^{k\ldots l}_{i\ldots j}$); согласно этому закону, определение функции не зависит от базиса. □

Тензорное поле: Пусть теперь A меняется и $T^{k\ldots l}_{i\ldots j}$ — функции от A. Требуем их гладкость. Требование не зависит от координат. Итак, имеется два определения тензорного поля на M

1. поле полилинейных функций $T = T(A)$ типа (p, q) с гладко зависящими от A координатами;

2. поле $(p+q)$-мерных матриц (также гладко зависящих от $A \in M$).

Третье определение тензора. T — функционально полилинейный функционал, аргументами которого служат (гладкие) векторные $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots$ и ковекторные $\xi, \eta, \dots$ поля на M, а значениями — гладкие функции $T(\boldsymbol{a}(A), \dots, b(A); \xi(A), \dots, \eta(A))$ от точки $A \in M$.

Функциональная полилинейность означает выполнение двух дистрибутивных законов с функциональными коэффициентам, т.е. если, например, $\boldsymbol{a} = f_1 \boldsymbol{a}_1 + f_2 \boldsymbol{a}_2$, где f_1 и f_2 — гладкие функции, $T(\boldsymbol{a}, \dots \boldsymbol{b}, \xi, \dots, \eta) = f_1(A) T(\boldsymbol{a}_1, \dots, b, \xi, \dots, \eta) + f_2(A) T(\boldsymbol{a}_2, \dots, b, \xi, \dots, \eta)$ Аналогично для всех остальных векторных и ковекторных аргументов.

Это новое определение следует из первого в силу формулы из леммы 1. Здесь предполагается, что если U — любая открытая часть M, то ограничение функционала T на U получается ограничением на U всех аргументов T (т.е. полей $\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}, \xi, \dots, \eta$) и функций — значений T. Поскольку карты задают координаты, из полилинейности T, так же, как в лемме, выводится та же самая формула, из чего заключаем, что из третьего определения следует первое. Следствием является:

Свойство локальности тензорного поля: если $\boldsymbol{a}, \dots \boldsymbol{b}, \xi, \dots, \eta$ и $\boldsymbol{a}', \dots, \boldsymbol{b}', \xi', \dots, \eta'$ — два набора полей, совпадающих в точке A (т.е. $\boldsymbol{a}(A) = \boldsymbol{a}'(A), \dots, \dots, \eta(A) = \eta'(A)$), то и $T(\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}, \xi, \dots, \eta)$ равно значению $T(\boldsymbol{a}', \dots, \boldsymbol{b}', \xi', \dots, \eta')$ в точке A. Таким образом, значения функционала T в точке A зависят от значений полей $\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}, \xi, \dots, \eta$ только в точке A, но не в любых близких к A точках, например, не зависит от производных.

Пример, когда это не так: сопоставим трем векторным полям $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ функцию $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c})$ (скалярное произведение коммутатора двух полей на третье векторное поле). Убедитесь, что это не есть тензорное поле (типа (3,0)).

Примером тензорного поля типа (2,0) служит риманова метрика на многообразии: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_{ij} X^i Y^j$, $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$, или в матричной форме $G' = J^t G J$ (линейная алгебра). Другие формы записи: $dr^2 = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

Матрица G симметрична и положительно определена. Симметричная и неопределенная невырожденая метрика G называется псевдоримановой.

3.1 Общие сведения о тензорах.

Рассматриваем тензор T (поле на M) как полилинейный функционал. Ясно, что имеется операция сложения однотипных тензоров: $T = T_1 + T_2$. Она коммутативна, и для координат имеет место $T^{k\dots l}_{i\dots j} = T_1{}^{k\dots l}_{i\dots j} + T_2{}^{k\dots l}_{i\dots j}$ Тензор в точке $A \in M$ можно умножить на число λ, а глобально — на функцию $\lambda = \lambda(A)$. При этом (поскольку координаты — это значения T на базисных векторных и ковекторных аргументах) имеем: $(\lambda T)^{k\dots l}_{i\dots j} = \lambda T^{k\dots l}_{i\dots j}$. .

Все тензорные поля типа (p,q) по отношению к этим операциям составляют *модуль над кольцом функций* (дистрибутивные законы с функциональными коэффициентами), а в отдельной точке — n^{p+q}-мерное векторное пространство.

3.2 Произведение тензоров.

Для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ в анализе определены два произведения (от одного и от двух переменных, соотв.): $f(x)g(x)$ и $f(x)g(y) = F(x,y)$. Чтобы отличать второе от первого, его целесообразно обозначать иным символом, именно $\otimes$: $f \otimes g = f(x)g(y)$. При умножении тензоров употребляется именно второе. Если T_1 и T_2 — тензоры типов (p_1, q_1) и (p_2, q_2), то определен тензор $T = T_1 \otimes T_2$ суммарного типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$: $T(\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{d}; \xi, \dots, \eta, \zeta, \dots, \delta) = T(\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}; \xi, \dots, \eta) T(\boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{d}; \zeta, \dots, \delta)$.

Для координат очевидно соотношение $T^{m\dots p\, q\dots r}_{i\dots j\, k\dots l} = T_1{}^{m\dots p}_{i\dots j} T_2{}^{q\dots r}_{k\dots l}$. Аналогично определяется произведение любого конечного числа тензоров: $T = T_1 \otimes \dots \otimes T_s$, типов (p_i, q_i). Результат есть тензор суммарного типа $(p_1 + \dots + p_s, q_1 + \dots + q_s)$. Очевидны свойства:

1. ассоциативность $(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$;

2. дистрибутивность по каждому из сомножителей, например $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) \otimes T_3 = \lambda_1 (T_1 \otimes T_2) + \lambda_2 (T_2 \otimes T_3)$.

Координаты $T = T_1 \otimes \dots \otimes T_s$ получаются перемножением всевозможных координат $T_1, \dots, T_s$ (с суммарным количеством индексов у T внизу и вверху).

Для примера рассмотрим на карте тензор $T = \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j \otimes \boldsymbol{e}_k$, он имеет тип $(2,1) = (1,0)+(1,0)+(0,1)$. Для векторных полей $u = (X^1, \ldots, X^n), v = (Y^1, \ldots, Y^n)$ и ковекторного $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеем $T(u, v, \xi) =< \varepsilon^i u >< \varepsilon^j v >< \xi \boldsymbol{e}_k >= X^i Y^j \xi_k$.

Теорема 10. *На карте $U \subset M$ среди тензоров типа (p,q) базисными будут $\varepsilon^i \otimes \ldots \otimes \varepsilon^j \otimes \boldsymbol{e}_k \ldots \otimes \boldsymbol{e}_l$*

Доказательство. Действительно, их n^{p+q} всего. В отдельной точке пространство тензоров n^{p+q}-мерно, поэтому достаточно убедиться, что любой T есть их линейная комбинация (линейная независимость их окажется следствием, ибо иначе размерность линейной оболочки была бы меньше n^{p+q}). Имеем $T(u, \ldots, v; \xi, \ldots, \eta) = T_{i \ldots j}^{k \ldots l} X^i \ldots Y^j \xi_k \ldots \eta_l = T_{i \ldots j}^{k \ldots l} < \varepsilon^i u > \ldots < \varepsilon^j v >< \xi \boldsymbol{e}_k > \ldots < \eta \boldsymbol{e}_l >= T_{i \ldots j}^{k \ldots l} \varepsilon^i \otimes \ldots \otimes \varepsilon^j \otimes \boldsymbol{e}_k \ldots \otimes \boldsymbol{e}_l$. То есть $T = T_{i \ldots j}^{k \ldots l} \varepsilon^i \otimes \ldots \otimes \varepsilon^j \otimes \boldsymbol{e}_k \ldots \otimes \boldsymbol{e}_l$ на любом наборе аргументов. □

Следствие 2. $T_{i \ldots j}^{k \ldots l} = T(\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_j, \varepsilon^k, \ldots, \varepsilon^l)$ *— настоящие координаты T в пространстве тензоров относительно указанного базиса.*

3.3 Операция свертки.

Дадим определение на примере тензора типа (3,2), $T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}; \xi, \eta)$. Выделяется по одному месту среди векторов и ковекторов, скажем, 2-е и 1-е. Определяется новый тензор sT формулой $T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \eta) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A})i, \boldsymbol{v}; \varepsilon^i, \eta)$ (по i суммирование). Ясно, что sT — полилинейный функционал типа $(3-1,\, 2-1) = (2,1)$. Но почему он не зависит от карты, на которой использованы координатные поля $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n$ и $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$?

Докажем независимость: $(sT)'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \eta) = T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{v}, \varepsilon'^i, \eta) = T(\boldsymbol{u}, \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \boldsymbol{A})\alpha, \boldsymbol{v}; \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta} \varepsilon^\beta, \eta) =$
$= T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A})\alpha, \boldsymbol{v}, \varepsilon^\beta, \eta) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta} = T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A})\alpha, \boldsymbol{v}, \varepsilon^\beta, \eta) \delta^\alpha_\beta = T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A})\alpha, \boldsymbol{v}, \varepsilon^\alpha, \eta) = sT(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \eta)$.

Полученный тензор sT называется *сверткой* T по выделенным векторному и ковекторному аргументу. Очевидно, что такая операция применима к тензорам любых типов (p,q) (при $pq \neq 0$, конечно), результат есть тензор типа $(p-1, q-1)$. Очевидны свойства:

1. $s(\lambda T) = \lambda sT$
2. $s(T_1 + T_2) = sT_1 + sT_2$
3. $(sT)^k_{ij} = T^{\alpha k}_{i \alpha k}$ — суммирование по α от 1 до n на тех местах индексов, что соответствуют выделенным аргументам в T (здесь в примере это 2-е и 1-е места для тензора типа (3,2)).

Примеры.

1. тензорное поле операторов $T : V_A \to V_A, A \in M$ имеет тип (1,1), sT — тип $(0,0)$, т.е. функции точки $A \in M$, она равна $T^\alpha_\alpha = a^1_1 + \ldots a^n_n$ – след матричного оператора. Следствие : след матрицы оператора — инвариант (не зависит от координат, в которых написана матрица). Этот факт известен и из линейной алгебры.
2. риманова метрика G – тензор типа $(2,0)$, $G(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = g_{ij} u^i v^j$.

4 ГЛАВА 4 КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ.

Далее довольно долго мы будем рассматривать тензоры только типа $(p, 0)$, символ T заменим на φ, $\varphi = \varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p)$ — полилинейная функция (на V_A). Буквой σ обозначаем перестановку индексов $(1, \ldots, p)$. Через $\varphi\sigma$ обозначаем функцию: $\varphi\sigma(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p) = \varphi(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(p)})$ — значения φ, но от переставленных в ином порядке аргументов. Соответствие $\varphi \to \varphi\sigma$ линейно: если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то $\varphi\sigma = \varphi_1\sigma + \varphi_2\sigma$, а $\lambda(\varphi\sigma) = (\lambda\varphi)\sigma$. Тем самым $\varphi \to \varphi\sigma$ — есть линейный оператор в пространстве тензоров типа $(p, 0)$.

Определение 3. Функция φ симметрична (кососимметрична), если $\varphi\sigma = \varphi$ (соответственно $\varphi\sigma = (-1)^\sigma\varphi$, где $(-1)^\sigma$ – знак σ), причем это — для всех перестановок.

Например, риманова (или псевдориманова) метрика $G = \{g_{ij}\}$ — симметричный тензор типа $(2, 0)$.

Теорема 11. *φ — симметрична $\Leftrightarrow$ координаты $\{\varphi_{i_1\ldots i_p}\}$ не изменяются при перестановках индексов. Аналогично, φ — кососимметрична $\Leftrightarrow$ $\varphi_{i_1\ldots i_p} = (-1)^\sigma\varphi_{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_p)}$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ верна, т.к. $\varphi_{i_1\ldots i_p} = \varphi(A)i_1, \ldots, A)i_p)$. Докажем обратное для косой симметрии. Пусть координаты кососимметричны. Имеем $\varphi\sigma(a_1, \ldots, a_p) = \varphi(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(p)}) = \varphi_{i_1\ldots i_p}X^{i_1}_{\sigma(1)}\ldots X^{i_p}_{\sigma(p)}$, где $a_i = (X^1_i, \ldots, X^n_i)$. Также $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi_{i_1\ldots i_p}X^{i_1}_1\ldots X^{i_p}_p = \varphi_{i_1\ldots i_p}X^{i_{\sigma(1)}}_{\sigma(1)}\ldots X^{i_{\sigma(p)}}_{\sigma(p)}$.

Справа мы поменяли местами множители, указанные в середине равенства. Переставим индексы у $\varphi_{i_1\ldots i_p} = (-1)^\sigma\varphi_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(i_p)}}$ тоже. Получим $(-1)^\sigma\varphi_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(i_p)}}X^{i_{\sigma(1)}}_{\sigma(1)}\ldots X^{i_{\sigma(p)}}_{\sigma(p)}$. По индексам $i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(i_p)}$ происходят суммирования от 1 до n, и их можно заменить на $i_1, \ldots, i_p$. Но тогда второе выражение совпадает с правой частью первого с точностью до знака $(-1)^\sigma$. □

4.1 Операции симметрирования и альтернирования.

Для любой формы φ типа $(p, 0)$ пусть $\varphi_{Sym} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma \varphi\sigma$ (среднее арифметическое значений φ по всем перестановкам аргументов). Аналогично, $\varphi_{Alt} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi\sigma$.

Замечание 5. *Из самого определения операций $\varphi_{Sym}, \varphi_{Alt}$ следует, что координаты $(\varphi_{Sym})_{i_1,\ldots,i_p} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma \varphi_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(i_p)}}$ — среднее арифметическое координат φ с тем же, но переставленным всеми способами набором индексов. Аналогично, координаты φ_{Alt} — альтернированные средние арифметические координат φ.*

Обе операции, очевидно, линейны: $(\varphi_1+\varphi_2)_{Sym} = \varphi_{1\,Sym}+\varphi_{2\,Sym}$, $\lambda\varphi_{Sym} = (\lambda\varphi)_{Sym}$ и аналогично для операции альтернирования. Это следует из линейности $\varphi \mapsto \varphi\sigma$ и операции $\sum_\sigma$.

Теорема 12. *Для любой φ*

1. *φ_{Sym} — симметричная, а φ_{Alt} — кососимметричная функции;*

2. *$(\varphi\sigma)_{Sym} = \varphi_{Sym}$, но $(\varphi\sigma)_{Alt} = (-1)^\sigma\varphi_{Alt}$;*

3. *φ — симметрична (кососимметрична) $\Leftrightarrow$ $\varphi_{Sym} = \varphi$ ($\varphi_{Alt} = \varphi$).*

Доказательство. Доказательство проведем для операции Alt.

1). Имеем $\varphi_{Alt}\sigma_0 = (\frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi\sigma)\sigma_0 = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi(\sigma\sigma_0) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma'=\sigma\sigma_0}(-1)^\sigma(-1)^{\sigma_0}(-1)^{\sigma_0}\varphi\sigma' = (-1)^{\sigma_0}\frac{1}{p!}\sum_{\sigma'}(-1)^{\sigma'}\varphi\sigma' = (-1)^{\sigma_0}\varphi_{Alt}$.

2). $(\varphi\sigma_0)_{Alt} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma(\varphi\sigma_0)\sigma = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi(\sigma_0\sigma) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma'=\sigma_0\sigma}(-1)^\sigma(-1)^{\sigma_0}(-1)^{\sigma_0}\varphi\sigma' = (-1)^{\sigma_0}\frac{1}{p!}\sum_{\sigma'}(-1)^{\sigma'}\varphi\sigma' = (-1)^{\sigma_0}\varphi_{Alt}$.

Импликация $\Leftarrow$ в 3) следует из 1).

Докажем $\Rightarrow$. Имеем $\varphi_{Alt} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi\sigma = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma(-1)^\sigma\varphi = \varphi$. Теорема доказана. □

4.2 О пространствах кососимметрических тензоров.

Фиксируем $A \in M^n$, пусть $V = V_A$. Пространство Φ_p^q всех тензоров типа (p, q) имеет размерность n^{p+q}. Для полилинейных функций на V имеем $dim\Phi_p = n^p$.

Пусть Φ_p^{Alt} — только кососимметричные функции — тензоры, $\Phi_p^{Alt} \subset \Phi_p$. Какова размерность Φ_p^{Alt}?

При $p = 0$ – Φ_0^{Alt} константы, и $dim\Phi_0^{Alt} = 1$.

При р = 1 – $\Phi_1^{Alt} = V^*$ — линейные функции одного векторного аргумента, они удовлетворяют определению косой симметрии "пустым образом". Можно их считать и симметричными — это не имеет значения. Итак, $dim\Phi_1^{Alt} = n$.

Но уже $\Phi_2^{Alt} \neq \Phi_2$, а только часть (причем, как легко установить, $\Phi_2 = \Phi_2^{Sym} \oplus \Phi_2^{Alt}$ — прямая сумма). Разумеется, тем более $\Phi_p^{Alt} \neq \Phi_p$ при остальных p.

Теорема 13. *$dim\Phi_n^{Alt} = 1$, $dim\Phi_p^{Alt} = 0$ при $p > n$.*

Доказательство. Обратимся к координатам $\varphi_{i_1,\dots,i_p} = \varphi(\boldsymbol{A})i_1, \dots, \boldsymbol{A})i_p)$. При $p > n$ среди индексов обязательно встретятся равные, и в силу косой симметрии $\varphi_{i_1,\dots,i_p} = 0$, следовательно, $\varphi = 0$. При $p = n$ $\varphi_{i_1,\dots,i_p}$ нулевые при повторении индексов, а без повторений $\varphi_{i_1,\dots,i_p} = \pm\varphi_{1,\dots,p}$. Таким образом, имеется лишь одна существенная координата, чем и доказывается теорема. □

Вспомним, что $\varphi_{i_1,\dots,i_p}$ — координаты φ в Φ_p, но не в Φ_p^{Alt}, $\varphi = \varphi_{i_1,\dots,i_p}\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p} = \varphi_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$ (т.е. для тензорного поля при переменной точке A). Но базис $\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p}$ лежит вне Φ_p^{Alt}. Постараемся найти базисы в Φ_p^{Alt}. Для этого введем новую операцию.

4.3 Операция внешнего умножения.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ — кососимметричные функции, $\varphi_i \in \Phi_{p_i}^{Alt}$. Операция $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_t = (\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_t)_{Alt}$ дает функцию $\varphi \in \Phi_p^{Alt}$, где $p = p_1 + \dots + p_t$. Она называется *внешним произведением* всех φ_i, (поскольку она определяется посредством операции $\otimes$ внешней для Φ_p^{Alt}).

Свойства операции $\wedge$:

1. Полилинейность (линейность по каждому множителю): $\varphi_1 \wedge \dots \wedge (\lambda_1\varphi_{i_1} + \lambda_2\varphi_{i_2}) \wedge \dots \wedge \varphi_t = \lambda_1\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_t + \lambda_2\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_t$.

2. Косая коммутативность. $\varphi_2 \wedge \varphi_1 = (-1)^{pq}\varphi_1 \wedge \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \Phi_p^{Alt}$, $\varphi_2 \in \Phi_q^{Alt}$. Пусть $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, тогда $\varphi_2 \otimes \varphi_1 = \varphi\sigma$, где σ — перестановка последующих q аргументов перед первыми p, ее четность равна четности pq, и $\varphi_2 \wedge \varphi_1 = (\varphi_2 \otimes \varphi_1)_{Alt} = (\varphi\sigma)_{Alt} = (-1)^{pq}\varphi_{Alt} = (-1)^{pq}\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

3. Ассоциативность. Как известно из алгебры, ее достаточно доказать в форме $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$.

   Лемма 4. *Пусть $\varphi(a_1, .., a_p\, a_{p+1}, \dots, a_N)$ —полилинейная функция и $\overline{\varphi}$ — ее альтернация по первым p аргументам (при фиксировании остальных). Тогда $\overline{\varphi}_{Alt} = \varphi_{Alt}$. То же верно, если $\overline{\varphi}$ — альтернация φ по последнему пакету аргументов.*

   Доказательство. В самом деле,
   $\overline{\varphi}_{Alt} = (\frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\varphi\sigma)_{Alt} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma(\varphi\sigma)_{Alt} = \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma(-1)^\sigma\varphi_{Alt} = \varphi_{Alt}$
   (в этой выкладке σ —перестановки $1, 2, \dots, p$). □

   В нашем случае пусть $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3$, а $\overline{\varphi} = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)_{Alt} \otimes \varphi_3 = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \otimes \varphi_3$. Тогда $\overline{\varphi}_{Alt} = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3$ и по лемме $\overline{\varphi}_{Alt} = \varphi_{Alt} = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$. Аналогично доказывается, что $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ (с использованием второй половины леммы.

Следствие 3. *Если в выражении $\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p} = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ есть повторяющийся индекс, то это выражение равно нулю.*

Однако, другой пример: $\varphi = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$, $\varphi \wedge \varphi = 2dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \neq 0$.
(Отличие от нуля здесь вытекает из следующей теоремы).

Теорема 14. *Базис в пространстве Φ_p^{Alt} составляют $\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p} = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ для всевозможных наборов индексов $i_1 < \dots < i_p$. Координаты кососимметричного тензора $\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_p}\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p}$ в этом базисе суть $\omega_{i_1 \dots i_p} = p!\varphi_{i_1 \dots i_p}$.*

Следствие 4. *$dim\,\Phi_p^{Alt} = C_n^p$ (напомню, что $\Phi_p^{Alt} \neq 0$ лишь при $p \le n$).*

Отметим, что индексы $i_1, \ldots, i_p$ должны быть различны в силу косой коммутативности, и по той же причине их можно упорядочивать по возрастанию.

Доказательство. Ясно, что каждый кососиметрический тензор есть линейная комбинация тензоров, полученных альтернированием базисных тензоров $\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_p}$, т.е. $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

В данной линейной комбинации кососимметрических тензоров сгруппируем члены с одинаковым набором индексов. Каждая группа имеет вид $c\sum_\sigma (-1)^\sigma \varepsilon^{\sigma(i_1)} \otimes \cdot \otimes \varepsilon^{\sigma(i_p)}$, $i_1 < \cdots < i_p$, $c = \varphi_{i_1 \ldots i_p}$. Умножив и разделив на $p!$, получим $p!c(\frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \varepsilon^{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\sigma(i_p)}) = p!c\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$

(?)Если $\varphi = \varphi_{Alt} \in \Phi_p^{Alt}$, то $\varphi = \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p})_{Alt} = \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. В последнем выражении индексы различны (для ненулевых членов суммы). Сгруппируем слагаемые по наборам индексов, отличающимся лишь на перестановки. Тогда слагаемых, содержащих один и тот же набор индексов $\{i_1 \ldots i_p\}$, но переставленных другим способом, будет $p\,!$. Меняя порядок индексов, мы не меняем знака слагаемого (поскольку кососимметрична как операция $\wedge$, так и коэффициенты $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$), и, в конечном итоге, $\varphi = p!\varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$. Остается доказать линейную независимость тензоров $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

Предположим, что в сумме $\lambda_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ не все коэффициенты $\lambda_{i_1 \ldots i_p}$ нулевые. Рассмотрим числа $\varphi_{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!}\lambda_{i_1 \ldots i_p}$ и $\varphi_{k_1 \ldots k_p}$, полученные упорядочиванием индексов. Они равны нулю при совпадении некоторых индексов и $\pm\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ в зависимости от знака перестановки при упорядочивании индексов по возрастанию. Тогда $\varphi = \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}$ — ненулевой кососимметричный тензор (поскольку имеет отличные от нуля координаты). Но по предыдущему $0 \neq \varphi = p!\varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \lambda_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. □

4.4 Пространства дифференциальных форм Ω_p. Преобразование базисов и координат

Кососимметричные тензорные поля валентности $(p, 0)$ на M^n (как элементы Φ_p^{Alt} при переменной точке $A \in M^n$) называются ***дифференциальными формами степени*** p. Их множество обозначаегся $\Omega^p(M)$, или, для открытых $U \subset M$, $\Omega^p(U)$. Вместо символа φ будем использовать $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$. Здесь функции $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ — координаты (на карте U) формы ω в базисе $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ для всех $i_1 < \ldots . < i_p$ в подпространствах $\Phi^p_{Alt} \subset \Phi$ в каждой точке $A \in U$. Координаты в базисах $dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}$ пространства Φ_p формы ω равны $\frac{1}{p!}\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(A)i_1 \ldots i_p)$.

Предыдущая запись $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ получена на карте U с координатами $x^1 \ldots x^n$. На карте V с координатами $y^1, \ldots, y^n$ запись изменится: $\omega = \omega'_{j_1 \ldots j_p} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_p}$ (всегда $j_1 < \ldots < j_p$, $i_1 < \ldots < i_p$).

Начнем с примера. Пусть $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p)$ — кососимметричная функция (тензор типа $(p, 0)$), $\boldsymbol{a}_i = (X_i^1 \ldots X_i^n)$ — координаты берутся в некотором базисе $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n \in V$ (где $V = V_A$, при $A \in M^n$). Сначала пусть $p = n$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \varphi(\boldsymbol{A})i_1, \ldots, \boldsymbol{A})i_n) X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$. В этой сумме числа $X_j^{i_j}$ взяты по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы из координат $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ($i_\alpha \neq i_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ в силу косой симметрии φ), а коэффициенты $\varphi(A)i_1, \ldots, i_p)$ отличаются лишь знаком, как при вычислении определителя Δ из координат $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Итак, $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \Delta\varphi(\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n)$.

Поскольку $\omega'_{j_1 \ldots j_p} = p!\,\omega(\boldsymbol{e}'_{j_1} \ldots \boldsymbol{e}'_{j_p})$, $j_1 < \ldots < j_p$, а при $p = n$ имеем $(j_1, \ldots, j_n) = (1, \ldots, n)$, и координаты $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ составляют матрицу перехода J (матрицу Якоби для $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$, получаем:

Следствие 5. *$\omega'_{1 \ldots n} = |J|\omega_{1, \ldots, n}$, где $|J| = \det J$.*

Далее, $\dim \Phi_n^{Alt} = 1$, в нем старый базис есть $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, а новый $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Базисы преобразуются "наоборот" по сравнению с координатами, поэтому имеем

Следствие 6. $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \frac{1}{|J|}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = |\mathcal{J}|\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

Заметим, что в силу одномерности базисы Φ_n^{Alt} содержат по одному элементу, матрицей перехода к новому базису служит число $|J|$, а обратной матрицей — $|\mathcal{J}| = \det \mathcal{J}$.

Рассмотрим теперь любые $p < n$. В этом случае $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p) = \Delta^{i_1 \cdots i_p}\varphi(\boldsymbol{A})i_1, \ldots, \boldsymbol{A})i_p)$, где $\Delta^{i_1 \cdots i_p}$ — минор матрицы из n строк и p столбцов, составленной координатами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$, причем расположенный в строках $i_! < \ldots < i_p$. В матрице $J = \{\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\}$ пусть i — номер строки, j — номер столбца. Поскольку $\omega'_{j_1 \ldots j_p} = p!\,\omega(\boldsymbol{e}'_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}'_{j_p})$ (все выводы делаются при упорядоченных по возрастанию индексах!), то:

Следствие 7. $\omega'_{j_1\ldots j_p} = |J^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}|\omega_{i_1\ldots i_p}$.

Здесь $|J^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}|$ – минор матрицы J, расположенный в строках $i_1 < \ldots < i_p$ и столбцах $j_1 < \ldots < j_p$. Так преобразуются координаты тензоров в Ω^p.

Остается найти преобразование базисных полей. (Можно этого не делать, ибо обратно $\omega_{j_1\ldots j_p} = |\mathfrak{J}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}|$. Отсюда вытекает и "любопытное" следствие приведенное ниже.) Имеем:

$dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_p} = (\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\alpha_a}} dx^{\alpha_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{\alpha_p}} dx^{\alpha_p}) = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{\alpha_p}} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p}$.

В этом выражении участвуют элементы матрицы из строк $j_1 < \ldots < j_p$, индексы α_t пока не упорядочены. Фиксируем для них набор $i_1 < \ldots < i_p$. Учитывая смены знака при собирании подобных членов к базисному тензору $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, получим:

Предложение 3. *$dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p} = |\mathfrak{J}|^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Здесь $|\mathfrak{J}|^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$ — минор матрицы $\mathfrak{J} = J^{-1}$, стоящий в строках $j_1 <..,< j_p$ и столбцах с номерами $i_1 < \ldots < i_p$.*

Любопытное следствие. Квадратная матрица перехода (размера $C^p_n \times C^p_n$) от $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ к $dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}$ (предполагаем, что базисы в Φ^p_{Alt} по какому-то правилу упорядочены) состоит из миноров порядка p матрицы $\mathfrak{J}$, в то время как обратная к ней — из таких же миноров матрицы J ! (количество миноров $(C^p_n)^2$).

4.5 Об ориентации многообразий.

Матрица Якоби J преобразования координат всегда невырождена. Скажем, что карты U и V в M ориентированы одинаково, если в точках пересечения $|J| > 0$. Если $U \cap V$ — связное множество, то $|J|$ не меняет знак, следовательно, сменив порядок координат в V, (чему ответит смена порядка столбцов в J), можно всегда добиться совпадения ориентаций U и V (этого нельзя сделать, вообще говоря, если $U \cap V$ не связно: пример — лист Мебиуса).

Связное многообразие называется *ориентируемым*, если на нем существует *ориентирующий атлас* – атлас с одинаково ориентированными соседними картами. В противном случае многообразие неориентируемо. Два ориентирующих атласа задают одну и ту же ориентацию, если их объединение образует ориентирующий атлас. (Несвязное многообразие ориентируемо, если ориентируема каждая компонента. Но в несвязном многообразии ориентации компонент не сравнимы, и поэтому говорят об ориентации только связных многообразий.)

Например, сфера $\mathbb{S}^n$ ориентируема (сли $n > 1$, на ней есть две карты со связным пересечением; для $\mathbb{S}^1$ надо взять по крайней мере три карты). Лист Мебиуса (двумерное многообразие, если его рассматривать без края) — неориентируемое многообразие. Поверхность тора ориентируема. Неориентируемы проективная плоскость, бутылка Клейна и другие поверхности, содержащие в себе лист Мебиуса.

Любопытное замечание. Если наше 3-мерное пространство не ориентируемо, то космонавт, совершив далекое путешествие, может вернуться зеркально отраженным, нам он покажется необычным, а ему — наоборот мы.

Можно дать иное определение ориентируемости. Под перенесением базиса векторов вдоль кривой в M будем понимать непрерывное семейство базисов (касательных) векторов, определенных в каждой точке кривой (т.е. базисов пространств V_A для точек A на кривой). Пусть A_0 и A_1 — две точки, соединяем их путями, и переносим базисы вдоль путей. Связное многообразие назовем *ориентируемым*, если при всех перенесениях данного базиса из A_0 в A_1 будем получать одинаково ориентированные базисы в A_1 (причем это для любых пар точек $A_0, A_1 \in M$). Равносильно, многообразие ориентируемо, если при любых обнесениях базиса по замкнутым путям (петлям) в исходной точке будут получаться базисы той же ориентации. В противном случае многообразие назовем неориентируемым. Поскольку ориентацию обносимого базиса можно сравнивать с ориентациями карт, встречающихся по пути, то это определение ориентируемости многообразия совпадает с данным выше в терминах атласа.

Определение 4. Если M ориентируемо, то его ориентацией называется выбор атласа из согласованных по ориентации карт (выбор ориентирующего атласа). На связном M может быть либо две ориентации, либо ни одной (если M не ориентируемо).

Если M ориентировано выбором атласа, то некоторая карта U с координатами $(x^1, ..., x^n)$ называется положительно ориентированной (или положительной), если ее ориентация совпадает с ориентациями пересекающихся с ней карт атласа. В противном случае карта называется отрицательно ориентированной.

Теорема 15. *Многообразие M^n тогда и только тогда ориентируемо, когда существует дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(M)$, отличная от нуля в каждой точке $A \in M$ (как тензор на V_A).*

Доказательство. Если такая форма существует (она называется *ориентирующей* и также *формой объема*, см. дальше), то на любой связной карте $U \subset M$ она записывается как $\omega_{1\ldots n} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, причем функция $\omega_{1\ldots n}$ всюду отлична от нуля. Назовем карту "положительной", если $\omega_{1\ldots n} > 0$. Если это не так, сменим, например, порядок x^1 и x^2 на карте U, получим (формально) новую карту, на которой $\omega'_{1\ldots n} = -\omega_{1\ldots n}$. Итак, существует атлас из "положительных" карт. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ — две такие карты. Для них $\omega_{1\ldots n} > 0$ и $\omega'_{1\ldots n} > 0$, следовательно, $|J| > 0$. Таким образом, все карты атласа одинаково ориентированы и дают ориентацию M.

Наоборот, пусть M ориентируемо. Воспользуемся тем, что на M имеется некоторая риманова метрика $G = \{g_{ij}\}$. Определим на M форму ω, задав ее на каждой карте формулой $\omega = \varepsilon\sqrt{\det G} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, где $\varepsilon = 1$, если карта $(x^1, \ldots, x^n)$ положительно ориентирована, и $\varepsilon = -1$ в противном случае. На соседней карте $\omega = \varepsilon'\sqrt{\det G'}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Эти формы совпадают на пересечении: $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \det J\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, $G' = J^t G J$, поэтому $\sqrt{\det G'} = |\det \mathcal{J}|\sqrt{\det G}$, $\det \mathcal{J} = (\det J)^{-1}$. Если $\varepsilon = \varepsilon'$, оба детерминанта положительны и формы совпадают. Если $\varepsilon' = -\varepsilon$, $\det J < 0$, так что $|\det J| = -\det J$, и с учетом знаков ε и ε' снова получим равенство.

Итак, ориентирующая форма ω определена на всем многообразии, и везде отлична от нуля (поскольку $\det G > 0$).

Замечание 6. *Для построения формы объема, не опирающегося на существование метрики, можно воспользоваться существованием разбиения единицы (φ_i) для (локально конечного) атласа из положительно ориентированных карт U_i. Именно, в каждой карте U_i возьмем n-форму $\varphi_i dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Сумма этих форм определена в каждой точке многообразия и положительна в каждой точке. (Если фиксировать карту для данной точки, то координата формы ω в ней будет $\sum \varphi_i \det J_i$, где $\det J_i$ – определитель перехода от i-ой карты к данной в данной точке.)*

□

4.6 Многообразия с краем и ориентация края ориентируемого многообразия

Определение 5. Хаусдорфово пространство M со счетной базой называется *n-мерным многообразием с краем*, если каждая точка M имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству замкнутого полупространства $\mathbb{R}^n_+$.

Точки M делятся на *внутренние* (имеющие окрестности гомеоморфные $\mathbb{R}^n$) и *Точки края* (с окрестностями гомеоморфными $\mathbb{R}^n_+$).

Замечание 7. *Точка не может быть одновременно точкой края и внутренней. Это следствие теоремы Брауэра об инвариантности области: в $\mathbb{R}^n$ подмножество гомеоморфное открытому подмножеству само открыто.*

В гладком случае – это следствие теоремы об обратном отображении.

Гладкая структура в M задается так же, как для многообразий без края: ориентирующим атласом (якобианы на пересечении карт положительны) или ориентациями касательных плоскостей непрерывно зависяшими от точки.

Точки края образуют *край* ∂M^n многообразия M^n. Край сам, очевидно, является гладким $(n-1)$-мерным многообразием.

Определение 6. Компактное многообразие без края называется *замкнутым*, а некомпактное связное многообразие без края – *открытым.*

Теорема 16. *Край ориентируемого многообразия ориентируем.*

Доказательство. Покажем, что ориентация ∂M может быть однозначно определена ориентацией M^n (такая ориентация ∂M^n называется согласованной с ориентацией M^n).

Для доказательства берем точки $A \in \partial M^n$, выбираем на ∂M^n вокруг A координаты $x^2, \ldots, x^n$. Поскольку окрестность A в M^n диффеоморфна полупространству, координаты $x^2, \ldots, x^n$ на ∂M^n продолжаются в M^n до координат $x^1, \ldots, x^n$ вокруг A так, что ∂M^n отвечает условию $x^1 = 0$. Сменой знака можно добиться, чтобы внутренним точкам M^n отвечало условие $x^1 < 0$. Наконец, будем считать, что координаты $x^1, \ldots, x^n$ имеют положительную ориентацию в M (этого можно добиться, например, сменой знака у x^2).

Пусть $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — другая такая же карта вблизи A. Поскольку матрица Якоби $J = \{\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n$ к $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, а векторы $\boldsymbol{A})i$ и $\boldsymbol{e}'_i$, $i \geq 2$, касаются ∂M^n и координата вектора $\boldsymbol{e}'_1$ по вектору $\boldsymbol{A})1$ положительна, то матрица J обладает тем свойством, что $J_{i1} = 0$ при $i \geq 2$ и $J_{11} > 0$. Пусть J_{n-1} – подматрица, получаемая из J выбрасыванием первого столбца и первой строки. Так как $\det J > 0$, то и $\det J_{n-1} > 0$. Это означает, что на ∂M^n получен ориентирующий атлас. Возникшую ориентацию на ∂M^n и считаем согласованной с данной ориентацией M^n. □

4.7 Внешнее дифференцирование.

Известен оператор $d : \Omega^0 \to \Omega^1$, для $f(x) \in \Omega^0$: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \in \Omega^1$, $\omega = df$ — градиентная линейная форма. Ее определение не зависит от системы координат: $\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}) dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} (\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i) = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$ – получилась такая же запись этой формы в другой системе координат.

Теорема 17. *Для любого $k \leq n$ существует и единственен оператор $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, обладающий свойствами:*

1. *линейность: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, $d\lambda\omega = \lambda d\omega$*
2. *$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, где $\omega_1 \Omega^p$, а $\omega_2 \in \Omega^q$*
3. *при $k = 0$ оператор совпадает с $d : \Omega^0 \to \Omega^1$, т.е. с дифференциалами функций;*
4. *$d(df) = 0$ для любой функции $f \in \Omega^0$.*
5. *при $U \subset V$ и $\omega \in \Omega^k(V)$ ограничение $d\omega$ на U совпадает с образом d ограничения ω на U. Последнее свойство называется свойством локальности d.*

Определение 7. Оператор d называется *внешним дифференцированием*, а записаный в координатной форме (см. ниже) — иногда и кососимметричным *градиентом* формы ω (альтернированный градиент тензора).

Доказательство. Единственность достаточно установить на каждой карте (тогда на пересечениях должны быть совпадения, и d будет и глобально единственным). В силу 1) достаточно установить это для ω вида $f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, а в силу 2) — для f и dx^i, но в силу 3) df — дифференциал, а в силу 4) $d(dx^i) = 0$. *Существование* достаточно доказать на картах, причем хотя бы в одной системе координат (на карте). Тогда в силу 5) дифференциал d будет существовать на пересечениях карт, причем в силу единственности — один и тот же при ограничении с обеих карт. Следовательно, d будет определен по всему M^n.

В силу 1) достаточно определить d для форм ω вида $f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Определим $d(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})$ как $d\omega = df \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_k}$. При этом 1) выполнено автоматически, а также 3) и 5).

Проверим 2). Достаточно взять $\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ и $\omega_2 = g dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$ ($p+q = k, i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$). Имеем $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d((f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \wedge (g dx^{j_1} \ldots \wedge dx^{j_q}) = d(fg) \wedge (dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) = (g df + f dg) \wedge (dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) = (df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}) + f dg \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \ldots \wedge dx^{j_q} = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p (f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dg \wedge dx^{j_1} \ldots \wedge dx^{j_q}) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, что и требовалось.

Проверим 4). Имеем $df = \xi_i dx^i$, где $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $d(df) = d\xi_i \wedge dx^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$, сумма по всем парам (i, j). Если $i = j$, то слагаемое нуль, т.к. $dx^i \wedge dx^i = 0$. Если $i \neq j$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j$, т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, а $dx^\alpha \wedge dx^\beta = -dx^\beta \wedge dx^\alpha$. □

4.8 Вид операции d в координатах.

Для произвольной формы $\omega \in \Omega^1$ (не обязательно дифференциала функции), $\omega = \xi_i dx^i$, запишем $d\omega = d\xi_i \wedge dx^i = \xi_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$, $\alpha < \beta$, где $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta}$. Аналогичная формула имеет место для всех форм $\omega \in \Omega^k$. Пусть $\omega = \omega_{j_1 \ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$, $j_1 < \ldots < j_k$. Имеем $d\omega = (\frac{\partial \omega_{j_1 \ldots j_k}}{\partial x^i} dx^i) \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = \xi_{i_1 \ldots i_{k+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}}$, $i_1 < \ldots < i_{k+1}$ ($\xi_{i_1 \ldots i_{k+1}} = (d\omega)_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ – координаты формы $d\omega$). Набор $i_1 < \ldots < i_{k+1}$ появляется при приведении подобных ровно $k+1$ раз в каждой из ситуаций: $i = i_\alpha, (j_1, \ldots, j_k) = (i_1, \ldots, \widehat{i_\alpha}, \ldots, i_{k+1})$ («крышка» означает пропуск индекса). Таким образом,

$$(d\omega)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, \widehat{i_\alpha}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_{k+1}}}{\partial x^{i_\alpha}} \text{ и } d\omega = \sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, \widehat{i_\alpha}, i_{\alpha+1}, \ldots, i_{k+1}}}{\partial x^{i_\alpha}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Выразим операцию $d\omega$ в тензорных координатах, т.е. выразим координаты $\widetilde{T}_{j_1 \ldots j_{k+1}}$ формы $d\omega$ *в базисе* $dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{k+1}}$ *в* Φ_{k+1} через координаты $T_{j_1, \ldots, j_k} = \omega(A)j_1, \ldots, A)j_k)$ тензора ω в Φ_k.

Так как $\omega_{j_1 \ldots j_k} = k! \omega(A)j_1, \ldots, A)j_k)$, то $T_{j_1 \ldots j_k} = (k!)^{-1} \omega_{j_1 \ldots j_k}$, аналогично $\widetilde{T}_{j_1 \ldots j_{k+1}} = (k+1)!(d\omega)_{j_1, \ldots, j_{k+1}}$. Поэтому $\widetilde{T}_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \frac{1}{k+1} \sum\limits_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \widehat{i_\alpha} \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_\alpha}}$.

В таком виде формула известна как кососимметричный градиент кососимметричного поля $T \in \Phi_k$. Градиент — кососимметричное тензорное поле типа $(k+1, 0)$. Тензор $\widetilde{T}$ называется также альтернированным градиентом кососимметричного T. Поскольку важно только, что $d^2 T = 0$, множитель $\frac{1}{k+1}$ в классическом анализе часто отсутствует.

4.9 Сопоставление с операциями над векторными полями в $\mathbb{R}^3$

В $\mathbb{R}^3$ мы имеем три операции: $0 \to \Omega^0 \xrightarrow[grad]{d} \Omega^1 \xrightarrow[rot]{d} \Omega^2 \xrightarrow[div]{d} \Omega^3 \to 0$.

В классическом анализе, механике и физике в $\mathbb{R}^3$ обычно, используя прямоугольные координаты, рассматривают в них векторные поля и операции над ними, связанные с дифференциалами форм:

1. $d : \Omega^0 \to \Omega^1$, $f \in \Omega^0$, $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$. Возникает векторное поле $grad\, f = (f'_x, f'_y, f'_z)$: поскольку матрица Якоби ортогональна, $C^{-1} = C^t$, то ковекторы преобразуются так же, как векторы, так что функцией f однозначно определено векторное поле $grad\, f$.

2. $d : \Omega^1 \to \Omega^2$, $\omega = Adx + Bdy + Cdz$, $d\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. При такой записи вводят векторные поля $w = (A, B, C)$ и также $\widetilde{w} = (P, Q, R)$. Как выразится $\widetilde{w}$ через w? По правилу $\xi_{ij} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}$ имеем $P = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}$, $Q = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}$, $R = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$. Т.е. $\widetilde{w} = rot\, w$ есть формально векторное произведение $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ и (A, B, C). Из $d^2 = 0$ вытекает: $rot\, grad = 0$.

3. $d : \Omega^2 \to \Omega^3$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, $d\omega = (P'_x + Q'_y + R'_z) dx \wedge dy \wedge dz$. Для векторного поля $w = (P, Q, R)$ имеем $P'_x + Q'_y + R'_z = div\, w$. Из $d^2 = 0$ вытекает: $div\, rot = 0$.

4.10 Когомологии де Рама.

Для многообразия M^n имеем $0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n \xrightarrow{d} 0$. Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, т.е. ω лежит в ядре дифференциала d. Замкнутые формы в $\Omega^p(M)$ образуют подпространство $Z^p(M)$. Форма $\omega \in \Omega^p$ называется *точной*, если $\omega = d\omega'$, где $\omega' \in \Omega^{p-1}$, т.е. ω лежит в образе d. Векторное подпространство в Ω^p, образованное всеми точными формами, обозначаем $B^p(M)$. Из $d^2 = 0$ следует, что всегда $B^p(M) \subset Z^p(M)$. Фактор-пространство $Z^p(M)/B^p(M)$ обозначается $H^p(M)$ и называется *группой p-мерных когомологий* многообразия M или p-мерной группой де Рама. $H^p(M)$ — вещественное векторное пространство.

Разумеется, в общем случае не всякая замкнутая форма является точной, так что, вообще говоря, $H^p(M) \neq 0$. В случае $M = S^1$, например, любая форма ω степени 1 замкнута. (Ввиду отссутствия ненулевых 2-форм.) Пусть ω — ориентирующая форма для S^1. Тогда $\omega \neq df$ ни для какой функции $f \in \Omega^0(S^1)$. В самом деле, $f = f(\varphi)$, где φ — угол точки на S^1 от оси O, и $df = f'_\varphi d\varphi$. Но f'_φ обращается в нуль в точках минимума и максимума f, форма же ω не обращается в нуль ни в одной точке S^1. Итак, $H^1(S^1) \neq 0$.

Если M^n связно, то $H^0(M) = \mathbb{R}$. В самом деле, $H^0(M) = Z^0(M)$ — пространство замкнутых 0-форм, т.е. функций, для которых $df \neq 0$. Но $df = 0$ только для $f = const$.

Задача. $H^0(M) = \prod \mathbb{R}$ – прямое произведение $\mathbb{R}$ в числе компонент связности многообразия M.

Теорема 18. *(де Рама)(без доказательства) Когомологии де Рама $H^p(M)$ совпадают с когомологиями $H^p(M, \mathbb{R})$, определяемыми в топологии. Они зависят только от топологичеекого строения M (т.е. инварианты при гомеоморфизмах многообразий и даже при гомотопических эквивалентностях (см. дальше)). В частности, для компактных многообразий всегда $dim H^p(M) < \infty$)*

Ниже будет показано, что для компактного ориентируемого многообразия $H^n(M^n) \neq 0$ (в качестве одного из следствий общей формулы Стокса).

4.11 Действие гладкого отображения многообразий на дифференциальные формы и когомологии.

Пусть $\psi : N^n \to M^m$ — гладкое отображение, $d\psi : VN \to VM$ — соответствующее отображение касательных векторов. Для каждой пары точек $A \in N$ и $B = \psi(A) \in M$ оно линейно отображает V_A в V_B. Если $(x^1 \ldots, x^n)$ — карта вблизи A, $(y^1, \ldots, y^n)$ — карта вблизи B, то $d\psi$ описывается равенством $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$. Имеется двойственное отображение $\psi^* = (d\psi)^* : V_B^* \to V_A^*$ — для каждой пары точек $A \mapsto B = \psi(A)$. Из этого вытекает:

Теорема 19. *. Отображение ψ индуцирует линейное отображение линейных дифференциальных форм $\psi^* : \Omega^1(M) \to \Omega^1(N)$. В частности, $\Omega^1(U) \to \Omega^1(\psi^{-1}(U))$ для любого открытого множества $U \subset M$.*

Доказательство. Остается найти вид ψ^* в координатах. Для этого напомним, что для $\xi \in V_B^*$ и $\boldsymbol{a} \in V_A$ по определению $< \psi^*(\xi), \boldsymbol{a} >=< \xi, d\psi(\boldsymbol{a}) >$ (или $\xi(d\psi(a))$) Пусть $\psi^*(\xi) = \overline{\xi} = \overline{\xi}_i dx^i$ и $\xi = \xi_i dy^i$, $\boldsymbol{a} = (dx^1, \ldots, dx^n)$ и $d\xi(\boldsymbol{a}) = (dy^1, \ldots, dy^n)$, где $dy^i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^j$. Таким образом $< \overline{\xi}, \boldsymbol{a} >= \overline{\xi}_j dx^j =< \xi, d\psi(\boldsymbol{a}) >= \xi_i dy^i = \xi_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j = (\xi_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}) dx^j$ или $\overline{\xi_i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \xi_j$, это и есть искомое описание ψ^* в координатах. Заметим, что матрица этого отображения есть $\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\}^t$ (транспонированная, поскольку суммирование идет по верхнему индексу, в отличие от $d\psi : V_A \to V_B$). □

Следствие 8. *Образом формы $\xi = \xi_i dy^i = \xi_i(B) dy^i$ служит $(\xi_i(B) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}) dx^j = \overline{\xi}_j(A) dx^j$, где $A \mapsto B$ – всевозможные пары, и произведена замена $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$ дифференциалов.*

Замечание 8. *Определено также отображение $\psi^* : \Omega^0(M) \to \Omega^0(N)$ гладких функций. Каждой функции f на M ставится в соответствие $\psi^*(f)$ по правилу $\psi^*(f)(A) = f(\psi(A))$.*

Возникает вопрос – как для всех других дифференциальных форм. Для этого начнем вообще с тензоров типа $(p, 0)$. Если $\varphi = \varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ – полилинейная функция на V_B, то определена функция $\psi^*(\varphi)$ на V_A: $\psi^*(\varphi)(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \varphi(d\psi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, d\psi(\boldsymbol{a}_n))$. Таким образом, возникает отображение $\psi^* : \Phi^p(M) \to \Phi^p(N)$ тензорных полей. Оно линейно: $\psi^*(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \psi^*(\varphi_1) \pm \psi^*(\varphi_2)$, $\psi^*(\lambda\varphi) = \lambda\psi^*(\varphi)$ – это очевидно из определения. Очевидно также, что симметричной или кососимметричной φ отвечает такая же $\psi^*(\varphi)$. Тем самым определено отображение дифференциальных форм $\psi^* : \Phi^p(M) \to \Phi^p(N)$. Остается дать описание ψ^* в координатах.

Теорема 20. *Для формы $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_p}(B)\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}$ форма $\psi^*(\omega)$ имеет вид $\psi^*(\omega) = = \omega_{i_1 \ldots i_p}(\psi(A))\, (\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_p})$ (здесь $j_1, \ldots, j_p$ пока не упорядочены по возрастанию, так что окончательный вид $\psi^*(\omega)$ получится после перестановок и приведения подобных при суммированиях).*

Далее, $d\psi^*(\omega) = \psi^*(d\omega)$.

Доказательство. Начнем опять с произвольных тензорных полей типа $(p, 0)$ (включая $(0, 0)$). Из определения ψ^* очевидно, что $\psi^*(\varphi^1 \otimes \varphi^2) = \psi^*(\varphi_1) \otimes \psi^*(\varphi_2)$, $\psi^*(\varphi\sigma) = \psi^*(\varphi)\sigma$, т.е. отображение ψ^* перестановочно с $\otimes$ и с перестановками аргументов. Так как оно линейно, то $\psi^*(\varphi_{Sym}) = \psi^*(\varphi)_{Sym}$, $\psi^*(\varphi_{Alt}) = \psi^*(\varphi)_{Alt}$. Отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Проверим второе.
$\psi^*(d\omega) = \psi^*(d(\omega_{i_1 \ldots i_p} dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p})) = \psi^*(\frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial y^i}(B)\, dy^i \wedge\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}) = \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial y^i}(\psi(A))(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j) \wedge (\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_p}) = \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}(\psi(x))}{\partial x^j}(A)\, dx^j \wedge (\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_p}) = d(\omega_{i_1 \ldots i_p}(\psi(A)))$ $(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_p}) = d(\psi^*(\omega))$. В конце выкладки мы воспользовались тем, что $d(dy^{i_k}) = 0 = d(\frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_k})$ и правилом дифференцирования $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$. □

Следствие 9. *ψ^* переводит замкнутые формы в замкнутые, а точные в точные.*

Доказательство. Действительно, если $d\omega = 0$, то $d(\psi^*(\omega)) = \psi^*(d\omega) = \psi^*(0) = 0$, а при $\omega = d\omega'$ также $\psi^*(\omega) = \psi^*(d\omega') = d\psi^*(\omega')$. □

Следствие 10. *Возникают отображения когомологий де Рама $\psi^* : H^p(M) \to H^p(N)$.*

Доказательство. В самом деле, если $Z^p(M) \to Z^p(N)$ и $B^p(M) \to B^p(N)$, то определено линейное отбражение факторпространств $H^p(M) \to H^p(N)$ □

Если ψ – диффеоморфизм, то ψ^* – изоморфизмы (для всех p). Если дано также $\varphi : M^m \to L^l$, то $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, поскольку, если имеем $V_A \to V_B \to V_C$, где $C = \varphi(B) = \varphi(\psi(A))$, то для $V_A^* \leftarrow V_B^* \leftarrow V_C^*$ из линейной алгебры знаем, что $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ (и это очевидно).

4.12 Свойство гомотопии для когомологий де Рама.

Отображения $\psi^0, \psi^1 : N^n \to M^m$ называются *гомотопными* ($\psi^0 \simeq \psi^1$), если имеется гладкое отображение $F : N^n \times I \to M^m$, где $I = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ – интервал чуть больше единичного $[0,1]$, такое, что $\psi^0 = Fi_0$, $\psi_1 = Fi_1$ (для $A \in M$ $i_0(A) = (A,0) \in N^n \times I$ и $i_1(A) = (A,1) \in N^n \times I$). Иными словами, $\psi_0(A) = F(A,0)$ и $\psi_1(A) = F(A,1)$.

Гомотопия $\psi_0 \simeq \psi_1$ означает, в частности, наличие семейства $\psi_t : N^n \to M^m$ гладких отображений, гладко зависящих от $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, постепенно изменяющего ψ_0, превращая его в ψ_1.

Теорема 21. *Для гомотопных отображений $\psi_0, \psi_1 : N^n \to M^m$ всегда $\psi_0^* = \psi_1^* : H^p(M) \to H^p(N)$ (для всех p).*

Доказательство. Рассмотрим сперва устройство форм на $N \times I$. Условимся рассматривать только карты вида $U \times I$, где U – карта в N. Таким образом, координаты на разных картах имеют вид $(x^1, \ldots, x^n, t)$ и $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n, t)$, так что функции перехода имеют вид $x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$, $i \leq n$ и $t = t$, а вид матрицы Якоби такой

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

здесь J означает $n \times n$-матрицу, а нули – столбец и строку из n нулей.

Лемма 5. *Всякая форма ω степени p на $N \times I$ имеет вид $\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, однозначно определяемый. При этом $i_0^*(\omega) = i_0^*(\omega_1)$, $i_1(\omega) = i^*(\omega_1)$*

Здесь i_0, i_1 – любые гладкие отображения $N \to N \times 0 \subset N \times I$ и $N \to N \times 1 \subset N \times I$ (определенные выше вложения являются частным случаем).

Доказательство. Доказательство сводится к группировке членов формы ω, записанной в координатах карты, на содержащие и не содержащие dt. Это разбиение совместимо с переходом к другим координатам (рассматриваемого типа !), поскольку x^i преобразуются отдельно от t (и матрица J выше не зависит от t !).

Коэффициенты ω_1, конечно, зависят от t. Можно считать, что ω_1 – это форма на N, зависящая (гладко) от параметра t. То же самое справедливо относительно ω_2.

Второе утверждение следует из того, что $i_0^*(\omega_1 + \omega_2 \wedge dt) = i_0^*(\omega_1) + i_0^*(\omega_2 \wedge dt) = i_0^*(\omega_1) + i_0^*(\omega_2) \wedge i_0^*(dt)$, но $i_0^*(dt) = 0$ ибо $i_0(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1})$, где $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ при $i \leq n$ и $y^{n+1} = t = 0 = const$. □

Лемма 6. *Для формы ω_1, многообразия N, зависящей от параметра t, определена форма $\int_0^1 \omega_1 dt$. При этом $\int_0^1 (d_N \omega_1) dt = d_N(\int_0^1 \omega_1 dt)$. Здесь d_N- внешнее дифференцирование в N^n (но не в объемлющем многообразии $N \times I$).*

Доказательство. Запишем ω_1 в координатах на карте: $\omega_1 = \omega_{1\,i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ и определим $\int_0^1 \omega_1 dt$ как $\left(\int_0^1 \omega_{1\,i_1 \ldots i_p} dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. На пересечениях карт это определение дает одну и ту же форму: в других координатах $\omega'_{1\,i_1 \ldots i_p} = J^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} \omega_{1\,j_1 \ldots j_p}$, где $J^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$ – миноры матрицы J выше, не зависящей от t. Миноры выносятся за знак интеграла и мы имеем: $\left(\int_0^1 \omega'_{1\,i_1 \ldots i_p} dt\right) dx'^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx'^{i_p} = J^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} \left(\int_0^1 \omega_{1\,j_1 \ldots j_p}\right) dx'^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx'^{i_p} = \left(\int_0^1 \omega_{1\,j_1 \ldots j_p}\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$.

Далее, $\int_0^1 (d_N \omega_1) dt = \left(\int_0^1 \frac{\partial \omega_{1\ i_1 \ldots i_p}}{\partial x^i} dt\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, а $d_N \left(\int_0^1 \omega_1 dt\right) = d\left(\left(\int_0^1 \omega_{i_1 \ldots i_p} dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(\int_0^1 \omega_{i_1 \ldots i_p}\, dt) dx^i\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Это выражение совпадает с первым, поскольку в наших условиях допустимо внесение производной под интеграл. □

Следствие 11. *$\int_0^1 \omega_1 dt$ замкнута или точна, если такова форма ω_1.*

Доказательство. Это очевидно, если ω_1, замкнута (относительно d_N). Если $\omega_1 = d_N \omega'_1$, где ω'_1 – форма на N степени $p-1$, зависящая от параметра t, то $\int_0^1 \omega_1 dt = \int_0^1 (d_N \omega'_1) dt = d_N(\int_0^1 \omega'_1 dt)$. □

Лемма 7. *Если ω – замкнутая форма на $N^n \times I$, то $i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega) = d\overline{\omega}$, где $\overline{\omega}$ – некоторая $p-1$ – форма на N^n.*

В лемме $p > 0$. При $p = 0$ форма ω – функция f, из $df = 0$ следует, что $f = const$ и утверждение очевидно.

Доказательство. Используем то, что $\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, так что $i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega) = i_1^*(\omega_1) - i_0^*(\omega_1) = \omega_1(1) - \omega_1(0)$ (значения ω_1 при $t = 1$ и $t = 0$). Далее $0 = d\omega = (d_N\omega_1 + (-1)^p \frac{d\omega_1}{dt} \wedge dt) + d_N\omega_2 \wedge dt$. Через $\frac{d\omega_1}{dt}$ обозначена форма с координатами на каждой карте $\frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial t}$ (как и в случае интеграла по t, это определение совместимо с переходом к координатам других карт). Ясно, что $d_N\omega_1 = 0$ (ибо этим членам не с чем сократиться при разложении по базису $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dt$ в многообразии $N \times I$). Следовательно, $(-1)^p \frac{d\omega_1}{dt} + d_N\omega_2 = 0$ (при приведении подобных окончательные коэффициенты при базисных формах $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dt$ обратятся в нуль, так что соотношения между ними будут верны и без dt), поэтому $\frac{d\omega_1}{dt} = (-1)^{p-1} d_N\omega_2$. Проинтегрируем это равенство по t от 0 до 1, получим $\omega_1(1) - \omega_1(0) = (-1)^{p-1} \int_0^1 (d_N\omega_2) dt = d_N((-1)^{p-1} \int_0^1 \omega_2 dt)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Имеем $\psi_0^* = (Fi_0)^* = i_0^* F^*$, $\psi_1^* = i_1^* F^*$, и достаточно убедиться, что для когомологий $i_1^* = i_0^*$. Пусть q – произвольный элемент $H^p(M^m)$ и $h = F^*q$. Для $\omega \in \Omega^p(N \times I)$, определяющей элемент $h \in H^p(N \times I)$, $i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega)$ принадлежит $B^p(N^n)$ в силу лемм 5 и 7. □

4.13 Гомотопическая инвариантность когомологий. Теорема Пуанкаре.

Многообразия M^m и N^n считаются *гомотопически эквивалентными* (гладко), если найдутся гладкие отображения $\psi : N \to M$ и $\sigma : M \to N$, композиции которых $\sigma\psi : N \to N$ и $\psi\sigma : M \to M$ гомотопны тождественным отображениям соответствующих многообразий. Сами отображения ψ и σ называются (взаимно обратными) гомотопическими эквивалентностями между M^m и N^n. Следующий результат – гомотопическая инвариантность когомологий.

Теорема 22. *Если ψ и σ – взаимно обратные гомотопические эквивалентности, то $\psi^* : H^p(M) \to H^p(N)$ и $\sigma^* : H^p(N) \to H^p(M)$ – взаимно обратные изоморфизмы.*

Доказательство. Поскольку $\sigma\psi$ гомотопно тождественному диффеоморфизму $N \to N$, то $(\sigma\psi)^* = \psi^*\sigma^* =: H^p(N) \to H^p(M) \to H^p(N)$ – тождественный изоморфизм. Следовательно, σ^* – мономорфизм, а ψ^* - эпиморфизм. Точно также из $(\psi\sigma)^* = \sigma^*\psi^*$ заключаем, что ψ^* – мономоорфизм, а σ^* – эпиморфизм. □

Примеры гомотопических эквивалентностей: куб и точка, цилиндр и окружность, лист Мебиуса и окружность, полноторие (бублик) и окружность (и т. д.).

Следствие 12. *(теорема Пуанкаре). $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ при $p > 0$ (заметим, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ как для связного многообразия).*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке. Пусть D^n – внутренность единичного шара, D^n диффеоморфна $\mathbb{R}^n$, $H^p(\mathbb{R}^n) = H^p(D^n)$. Строим $F : D^n \times I \to D^n$ по формуле $F(A, t) = tA$, где tA – конец вектора tOA . Оно определено при всех t, гладкое. Но $F(A, 1)$ – тождественное отображение, а $F(A, 0)$ – отображение в точку 0. Пусть $i : 0 \to D^n$ – вложение. Тогда $F(A, 0)i : 0 \to 0$ – тождественное отображение точки, а $iF(A, 0)$, отображение $D^n \to 0 \in D^n$, гомотопно тождественному отображению D^n. Итак, D^n и точка 0 – гомотопически эквивалентны. □

Следствие 13. *$H^p(U) = 0$ при $p > 0$ для любой области, диффеоморфной $\mathbb{R}^n$.*

Следствие 14. *Любая замкнутая форма $\omega \in \Omega^p$ точна в достаточно малой окрестности любой точки $A \in M$ (поскольку имеются окрестности точек в M диффеоморфные $\mathbb{R}^n$ или D^n).*

Следствие 15. *Мы знаем, что $\mathbf{rot\,grad} = 0$. Но в D^3 из $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ следует $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, f$.*
Знаем, что $\mathbf{div\,rot} = 0$. Но в D^3 из $\mathbf{div\,w} = 0$ следует, что $\boldsymbol{w} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$.

4.14 Интегрирование дифференциальных форм.

Начнем с n-мерных форм на M^n. В классическом анализе рассматривается интерирование функции по области. При замене переменных функция не меняется, а произведение дифференциалов меняется с умножением на якобиан преобразования. Мы хотим определить интеграл от n-формы по n-области, т.е. сопоставление такой паре числа, линейное по форме и аддитивное по области. Но здесь при замене переменных меняется все подинтегральное выражение с умножением на якобиан. Выражение $\omega'_{i_1 \ldots i_p} = \det J\, \omega_{1 \ldots n}$ все же напоминает закон преобразования подинтегрального выражения в n-кратном интеграле при замене переменных, где однако вместо $\det J$ берется модуль $|\det J|$). На первый взгляд можно было бы определить интеграл от формы $\int_D \omega$ по области D с компактным замыканием как $\int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega_{1\ldots n}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n$. При координатной замене $x^1 = y^2, x^2 = y^1, x^i = y^i$ для $i > 2$ написанный выше интеграл будет отличаться знаком от $\int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega_{1\ldots n}(y^1, \ldots, y^n)\, dy^1 \ldots dy^n$.

Чтобы избежать противоречий, интеграл определяют по-другому. Прежде всего, многообразие предполагается ориентируемым и на нем выбирается ориентация. Для карты $\{x^1, \ldots, x^n\}$ через ε_x обозначим 1 или -1 в зависимости от того, положительна или отрицательна карта.

Определение 8. $\int_D \omega = \int_D \omega_{1\ldots n}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \varepsilon_x \int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega_{1\ldots n}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n$

Здесь пока считается, что область D расположена в одной карте. Определение не зависит от выбора координат: $\varepsilon_y \int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega'_{1\ldots n}(y^1, \ldots, y^n)\, dy^1 \ldots dy^n = \varepsilon_y \int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega'_{1\ldots n}(\ldots y^i(\ldots x^j \ldots) \ldots)|\det \mathfrak{J}|\, dx^1 \ldots dx^n = \varepsilon_y \int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega'_{1\ldots n}(..y^i(\ldots x^j \ldots) \det \mathfrak{J}\, (sign \det \mathfrak{J})\, dx^1 \ldots dx^n = \varepsilon_y\, (sign \det \mathfrak{J}) \int_{\stackrel{\cdots}{D}} \int \omega_{1\ldots n}(x^1 \ldots x^n)\, dx^1 \ldots dx^n$ (ибо $\omega'_{1\ldots n} = (\det \mathfrak{J})^{-1} \omega_{1\ldots n}$). Но легко видеть, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y (sign \det J) = \varepsilon_y (sign \det \mathfrak{J})$.

Пусть область D компактна, но не содержится в одной карте. Тогда D разбиваем на куски: $D = \cup_i D_i$ и определяем $\int_D = \sum \int_{D_i} \omega$. Здесь $D_i \cap D_j = \emptyset$, D_i имеют открытую внутренность, замыкания их компактны, каждая D_i содержится внутри карты (индекс i принимает конечное число значений).

Независимость $\int_D \omega$ от разбиения доказывается стандартно, как в математическом анлизе: если $D = \cup_j D'_j$ – другое разбиение, то $D = \cup_{ij} D_{ij}$, где $D_{ij} = D_i \cap D_j$ и интеграл через третье разбиение совпадает с теми, что дают первые два (свойство аддитивности интеграла).

4.15 Интегрирование форм степени $p < n$.

Естественно, что формы степени p интегрируют по многообразиям $N^p \subset M^n$. Для этого надо уметь ограничивать формы $\omega \in \Omega^p(M)$ на $N \subset M$. Процесс ограничения не следует считать новым. Вложение $i : N \to M$ – частный случай гладкого отображения $\psi : N \to M$, рассматривавшегося выше. Таким образом, определены отображения $i^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ (и отображения когомологий $H^k(M) \to H^k(N)$, которые, естественно, автоматически окажутся нулевыми при $k > \dim N$, поскольку на N нет ненулевых кососимметричных тензоров степени больше $\dim N$). Мы должны уметь описывать i^* для конкретных форм.

На картах отображение i описывается как $x^j = x^j(u^1, \ldots, u^q)$, $q = \dim N$, причем векторы $\boldsymbol{e}'_\alpha = (\frac{\partial x^1}{\partial u^\alpha}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^\alpha})$ (касательные к подмногообразию) линейно независимы. Расположим их столбцами, и получим матрицу I, описывающую дифференциал $d\,i$ гладкого отображения (вложения) i.

Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$, $\omega = \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. При ограничении ω на N получится форма $i^*(\omega)$ вычисляемая по правилу: $i^*(\omega) = \omega_{i_1\ldots i_p}(A)(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} du^{\alpha_1}) \wedge \ldots \wedge (\frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{\alpha_p}} du^{\alpha_p})$, где $A \in N$.

Индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ пока не упорядочены по возрастанию. Но после такого упорядочивания и приведения подобных получим $i^*(\omega) = \omega_{i_1\ldots i_p}(A) I^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} du^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge du^{\alpha_p}$. Здесь $I^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ — минор матрицы I, расположенный в строках $i_1 < \ldots < i_p$ и столбцах $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$.

В частности, если $q = p = dim\, N$, получим $i^*(\omega) = \omega_{i_1\ldots i_p}(A) I^{i_1\ldots i_p}_{1\ldots p} du^1 \wedge \ldots \wedge du^p$. Аналогичные рассуждения и выводы формул справедливы, очевидно, для любого гладкого отображения $\psi : N \to M$ (а не только вложения i).

Итак, формы ω степени p интегрируют по подмногообразиям $N \subset M$. Подмногообразия N предполагаются ориентируемыми, области D имеющими компактные замыкания. Форму ω ограничивают на N, теория же интегрирования не отличается от описанной в случае $p = n$.

4.16 Сопоставление интегрирования функций по мере и интегрирования форм на римановых многообразиях.

Из предыдущего ясно, что достаточно рассматривать случай $p = n$. Отметим, что определенный выше интеграл от формы $\int_D \omega$ ни в коей мере не является интегралом от некоторой функции $f(A)$, $A \in M$ на многообразии M: интеграл $\int \ldots \int f(A)\, dx^1 \ldots dx^n$ после замены переменных превращается в $\int \ldots \int f(A)|\det J|\, dy^1 \ldots dy^n \neq \int \ldots \int f(A)\, dy^1 \ldots dy^n$. Интеграл от функции зависит от выбора карты, а интеграл от формы не зависит.

Для того, чтобы определить интеграл от функции, необходимо иметь на многообразии меру — *меру n-мерного объема* (интеграл от $f = f(A)$ определяется как предел интегральных сумм $\sum f(A_i)\Delta V_i$, где ΔV_i — объем малых областей, предел берется при измельчении этих разбиений).

На римановом многообразии мерой объема служит *форма объема*, равная $\varepsilon_x\sqrt{\det G}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ (знак — в зависимости от ориентации карты), объем на малом криволинейном кубике примерно равен $\sqrt{\det G}\Delta x^1\ldots\Delta x^n$ ($\det G$ берется в точке этого кубика).

Теорема 23. *Интеграл от функции $f=f(A)$ по мере, задаваемой формой объема, — это интеграл от дифференциальной формы $\omega=\sqrt{\det G}\,f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, определенной так на положительных картах. То есть, на положительных картах $\omega_{1\ldots n}=\sqrt{\det G}\,f$*

На отрицательных картах для $\omega_{1\ldots n}$ берется то же выражение со знаком минус: $\omega_{1\ldots n}=-\sqrt{\det G}\,f$.

Доказательство. Доказательство очевидно (такое же, как при проверке корректности определения формы объема, сделанной выше, $\pm\sqrt{\det G}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$). Для функции f берется форма $\omega=\varepsilon_x f\sqrt{\det G}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, $\int\omega=\varepsilon_x\int\ldots\int\omega_{1\ldots n}\,dx^1\ldots dx^n=\varepsilon_x\int\ldots\int\varepsilon_x f\sqrt{\det G}\,dx^1\ldots dx^n=\int\ldots\int f\sqrt{\det G}\,dx^1\ldots dx^n$ — интеграл от функции по мере. □

Смысл интеграла от функции: $f(A)$ означает либо плотность (заряда, вещества), либо высоту в точке графика f в $(n+1)$-мерном пространстве, $\sqrt{\det G}\,dx^1\ldots dx^n$, элемент объема, – либо заряд или масса вещества в данном объеме, либо $(n+1)$-мерный объем под графиком функции f.

Наоборот, пусть ω — произвольная n-форма на римановом многообразии. Тогда определена функция $f(A)=\frac{\omega_{1\ldots n}}{\sqrt{\det G}}$ на положительных картах, или $-\frac{\omega_{1\ldots n}}{\sqrt{\det G}}$ на отрицательных. Ясно, что $\int_D\omega=\int_{\ddot{D}}\int f(A)dV$, однако мы должны убедиться, что определение не зависит от выбора карты, т.е. что f – функция точек $A\in M$, а не формула от $x^1\ldots x^n$ (меняющаяся при смене координат). Но в координатах $y^1\ldots y^n$ получим $\frac{\omega'_{1\ldots n}}{\sqrt{\det G'}}=\frac{\det J\omega_{1\ldots n}}{\sqrt{\det(J^tGJ)}}=\pm\frac{\omega_{1\ldots n}}{\sqrt{\det G}}$ (в случае $\det J>0$ знак $+$, при $\det J<0$ знак $-$, и выбор знака согласуется с данным выше определением).

4.17 Интегрирование в $\mathbb{R}^3$.

Интегралы от функций по мере называются в классическом анализе обычными (или 1-го рода), а интегралы от дифференциальных форм — интегралами 2-го рода. В трехмерном пространстве фигурируют два интеграла 2-го рода — это интеграл по кривой от выражения $Adx+Bdy+Cdz$, где A,B,C — функции от x,y,z и интеграл по поверхности от выражения $Pdxdz+Qdzdy+Rdxdy$, где P,Q,R — аналогичные функции. В прямоугольных координатах вводятся векторы $\boldsymbol{v}=(A,B,C)$ и $\boldsymbol{w}=(P,Q,R)$ (векторные поля).

В первом случае $Adx+Bdy+Cdz=\omega=\omega_1dx+\omega_2dy+\omega_3dz$, при ограничении на 1-мерное подмногообразие (кривую $x(t),y(t),z(t)$) получаем $i^*(\omega)=(\omega_1\frac{dx}{dt}+\omega_2\frac{dy}{dt}+\omega_3\frac{dz}{dt})dt=(\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{r}})dt=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}(t))ds$ – элементарная работа по перемещению единицы массы или заряда по кривой (s – длина).

Во втором случае $P=\omega_{23}$, $Q=\omega_{31}=-\omega_{13}$, $R=\omega_{12}$. Пусть поверхностъ задана как $x=x(u_1,u_2),y=y(u_1,u_2),z=z(u_1,u_2)$, векторы e'_1 и e'_2 образуют матрицу:

$$I=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2}\\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2}\\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

Если D – область на поверхности, то $i^*(\omega)=(PI^{23}+QI^{31}+RI^{12})\,du^1\wedge du^2=(\boldsymbol{w},[\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2])\,du^1\wedge du^2=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{n})|[\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]|\,du^1\wedge du^2=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{n})dS$, где $\boldsymbol{n}$ – единичный нормальный вектор к поверхности, dS — элемент площади на ней.

Итак, $\int_D\omega=\int\int_D(\boldsymbol{w},\boldsymbol{n})dS$ — поток векторного поля $\boldsymbol{w}$. Поле $\boldsymbol{w}$ может быть полем скоростей жидкости или газа, тогда интеграл — количество, протекающее за секунду через область D.

4.18 Формула Стокса.

Эта формула касается связи операций интегрирования и внешнего дифференциала $d\omega$. Пусть M — *многообразие с ориентацией* и D — область в M с кусочно гладкой границей ∂D (состоящей из конечного числа гладких кусков подмногообразий). Ориентация M задает ориентацию D.

Лемма 8. *Граница ∂D ориентируема.*

Доказательство. См. теорема 16, стр. 20. □

Пусть N — подмногообразие в M размерности p, $i : N \to M$ — отображение вложения. Пусть N ориентируемо, D — область в N с компактным замыканием и кусочно гладкой границей, и пусть $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$.

Теорема 24 (*Теорема Стокса*). $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.

В теореме ориентация ∂D считается согласованной с D. Ясно, что под интегралами от ω (или от $d\omega$) понимаются интегралы от ограничений ω и $d\omega$, то есть $i^*(\omega)$ и $i^*(d\omega)$. Поскольку $i^* d = d\, i^*$ (это было показано для любых отображений $\psi : N \to M$), то $i^*(d\omega) = d(i^*(\omega))$. Обозначив $i^*(\omega)$ через ω', видим, что теорему достаточно доказать для случая $p = n$. Перед доказательством рассмотрим важные следствия. В качестве D может быть взято все многообразие M, если оно компактно и при этом ∂M — пустое множество.

Следствие 16. *Если M компактно, ориентируемо и без края, то $\int_M d\omega = 0$ для любой формы $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$.*

То же самое верно и для некомпактного M для форм ω, имеющих компактные носители (т.е. ω обращается в нуль вне некоторого компактного множества).

Следствие 17. *Для замкнутого ориентируемого многообразия $H^n(M) \neq 0$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно указать какую-либо форму $\omega \in \Omega^n(M)$, для которой $\int_M \omega \neq 0$ (ибо согласно предыдущему следствию эта форма не будет точной). Но в качестве ω может быть взята любая форма объема. □

Задача. На любом многообразии (не обязательно компактном) имеются n-формы с компактными носителями ω, для которых $\int_M \omega \neq 0$.

Доказательство теоремы. Проведем его сперва для случая, когда ∂D — гладкое многообразие. У каждой точки $A \in D$ выберем окрестность $O_A \subset M$ такую, что она содержится внутри некоторого координатного кубика, описываемого условиями $|x^i - x^i_A| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. При этом для точек $A \in \partial D$ считаем, что $x^1_A = 0$ (и что $x^1 = 0$ отвечает ∂D, а для D имеем $x^1 < 0$). Поскольку замыкание D компактно, из его покрытия $\{O_A\}$ выберем конечное $O_1, \ldots, O_K$ (отвечающее точкам $A_1, \ldots, A_K$), $D \subset \bigcup O_i$. Пусть $\{f_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{O_i\}$ объединения $\bigcup_i O_i$: $\sum f_i = 1$ на D (и даже немного за пределами D). Пусть $\omega_i = f_i\, \omega$. Тогда $\omega = \sum \omega_i$, причем каждая форма ω_i сосредоточена внутри O_i. Формулу Стокса достаточно доказать для каждой формы ω_i. В самом деле, тогда $\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \sum \omega_i = \sum_i \int_D d\omega_i = \int_D d(\sum_i \omega_i) = \int_D d\omega$.

Итак, можно считать, что носитель ω содержится внутри некоторого координатного кубика. При сделанном выше подборе окрестностей O_A можно считать, что либо кубик лежит внутри D (не задевает ∂D), либо на нем точкам D отвечает условие $x^1 < 0$ (а точкам ∂D — условие $x^1 = 0$).

В первом случае $\int_{\partial D} \omega = 0$. Заметим, что носитель $d\omega$ содержится в носителе ω (если $\omega = 0$ вне замкнутого множества, то там же, очевидно, и $d\omega = 0$). Таким образом, $d\omega$ сосредоточена внутри кубика $|x^i - x^i_0| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Внутри этого кубика $\omega = \sum_{i=1}^n \psi_j dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$ и $d\omega$ — сумма (с точностью до знаков ± 1) форм вида $\frac{\partial \psi_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^j \wedge \ldots \wedge dx^n$. Интеграл от такой формы имеет вид $\int \ldots \int \frac{\partial \psi_j}{\partial x^j} dx^1 \ldots dx^n$. Вычисляем его как $\int \ldots \int \{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^j} dx^j\} dx^1 \ldots dx^{j-1} dx^{j+1} \ldots dx^n$. Но интеграл по x^j в фигурных скобках равен нулю (поскольку, как и ω, каждая $\psi_j = \omega_{1 \ldots \hat{j} \ldots n}$ равна нулю на границах кубика). Итак, $\int_D d\omega = 0$ в этом случае, как и $\int_{\partial D} \omega = 0$.

Рассмотрим второй случай. Носитель ω не задевает граней $x^i = \pm\varepsilon$ кубика (и сосредоточен внутри него), но интегрировать придется по кубику $-\varepsilon < x^1 < 0$, $|x^i| < \varepsilon$ и по границе этого кубика. Начнем с интеграла от $d\omega$ по этому кубику. Снова $d\omega$ — сумма форм вида $\frac{\partial \psi_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. При $j > 1$ n-кратный интеграл вычисляем сперва по оси x^j, получаем 0. Форма же ω отлична от нуля на единственной грани $x^1 = 0$, но на ней слагаемое ω вида $\psi_j dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$ обращается в нуль, поскольку на грани $x^1 = 0, dx^1 = 0$. Таким образом, $\int_{\partial D} \widetilde{\omega}_i = 0 = \int_D d\widetilde{\omega}_i$, где $\widetilde{\omega}_i = \psi_j dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$. Остается рассмотреть $\widetilde{\omega}_1 = \psi_1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Эта форма отлична от нуля лишь на грани $x^1 = 0$ и $\int_{\partial D} \widetilde{\omega}_i = \int \ldots \int_{x^1=0} \psi_1(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \ldots dx^n$, $\int_D d\widetilde{\omega}_1 = \int \ldots \int \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1} dx^1 \ldots dx^n$. Этот n-кратный интеграл вычислим сначала по x^1 от $-\varepsilon$ до 0, получим, очевидно, $(n-1)$-кратный интеграл от $\psi_1(0, x^2, \ldots, x^n)$. Итак, теорема доказана для гладкой границы ∂D.

Кратко о том, как рассуждать в общем случае. Пусть $\widetilde{D}$ — часть ∂D, где нарушена гладкость ∂D. Множество $\widetilde{D}$ имеет меру нуль (и для $(n-1)$-интегрирования по ∂D, и для n-интегрирования в M). При выборе покрытия $\{O_i\}$, как выше, $i = 1, \ldots, N$, и соответствующих форм ω_i для которых $\omega = \sum \omega_i$, пользуясь непрерывностью координат ω и $d\omega$, следовательно, их ограниченностью, и тем, что меры $\widetilde{D}$ равны нулю, добьемся, чтобы $\int_{\partial D} \omega$ меньше чем на ε отличался от суммы интегралов всех ω_i, носители которых не задевают $\widetilde{D}$, и аналогично для $\int_D \omega$. Но для таких ω_i формула Стокса верна. Следовательно, $\int_{\partial D} \omega$ сколь угодно мало отличается от $\int_D d\omega$, т.е. эти интегралы совпадают. $\square$

4.19 Замечания и примеры.

В частном случае, когда $n = 1$ и $p = 0$, формула Стокса превращается в формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f' = f(b) - f(a) = \int_a^b df$. Однако она не есть следствие формулы Стокса, поскольку она использовалась при нашем доказательстве.

При $n = 2$ и $p = 1$ пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, $\omega = Adx + Bdy$. Здесь частным случаем общей формулы Стокса является *формула Грина*: $\oint Adx + Bdy = \int_D (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}) dxdy$.

Далее пусть $n = 3$.

1. Пусть $p = 0$, $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ (или на области в $\mathbb{R}^3$). Подмногообразие N — это кривая от точки A до точки B. Тогда $\int_A^B df = f(B) - f(A)$. В частности, интеграл от df не зависит от кривой, а лишь от концевых точек.

2. $p = 1$, D — поверхность в $\mathbb{R}^3$ с границей ∂D — гладкой (или кусочно гладкой) замкнутой кривой. В классическом анализе известна формула $\oint_{\partial D} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}) ds = \int\int_D (\mathbf{rot}\, \mathbf{v}, \mathbf{n})\, dS$ (*формула Стокса* – циркуляция векторного поля $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ по замкнутому контуру совпадает с потоком $\mathbf{rot}\, \mathbf{v}$ через натянутую на контур поверхность, при этом любую). Но, как мы видели, криволинейный интеграл есть не что иное как $\int_{\partial D} \omega$, где $\omega = Adx + Bdy + Cdz$, причем $d\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, и для векторного поля $\boldsymbol{w} = (P, Q, R)$ имеет место $\boldsymbol{w} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}$, а интеграл $\int_D d\omega$ как раз и есть двойной интеграл в формуле Стокса, приведенной выше.

3. $n = 3$, $p = 2$, D — трехмерная область, ∂D — ее граница, n — внешняя нормаль ($|n|$=1) к поверхности. Известна *формула Гаусса-Остроградского* $\iint_{\partial D} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) dS = \iiint_D \mathbf{div}\, \boldsymbol{w}\, dxdydz$ (поток векторного поля через замкнутую поверхность совпадает с интегралом от его дивергенции в ограниченном поверхностью объеме). Но для векторного поля $\mathbf{w} = (P, Q, R)$ двумерный интеграл, как было показано, есть $\int_{\partial D} \omega$ для формы $\omega = Pdx \wedge dz + Qdz \wedge dy + Rdx \wedge dy$, а $d\omega = \mathbf{div}\, \boldsymbol{w}\, dx \wedge dy \wedge dz$, так что указанная классическая формула — частный случай общей формулы Стокса (следствие).

5 Глава 5. Пространства аффинной связности.

Дифференцирование векторных полей в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — гладкое векторное поле, $\boldsymbol{v} = (X^1, \dots, X^n)$, $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$. Через точку A проведем гладкую кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, что дает n функций $x^i = x^i(t)$. Что такое $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$? Это предел $\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$. Здесь мы пользуемся аффинными координатами $(x^1, \dots, x^n)$, и операции с векторами равносильны операциям с координатами, $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\dot{X}^1, \dots, \dot{X}^n)$. Но $\dot{X}^i = \frac{dX^i}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\dot{x}^j = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j$, где $(Y^1, \dots, Y^n) = \dot{r} = \boldsymbol{w}$ — касательный вектор к кривой. Итак, $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}Y^j$. Для функций сопоставление $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}Y^j$ уже было, и сейчас $\boldsymbol{v}$ для нас просто набор из n функций.

Вывод из формулы $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}Y^j$: Результат дифференцирования поля $\boldsymbol{v}$ вдоль кривой зависит не от самой кривой, а от ее касательного вектора скорости $\boldsymbol{w} = \dot{r}$. Следовательно, определена производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}}$ — поля $\boldsymbol{v}$ по вектору $\boldsymbol{w}$.

Далее, можно считать, что $\boldsymbol{w}$ — не одиночный вектор, а тоже векторное поле, $\boldsymbol{w}(x) = (Y^1, \dots, Y^n)$, $Y^i = Y^i(x^1, \dots, x^n)$. Чтобы подчеркнуть это, изменим обозначение: $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}}$ будем обозначать через $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ — *производная поля $\boldsymbol{v}$ по векторному полю $\boldsymbol{w}$*:

$$(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j}Y^j. \qquad (*)$$

Лемма 9. *$\boldsymbol{v}$ — постоянно $\Leftrightarrow$ $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для всех полей $\boldsymbol{w}$.*

Доказательство. Действительно, условие $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для всех полей $\boldsymbol{w}$ влечет $\nabla_{\boldsymbol{A})i}\boldsymbol{v} = 0$, т.е. $\frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0$ или $X^k = const$. Обратное очевидно. □

5.1 Свойства операции ∇

1. Результат операции — векторное поле (вытекает из определения производной с предельным переходом. Оно гладкое, согласно формулам $(*)$.

2. Для постоянных λ_1 и λ_2 имеем $\nabla_{\boldsymbol{w}_1}(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2) = \lambda_1\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2$.

3. $\nabla_{\mathbf{w}}f = \frac{df}{d\mathbf{w}}$.

4. $\nabla_{\boldsymbol{w}}(f\boldsymbol{v}) = \frac{df}{d\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + f\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ – эта формула также есть следствие $(*)$.

Анализ выводов:

1. **Использовалась аффинная структура $\mathbb{R}^n$, именно — параллельный перенос вектора $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ в точку $\boldsymbol{r}(t)$, после чего имеет смысл $\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)) = \dots$. На произвольном гладком многообразии структура параллельного переноса не определена, поэтому нет операции.**

2. **При выводе $(*)$ использованы аффинные координаты (координаты $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ не меняются при параллельном переносе). Ниже будет найдено изменение $(*)$ в криволинейных координатах.**

3. **Операция ∇ по формуле $(*)$ не сохраняется при произвольных диффеоморфизмах (например, параллельное поле $\boldsymbol{v}$ может перейти в непараллельное).**

5.2 Определение общей аффинной связности.

Пространством аффинной связности (M^n, ∇) **называется пара, в которой M^n — гладкое многообразие с заданной на нем операцией ∇ над векторными полями, удовлетворяющей условиям 1)-4) выше. Операция ∇ с такими свойствами называется** *ковариантным дифференцированием.* **Пример пока один: $M^n = \mathbb{R}^n$ и ∇ — конкретное дифференцирование, рассматриваемое в аффинных координатах. Наша цель установить наличие такой операции на римановых многообразиях, задаваемой в произвольных локальных координатах. Заметим, что задать ∇ можно на картах (например, задать стандартное дифференцирование в каждой карте, но такое задание не будет совпадать на пересечениях карт, ибо общие части карт только диффеоморфны друг другу).**

***Предполагая существование*, найдем общий вид операции $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, удовлетворяющей условиям 1)-4) в координатах какой-то карты (в частности, получим при этом вид $(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k$ и для покоординатного дифференцирования в евклидовом пространстве в общих криволинейных координатах).**

Пусть в координатной карте многообразия, т.е. в $\mathbb{R}^n$, стандартные координаты обозначены x^i, другие (криволинейные) координаты y^i и $\mathbf{e}_i(x)$ поля координатных векторов криволинейной системы. Пусть $\boldsymbol{v} = X^k\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{w} = Y^j\boldsymbol{e}_j$ два векторных поля, $(X^i(x))$ и $(Y^i(x))$ их координаты в криволинейной системе.

Имеем: $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \nabla_{Y^j\boldsymbol{e}_j}X^k\boldsymbol{e}_k = Y^j\nabla_{\boldsymbol{e}_j}X^k\boldsymbol{e}_k = Y^j(\frac{\partial X^k}{\partial y^j}\boldsymbol{e}_k + X^k\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k) = (\frac{\partial X^k}{\partial y^j}\boldsymbol{e}_k + X^i(\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i)^k\boldsymbol{e}_k)Y^j = (\frac{\partial X^k}{\partial y^j} + \Gamma^k_{ij}X^i)Y^j\boldsymbol{e}_k$ **(мы поменяли индекс суммирования и записали производную в координатах), или**

$$(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = (\frac{\partial X^k}{\partial y^j} + \Gamma^k_{ij}X^i)Y^j; \quad (\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial y^j} + \Gamma^k_{ij}X^i; \quad \Gamma^k_{ij} = (\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i)^k. \qquad (**)$$

Итак, $(**)$ отличается от $(*)$ новыми слагаемыми, содержащими Γ^k_{ij} — *символы Кристоффеля.* Их определение: $\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k$, или $\Gamma^k_{ij} = (\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i)^k$ – координаты производной одного векторного поля по другому.

В случае $\Gamma^k_{ij} = 0$ покоординатные ∇-производные совпадают в y-карте с покоординатными обычными производными, т.е. ковариантное дифференцирование в этой карте совпадает с обычным покоординатным.

Если это ковариантное дифференцирование также и в стандартных x-координатах совпадает с покоординатным, то матрица Якоби $\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right)$ постоянна и обе карты аффинно эквивалентны.

Действительно, в x-карте $\boldsymbol{e}^t_q$ есть $\frac{\partial x^t}{\partial y^q}$, а $(\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{A})i)^k = \Gamma^k_{ij} = 0$ есть в этом случае $\frac{\partial \boldsymbol{e}^k_i}{\partial x^s}\boldsymbol{e}^s_j$, т.е. $\frac{\partial\frac{\partial x^k}{\partial y^i}}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial y^j} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^j\partial y^i} = 0$ и $\frac{\partial x^k}{\partial y^i}$ постоянны.

Определение 9. Аффиные связности (M^n, ∇) и $(\bar{M}^n, \bar{\nabla})$ считаются эквивалентными, если существует диффеоморфизм M^n и $\bar{M}^n$, сохраняющий операции (переводящий операцию ∇ в $\bar{\nabla}$ и наоборот).

Предложение 4. *Связность (M, ∇) тогда и только тогда эквивалентна евклидовой (локально!), если хотя бы в одной системе координат символы Кристоффеля обращаются в нуль.*

Доказательство. В евклидовой связности (с покоординатным дифференцированием) $\boldsymbol{A})i$ постоянны и $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Если в некоторой карте все $\Gamma^k_{ij} = 0$, то, как мы только что видели, ковариантное дифференцирование совпадает в ней с покоординатным и координатный диффеоморфизм переводит данную связность в евклидову. □

Отметим, что это утверждение не дает эффективного способа ответить, когда связность (M, ∇) эквивалентна евклидовой (ибо нельзя перебрать все криволинейные координаты). Одна из задач для нас в будущем — найти критерий для эффективного ответа на этот вопрос.

Отметим, что $\{\Gamma^k_{ij}\}$ — это *не тензор* (ибо в случае $\mathbb{R}^n$ эти числа равны нулю в аффинных координатах, но отличны от нуля — в криволинейных).

В заключение этого пункта вычислим символы Γ^k_{ij} для случая $\mathbb{R}^n$. Пусть $x^1, .., x^n$— аффинные, а $y^1, \ldots, y^n$ — криволинейные координаты, $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ аффинные базисные поля, а $\boldsymbol{A})1, .., \boldsymbol{A})n$ — базис в y-координатах, то есть $\boldsymbol{A})i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y^i} = (\frac{\partial x^1}{\partial y^i}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial y^i})$ – в базисе $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$. В аффинном базисе наша операция есть покоординатное дифференцирование: $\nabla_{\boldsymbol{A})j}\boldsymbol{A})i = \frac{\partial \boldsymbol{A})i}{\partial \boldsymbol{A})j} = (\frac{\partial^2 x^1}{\partial y^i\partial y^j}, \ldots, \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^i\partial y^j}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\partial y^j}\bar{\boldsymbol{e}}_\alpha$.

Это «старые» (аффинные) координаты вектора $\nabla_{\boldsymbol{A})j}\boldsymbol{A})i$, через них выражаются «новые» с помощью матрицы $J = \mathcal{J}^{-1} = \{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\}$: $\Gamma^k_{ij} = (\nabla_{\boldsymbol{A})j}\boldsymbol{A})i)^k = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}$ (учтем, что Γ^k_{ij} — координаты $\nabla_{\boldsymbol{A})j}\boldsymbol{A})i$ в самом базисе $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n$, а не в $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$!).

5.3 Симметричные связности

Для евклидова пространства $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Какова связь $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ и $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$? Из (**) имеем: $(\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = [\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]^k + (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k)X^iY^j$. Для $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$ в формуле (**) меняем индексы $i \to j$, $j \to i$.

Теорема 25. *Для ∇ в евклидовом пространстве всегда $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$*

Доказательство. В декартовых координатах $\Gamma_{ij}^k = 0$, а равенство векторное: если векторы равны в одной системе, то равны и в любой другой. □

Определение 10. Связность ∇ называется симметричной, если $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ для всех векторных полей $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$.

Теорема 26. *Связность ∇ симметрична $\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.*

Доказательство. Имликация $\Leftarrow$ следует из формулы выше. Докажем $\Rightarrow$. Для этого используем то, что $\Gamma_{ij}^k = [\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j]^k$. Но $\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j = \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = [\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j] = 0$, поскольку координатные поля $\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n$ голономны.

Следствие 18. *∇ симметрична тогда и только тогда, когда $\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j$ для голономных полей.* □

5.4 Дифференцирование и параллельный перенос векторов вдоль кривой

Всюду далее рассматриваем только симметричные связности ∇. Пусть $A(t)$ — гладкая кривая в M^n, правильно параметризованная: касательные векторы $\boldsymbol{w}(t) = (\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ всюду на ней отличны от нуля. Пусть $\boldsymbol{v}(t)$ — гладкое векторное поле, но определенное только в точках кривой. Операция $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ имеет смысл и в этой ситуации, что вытекает из такой леммы:

Лемма 10. *Произвольное векторное поле $\boldsymbol{v}(x^1(t),\ldots,x^n(t)$, заданное на кривой, локально продолжается до гладкого поля $\tilde{\boldsymbol{v}}(x^1,\ldots,x^n)$ в окрестности кривой.*

Доказательство. В самом деле, поскольку $\boldsymbol{w}(t) \neq 0$, можно считать, что $\dot{x}^1 \neq 0$. Но тогда функция $x^1 = x^1(t)$ обратима, $t = t(x^1)$ (локально). Следовательно, вместе с $(x^1,\ldots,x^n)$ в окрестности $A(t)$ можно рассмотреть координаты $(t, x^2,..,x^n)$. Для точки B с координатами $x^1(t), x^2,\ldots,x^n$ полагаем:
$\tilde{\boldsymbol{v}}(B) = \boldsymbol{v}(x^1(t),x^2,\ldots,x^n) = (X^1(x^1(t),x^2(t),\ldots,x^n(t)),\ldots,X^n(x^1(t),x^2(t),\ldots,x^n(t)))$. □

Итак, продолжим оба поля $\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t)$ на окрестность кривой и рассмотрим $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$.

Лемма 11. *Векторное поле $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, рассмотренное на самой кривой, не зависит от способа продолжения $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$.*

Доказательство. Действительно, $(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = (\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k)Y^i = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^j \dot{x}^j$. Здесь $Y^i = \dot{x}^i$, $\boldsymbol{v}(t) = (X^1(t),\ldots,X^n(t))$ и $\boldsymbol{w}(t) = (Y^1(t),\ldots,Y^n(t))$. □

Поскольку результат $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ на кривой не зависит от продолжений полей на окрестности кривой, обозначим его через $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$. В координатах: $(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt})^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^i \frac{dx^j}{dt}$.

Свойства операции $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$:
0) результат — гладкое по t векторное поле вдоль кривой;
1) операция линейна по аргументу $\boldsymbol{v}$;
2) $\frac{D(f\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{df}{dt}\boldsymbol{v} + f\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$.
Доказательство прямо вытекает из выражения для $(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt})^k$.

Еще одно важное (полезное)

Следствие 19. *Если ∇ — векторное поле в области U, а $\boldsymbol{w}$ — одиночный вектор в точке $A_0 \in U$, то определена производная $\frac{D\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}}$ в этой точке.*

Действительно, проводим через A_0 кривую $A(t)$ с касательным вектором $\boldsymbol{w}$ в A_0 и определяем $\frac{D\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}}$ как $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$. Результат в точке A_0 не зависит от кривой, а только от $\boldsymbol{w}$ ибо $\frac{dX^k}{dt} = \frac{dX^k}{d\boldsymbol{w}} = \frac{\partial X^k}{\partial X^i}Y^i$, $(\boldsymbol{w} = (Y^1,\ldots,Y^n)$) и $\frac{dx^i}{dt} = Y^i$.

Напоминание: Параллельность векторов $\boldsymbol{v}$ в $\mathbb{R}^n$ = постоянство координат в аффинных системах координат (мы рассматриваем параллельные системы векторов одинаковой длины!). Но как быть в $\mathbb{R}^n$, если координаты криволинейны? В этом случае критерием параллельности поля $\boldsymbol{v}$ является условие $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для всех полей $\boldsymbol{w}$, или $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$ — для полей $\boldsymbol{v}$ вдоль кривых.

Определение 11. Поле $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ называется *параллельным* вдоль кривой в пространстве (M^n, ∇), если $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$. Поле $\boldsymbol{v}$ параллельно в некоторой области, если $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для всех полей $\boldsymbol{w}$ в этой области.

Выражением параллельности вдоль кривой в координатах служит условие $\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \frac{dx^j}{dt} = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Заметим, что это условие сохраняется при смене параметризации кривой (при заменах $t = t(\tau)$, так что определение зависит от самой кривой, но не от способа параметризации.

Если векторы $\boldsymbol{v}(t)$ параллельны вдоль кривой, говорят, что это есть параллельное перенесение вектора $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0(t)$ в остальные точки.

Замечание 9. *В $\mathbb{R}^n$ мы определили операцию ∇, пользуясь наличием параллельных переносов. Теперь же, наоборот, пользуясь наличием операции ∇, определили понятие параллельного переноса векторов.*

Теорема 27. *Для любого вектора v_0 в точке $A_0 = A(t_0)$ существует и единственно поле $v(t)$ параллельных векторов, для которого $v(t_0) = v_0$.*

Рассмотрим карту $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ вокруг A_0. Пусть $(X^1(t), \ldots, X^n(t))$ — неизвестные функции — координаты искомого поля $v(t)$. Они должны удовлетворять уравнениям $\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \frac{dx^j}{dt} = 0$. Но это система из n однородных уравнений, коэффициенты в которой — известные функции от t. По теореме теории дифференциальных уравнений она имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $X^i(t_0) = X^i_0$, решение имеется на всей карте. Участок кривой между двумя значениями параметра покрывается конечным числом карт, так что решение продолжается по всей кривой.

Поскольку система однородна, то сумма решений есть решение, и аналогично для произведения решения на число. Иными словами, перенос суммы двух векторов есть сумма результатов переноса каждого из слагаемых. Аналогично, перенос вектора λv_0 есть умноженный на λ результат переноса вектора v_0. Если $v_0 \neq 0$, то $v(t) \neq 0$ при всех t (иначе, если $v(t_1) = 0$, то при обратном переносе в силу единственности результата окажется $v_0 = 0$).

Следствие 20. *Определен параллельный перенос вдоль кривой $A(t)$ всего векторного пространства V_{A_0}. Этот перенос — семейство изоморфизмов $V_{A_0} \to V_{A(t)}$ для всех t.*

Пусть $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n$ — базис в V_{A_0}, и пусть $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ — перенос этих векторов по $A(t)$.

Следствие 21. *Векторное поле $\boldsymbol{v}(t)$ тогда и только тогда параллельно вдоль кривой, когда координаты $\boldsymbol{v}(t)$ в базисах $\bar{\boldsymbol{e}}_1(t), \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n(t)$ постоянны.*

Еще одно оправдание обозначения $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$. Пусть $\boldsymbol{v}$ — произвольное (гладкое) поле векторов вдоль $A(t)$. Обозначим через $\boldsymbol{v}^{\Delta t}(t)$ вектор, полученный как результат переноса $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$ в точку $A(t)$.

Теорема 28. $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}^{\Delta t}(t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$

Доказательство. Пусть $\bar{X}^i(t)$ — координаты $\boldsymbol{v}(t)$ в параллельном базисе $\bar{\boldsymbol{e}}_1(t), \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n(t)$, $\boldsymbol{v} = \bar{X}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i$. Тогда $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{D}{dt}(\bar{X}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i)$, то есть $(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt})^k = \frac{d\bar{X}^k}{dt}$.

Вычислим $lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}^{\Delta t}(t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$. Но $\bar{X}^k(t + \Delta t) = (\boldsymbol{v}^{\Delta t}(t))^k$ (при параллельном переносе координаты относительно параллельного базиса не меняются). Поэтому $\frac{\boldsymbol{v}^{\Delta t} - \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{X}^k(t + \Delta t) - \bar{X}^k(t)}{\Delta t} \bar{e}_k(t)$, при переходе к пределу тоже получим $\frac{d\bar{X}^k}{dt} \bar{\boldsymbol{e}}_k$.

5.5 Параллельный перенос ковекторов и любых тензоров.

Начнем с замечания. Если заданы изоморфизмы $V_0 \rightleftarrows V$ (взаимно обратные) векторных пространств, то ими определяются изоморфизмы пространств тензоров $\Phi^q_p(V_0) \rightleftarrows \Phi^q_p(V)$. Именно, в соответствующих базисах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n \in V$ соответствующие тензоры имеют одинаковые координаты. Поскольку матрицы перехода от $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ и от $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ к $\bar{\boldsymbol{e}}'_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}'_n$ совпадают, то это соответствие между тензорами не зависит от используемых базисов. Очевидно также, что значения соответствующих тензоров на соответствующих аргументах совпадают (поскольку полилинейные функции имеют идентичные координатные записи). В частности, это относится к тензорам типа $(1, 0)$, то есть к линейным функциям (или ковекторам).

Этим оправдывается

Определение 12. Поле $\xi(t)$ *ковекторов* вдоль кривой $A(t)$ называется *параллельным*, если для любого векторного поля $\boldsymbol{v}(t)$, параллельного вдоль кривой $< \xi(t), v(t) >= const$.

В частности, если $\bar{\boldsymbol{e}}_1(t), \dots, \bar{\boldsymbol{e}}_n(t)$ — параллельные вдоль кривой базисные поля, то параллельность $\xi(t)$ эквивалентна постоянству координат $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ ковектора в этих базисах. Отсюда – существование параллельного переноса ковектора ξ_0, заданного в точке $A(t_0)$: берем в качестве ξ_t поле с координатами в базисах $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$, равными координатам исходного ковектора ξ_0. Поскольку постоянные числа — гладкие функции от t, то поле $\xi(t)$ автоматически окажется гладким (матрицы перехода от $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ к базисам $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, определяемым картой, гладкие). В частности, для любого векторного поля $\boldsymbol{v}(t)$ функция $< \xi(t), \boldsymbol{v}(t) >$ от t — гладкая (и она постоянна для параллельных $\boldsymbol{v}(t)$).

Теорема 29. *$\xi(t)$ параллельны вдоль кривой тогда и только тогда, когда $\frac{d\xi_k}{dt} - \Gamma^i_{kj}\xi_i\frac{dx^j}{dt} = 0$ для всех $k = 1, \dots n$*

Очевидно, это условие сходно (и является его аналогом) с условием параллельности векторного поля, см. выше.

Доказательство. Параллельность $\xi(t)$ эквивалентна условию $\frac{d<\xi(t),\boldsymbol{v}(t)>}{dt} = 0$ для всех параллельных полей $\boldsymbol{v}(t) = 0$. Распишем в координатах: $\frac{d<\xi_k, X^k>}{dt} = \frac{d\xi_k}{dt}X^k + \ \xi_i\frac{dX^i}{dt} = \frac{d\xi_k}{dt}X^k - \Gamma^i_{kj}\xi_i X^k\frac{dx^j}{dt} = (\frac{d\xi_k}{dt} - \Gamma^i_{kj}\xi_i\frac{dx^j}{dt})X^k = 0$. Поскольку это верно для любых наборов $X^1, \dots, X^n$ в точке $A(t)$ (ибо из нее вектор с такими координатами можно параллельно переносить вперед и назад), то последнее условие эквивалентно сказанному в теореме. □

Определение 13. Тензорное поле T_t определенное вдоль кривой $A(t)$, называется параллельным, если значения T_t (как полилинейного функционала) постоянны на любых параллельных векторных и ковекторных полях – аргументах.

В частности, T_t — тогда и только тогда параллельный тензор, когда его координаты в параллельных базисах $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ постоянны. Отсюда — существование параллельных тензорных полей вдоль кривой (поля с постоянными координатами относительно указанных базисов) и их гладкость (постоянные функции — гладкие по t, и матрицы перехода от $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ к голономным полям $A)1, \dots, A)n$ и обратные матрицы состоят из гладких функций, остается применить формулы преобразования координат тензоров при смене базиса.

Таким образом, любой тензор, заданный в точке $A(t_0) = A_0$ можно параллельно разнести вдоль кривой.

Теорема 30. *а) перенос $T = T_1 \otimes T_2$ равен тензорному произведению перенесенных T_1 и T_2; б) перенос свертки sT совпадает со сверткой перенесенного тензора T.*

Доказательство. Утверждение а) — следствие постоянства параллельных тензоров на параллельных аргументах.

Поскольку свертка (ее результат) не зависит от используемых базисов $\boldsymbol{A})1, \dots, \boldsymbol{A})n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$, запишем ее в параллельно переносимых базисах $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$, и сопряженном базисе ковекторов $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$. Поскольку $< \boldsymbol{\varepsilon}^i, \boldsymbol{a} >= X^i$ — координата $\boldsymbol{a}$, для параллельных $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$, $< \boldsymbol{\varepsilon}^i, \boldsymbol{a} >= const$, т.е. ковекторные поля $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ тоже параллельны. Следовательно, при определении свертки на параллельных аргументах значения T и sT постоянны, откуда и следует б).

(Если $\bar{T}^{k\dots l}_{i\dots j}$ постоянны, то постоянны и $\bar{T}^{k\dots\alpha\dots l}_{1\dots\alpha\dots j}$, где α на тех же местах, по которым делается свертка – второй, координатный, способ доказательства). □

5.6 Дифференцирование поля тензоров.

Пусть T_t — поле тензоров вдоль кривой $A(t)$ (тензоры любого типа (p, q)). Имеет ли смысл понятие производной $\frac{dT_t}{dt}$? Сперва рассмотрим вопрос в евклидовом пространстве и в аффинных координатах, $T_t(a, \dots, b; \xi, \dots, \eta) = T_t{}^{k\dots l}_{i\dots j} X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$. В точке $A(t + \Delta t)$ будет такая же запись с координатами $T_{t+\Delta t}{}^{k\dots l}_{i\dots j}$. Пусть $\overset{\Delta t}{T_t}$ — это тензор $T_{t+\Delta t}$ перенесенный из $A(t + \Delta t)$ в точку $A(t)$. Поскольку базисные векторные поля в $\mathbb{R}^n$ постоянны (параллельны), то при переносе координаты тензора не изменятся: координаты $\overset{\Delta t}{T_t}$ суть координаты $T_{t+\Delta t}$. Поэтому для выражения, данного выше для $T_t(a, \dots, b; \xi, \dots, \eta)$, имеет смысл $\frac{\overset{\Delta t}{T_t} - T_t}{\Delta t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$ и переход к пределу при $\Delta t \to 0$. Возникает новый тензор типа (p, q), который обозначим $\frac{dT}{dt}$ и будем называть производной по t от T вдоль кривой. Координаты $\frac{dT}{dt}$ суть $\frac{dT^{k\dots l}_{i\dots j}}{dt}$, так что тензоры — гладкое поле вдоль кривой.

Наши рассуждения проходят лишь в аффинных координатах. В криволинейных координатах базисные поля в точке $A(t+\Delta t)$ отличаются от базиса в точке $A(t)$, и координаты $\overset{\Delta t}{T_t}$ не совпадут с координатами $T_{t+\Delta t}$. Так что вывод о существовании производной $\frac{dT}{dt}$ остается в силе, но координаты этого тензора не будут равны производным от координат T.

Рассмотрим общий случай, т.е. когда кривая $A(t)$ расположена в пространстве аффинной связности (M^n, ∇).

Определение 14. Производной $\frac{DT}{dt}$ от тензора T вдоль кривой называется предел

$$lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\Delta t}{T_t} - T_t}{\Delta t}.$$

Здесь $\overset{\Delta t}{T_t}$ —это тензор $T_{t+\Delta t}$, параллельно перенесенный из точки $A(t+\Delta t)$ в $A(t)$.

Такое определение оправдывается разобранным примером для T_t в $\mathbb{R}^n$, а также определением через предельный переход операции $\frac{Dv}{dt}$ для векторного поля v (поля тензоров типа $(0,1)$).

Теорема 31. *Производная $\frac{DT}{dt}$ существует и является гладким полем тензоров типа (p,q) вдоль кривой $A(t)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}}_n$ — параллельные базисные поля вдоль кривой. Запишем тензор $T=T_t$ в этих координатах: $T(a,\dots,b;\xi,\dots,\eta)$. Поскольку базисные поля $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}}_n$ параллельны, координаты $\overset{\Delta t}{T}$ в точке $A(t)$ совпадают с координатами T в $A(t+\Delta t)$. Поэтому разность, указанная в определении, имеет аналогичную запись (как выше), корректен переход к пределу при $\Delta t\to 0$. Результат: $\frac{D\bar{T_t}^{k\dots l}_{i\dots j}}{dt}\bar{X}^i\dots\bar{Y}^j\bar{\xi}_k\dots\bar{\eta}_l$. Очевидно, что это есть координатная запись тензора типа (p,q) с гладко зависящими от t коэффициентами. Поскольку переход от вспомогательных базисов $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}}_n$ к голономным $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$, определяемым картой на M^n, описывается гладкими функциями, то координаты $\frac{DT}{dt}$ будут гладкими на любых картах. □

Замечание 10. *Результат $\frac{DT}{dt}$ не зависит от выбора базисов $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}}_n$, само определение не связано с выбором базиса. С помощью $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}}_n$ мы доказали существование. Независимость следует и из того, что для других параллельных базисов $\bar{\boldsymbol{e}'}_1,\dots,\bar{\boldsymbol{e}'}_n$ матрица перехода к ним постоянна, так что операция дифференцирования координат $\bar{T}^{k\dots l}_{i\dots j}$ перестановочна с формулами преобразования координат тензора.*

Следствие 22. *Тензор $T=T(t)$ тогда и только тогда параллелен вдоль кривой, когда $\frac{DT}{dt}=0$.*

В самом деле, параллельность T равносильна постоянству его координат типа $\bar{T}^{k..l}_{i\dots j}$, то есть равенству нулю их производных по t.

Следствие 23. *а)* $\frac{DT_1\otimes T_2}{dt}=\frac{DT_1}{dt}\otimes T_2+T_1\otimes\frac{DT_2}{dt}$; *б)* $\frac{D\,sT}{dt}=s\frac{DT}{dt}$.

Доказательство. Если $T=T_1\otimes T_2$, то $\bar{T}^{k\dots l}_{i\dots j}=\bar{T}_1{}^{k\dots k'}_{i\dots i'}\bar{T}_1{}^{l\dots l'}_{j\dots j'}$, откуда немедленно получаем а).

В случае б) $s\overline{T}^{k\dots l}_{i\dots j}=\bar{T}^{k\dots\alpha\dots l}_{i\dots\alpha\dots j}$ (суммирование по индексу α от 1 до n, индекс на тех местах, по которым производится свертка), и при дифференцировании этих равенств по t следует только учесть, что производная перестановочна с конечной суммой по α.

5.7 Вид $\frac{DT}{dt}$ в координатах карты.

Теорема 32. $(\frac{DT}{dt})^{k\dots l}_{i\dots j}=\frac{DT^{k\dots l}_{i\dots j}}{dt}-T^{k\dots l}_{\alpha\dots j}\Gamma^\alpha_{i\beta}\dot{x}^\beta-\dots-T^{k\dots l}_{i\dots\alpha}\Gamma^\alpha_{j\beta}\dot{x}^\beta+T^{\alpha\dots l}_{i\dots j}\Gamma^k_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta+\dots+T^{k\dots\alpha}_{i\dots j}\Gamma^l_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta=\{\frac{\partial T^{k\dots l}_{i\dots j}}{\partial x^\beta}-T^{k\dots l}_{\alpha\dots j}\Gamma^\alpha_{i\beta}-\dots-T^{k\dots l}_{i\dots\alpha}\Gamma^\alpha_{j\beta}+T^{\alpha\dots l}_{i\dots j}\Gamma^k_{\alpha\beta}+\dots.+T^{k\dots\alpha}_{i\dots j}\Gamma^l_{\alpha\beta}\}Z^\beta=\frac{DT}{dx^\beta}Z^\beta$. *(Если параметром служит $t=x^\beta$, касательным вектором является $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A})\beta=(0,...,1_\beta,...,0)$, и выражение в фигурных скобках есть в действительности $(\frac{DT}{dx^\beta})^{k\dots l}_{i\dots j}$.*

Доказательство. Здесь $\boldsymbol{w}=(\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)=(Z^1,\dots,Z^n)$. Для доказательства запишем T в координатах карты: $T(a,...,\boldsymbol{b};\xi,\dots,\eta)=T^{k\dots l}_{i\dots j}X^i\dots Y^j\xi_k\dots\eta_l$.

Заметим, что для изучения T достаточно рассматривать только параллельные поля аргументов $\boldsymbol{a},\dots,\boldsymbol{b};\xi,\dots,\eta$: при этом *в каждой точке $A(t)$ будут реализованы любые наборы аргументов.* Для таких полей $\overset{\Delta t}{T_t}(\boldsymbol{a},\dots,\boldsymbol{b};\xi\dots,\eta)=T(\boldsymbol{a}(t+\Delta t),\dots;\dots\eta(t+\Delta t))$. Поэтому операция $lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\overset{\Delta t}{T}$

$-T$) означает операцию дифференцирования функции $T(\boldsymbol{a}(t), ., \boldsymbol{b}(t); \xi(t), \dots, \eta(t))$ от t, записанную выше, и производная есть сумма произведений из $p+q+1$ множителей. Дифференцирование первого множителя дает $\frac{dT^{k\dots l}_{i\dots j}}{dt} X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$. При дифференцировании по второму множителю проведем замену $\frac{dX^i}{dt} = -\Gamma^i_{j\beta} X^j \dot{x}^\beta$, учитывая параллельность поля $\boldsymbol{a}$. Далее, заменим индекс j на i, чтобы вместо X^j было X^i. При этом возникла необходимость замены i, заменим i на α.

Получим $(-T^{k\dots l}_{\alpha\dots j} \Gamma^\alpha_{i\beta} \dot{x}^\beta) X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$.

Аналогичная процедура применяется ко всем p векторным множителям. Например, после ее применения к множителю Y^j (с номером p) получим $(-T^{k\dots l}_{i\dots\alpha} \Gamma^\alpha_{i\beta} \dot{x}^\beta) X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$.

При дифференцировании по $(p+1)$-му множителю ξ_k замена возможна $\frac{d\xi_k}{dt} = \Gamma^j_{k\beta} \xi_j \dot{x}^\beta$ (из-за параллельности поля ξ_k !). Но вместо ξ_j, лучше иметь ξ_k, поэтому заменяем индекс j на k, а прежний k на α. В результате получим $(T^{\alpha\dots l}_{i\dots j} \Gamma^k_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta) X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$. Точно так же поступим со всеми множителями — координатами ковекторов. После дифференцирования последнего получим $(T^{\alpha\dots l}_{i\dots j} \Gamma^l_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta) X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$. Просуммируем по всем $p+q+1$ результатам, получим $\frac{DT}{dt}(\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}; \xi, \dots, \eta) = S^{k\dots l}_{i\dots j} X^i \dots Y^j \xi_k \dots \eta_l$. Здесь $S^{k\dots l}_{i\dots j}$ совпадают с (первыми) выражениями в формулировке теоремы. Но представление тензора (полилинейной функции) в виде полилинейной формы единственно (в каждой точке), и $S^{k\dots l}_{i\dots j} = (\frac{DT}{dt})^{k\dots l}_{i\dots j}$. Параллельность полей, еще раз отметим, не ограничительна, поскольку в каждой точке ими реализуются любые наборы аргументов. Переход от первого выражения в теореме ко второму очевиден, т.к. $\frac{DT^{k\dots l}_{i\dots j}}{dt} = \frac{\partial T^{k\dots l}_{i\dots j}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{dt}$. □

5.8 Выводы и следствия.

1. Для $T = f$ получаем просто $\frac{df}{dt}$ (тензор типа $(0,0)$).

2. Для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$, тензоров типа $(0,1)$, получаем уже имеющиеся формулы для $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$.

3. Для $\xi = \xi(t)$, поля тензоров $(1,0)$ (то есть ковекторов) $(\frac{D\xi}{dt})_i = \frac{d\xi_i}{dt} - \Gamma^\alpha_{i\beta} \xi_\alpha \dot{x}^\beta = (\frac{\partial \xi_i}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{i\beta} \xi_\alpha) Z^\beta = (\frac{D\xi}{dx^\beta})_i Z^\beta$. Нелишне вспомнить, что условие параллельности ξ теперь есть $\frac{D\xi}{dt} = 0$, т.е. обращение всех $(\frac{D\xi}{dt})_k$ в нуль. (Получаем прежнее условие — но мы им пользовались в теореме).

4. Если тензор T задан в области, а $\boldsymbol{w}$ — одиночный вектор в точке A_0, проводим через A_0 кривые $A(t)$ с касательным вектором $\boldsymbol{w}$ в точке A_0 и вычисляем $\frac{DT}{dt}$ в этой точке. Результат не зависит от кривой, а лишь от $\boldsymbol{w}$. Поэтому обозначаем его $\frac{DT}{d\boldsymbol{w}}$ — производная от тензорного поля по одиночному вектору (обобщение $\frac{df}{d\boldsymbol{w}}$). Если $\boldsymbol{w}$ — тоже векторное поле в области, то определена операция $\nabla_{\boldsymbol{w}} T$ (т.е. $\frac{DT}{d\boldsymbol{w}}$ в каждой точке). Результат — гладкое тензорное поле того же типа (p,q). При этом для $(\nabla_{\boldsymbol{w}} T)^{k\dots l}_{i\dots j}$ справедлива формула (вторая) в теореме выше. В фигурных скобках там стоит выражение $(\nabla_{\boldsymbol{e}_\beta} T)^{k\dots l}_{i\dots j}$. Поэтому $\nabla_{\boldsymbol{w}} T = (\nabla_{\boldsymbol{e}_\beta} T) z^\beta$ (поскольку это верно для всех координат тензора, отвечающих всем индексам $i\dots j; k\dots l$).

5. Из доказанных для $\frac{DT}{d\boldsymbol{w}}$ соотношений имеем: $\nabla_{\boldsymbol{w}}(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_{\boldsymbol{w}} T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_{\boldsymbol{w}} T_2)$, $\nabla_{\boldsymbol{w}} sT = s\nabla_{\boldsymbol{w}} T$.

6. Если в качестве $T = \xi$ взять ε^k — поле базисного ковектора, то $(\frac{D\varepsilon^k}{dt})_i = 0 - \Gamma^k_{i\beta} \dot{x}^\beta$. В частности, беря за параметр $t = x^\beta$, получим $(\frac{D\varepsilon^k}{dt})_i = -\Gamma^k_{i\beta} = (\nabla_{\boldsymbol{A})\beta} \varepsilon^k)_i$ — новая интерпретация символов Кристоффеля.

7. Набор $\{\nabla_{\boldsymbol{e}_1} T, \nabla_{\boldsymbol{e}_2} T, \dots, \nabla_{\boldsymbol{e}_n} T]\}$ в силу полученного равенства $\nabla_{\boldsymbol{w}} T = (\nabla_{\boldsymbol{e}_\beta T}) Z^\beta$ играет ту же роль, что и частные производные. Поэтому его нередко обозначают как $\nabla T = grad\, T$. Если, далее, $\boldsymbol{w}$ считать тоже переменным векторным полем, то есть, подобно $\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{b}; \xi, \dots, \eta$, отнести $\boldsymbol{w}$ к аргументам, то из координатных формул для $\nabla_{\boldsymbol{w}} T$ выше видно, что $\nabla_{f\boldsymbol{w}_1 + g\boldsymbol{w}_2} T = f\nabla_{\boldsymbol{w}_1} T + g\nabla_{\boldsymbol{w}_2} T$. Таким образом, $\nabla T = grad\, T$ — это *тензорное поле* типа $(p+1, q)$, т.е. результат вычисления в данной точке не зависит от значений функций в других точках (так же как $grad\, f$ от f типа $(0,0)$ есть поле типа $(1,0)$).

8. Сворачивая $\nabla_{\boldsymbol{w}} T$ по аргументу $\boldsymbol{w}$ и некоторому контравариантному аргументу, получим тензор типа $(p, q-1)$, который можно считать дивергенцией тензора T: $s(\nabla_{\boldsymbol{w}} T) = \boldsymbol{div}\, T$ (одна из q возможных дивергенций), $\boldsymbol{div}\, T = s(grad\, T)$. В частности, в любом пространстве аффинной связности (M^n, ∇) определена дивергенция $\boldsymbol{div}\, \boldsymbol{v}$ векторного поля $\boldsymbol{v}$, как свертка тензора типа

$(1,1)$. Имеем $(\nabla_{A)i}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}X^j$, $\boldsymbol{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij}X^j$. Так выглядит, в частности, дивергенция от векторного поля в пространстве $\mathbb{R}^n$ в криволинейных координатах (выражения для Γ^k_{ij} в этом пространстве были получены нами выше). Для поля $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ в $\mathbb{R}^3$ обычная дивергенция $\boldsymbol{div}\,v = A'_x + B'_y + C'_z$ есть $s(grad\,\boldsymbol{v})$, где $grad\,\boldsymbol{v}$ — тензор типа $(1,1)$, составленный частными производными A, B, C.

5.9 Аффинная связность на римановом многообразии.

Пока мы имеем только один пример связности (M^n, ∇) — дифференцирование в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что в $\mathbb{R}^n$ при параллельных переносах сохраняются длины векторов.

Пусть M^n — риманово многообразие.

Определение 15. 1) Связность ∇ *совместима с римановой метрикой*, если длина $|\boldsymbol{v}|$ векторов постоянна для параллельных векторных полей. Из определения вытекает

Следствие 24. *2) скалярное произведение $(\boldsymbol{v}, w)$ постоянно для параллельных векторных полей (в силу равенства $|\boldsymbol{v} + w|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 + 2(\boldsymbol{v}, w) + |w|^2$).*

3) Метрический тензор G (типа $(2,0)$) параллелен по всему многообразию. В частности, $\nabla_w G = 0$ для всех полей w.

Теорема 33. *4) Каждое из предыдущих утверждений эквивалентно $\frac{d(\boldsymbol{v},w)}{dt} = (\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, w) + (\boldsymbol{v}, \frac{Dw}{dt})$.*

Доказательство. Осталось доказать импликации 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

Для $\boldsymbol{v} = (X^1, \ldots, X^n)$, $w = (Y^1, \ldots, Y^n)$ имеем $(\boldsymbol{v}, w) = g_{ij}X^iY^j = s^2(G \otimes \boldsymbol{v} \otimes w)$, поэтому $\frac{d(\boldsymbol{v},w)}{dt} = \frac{d}{dt}s^2(G \otimes \boldsymbol{v} \otimes w) = s^2\frac{D}{dt}(G \otimes \boldsymbol{v} \otimes w) = s^2(G \otimes \frac{D\boldsymbol{v}}{dt} \otimes w + G \otimes \boldsymbol{v} \otimes \frac{Dw}{dt}) = (\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, w) + (\boldsymbol{v}, \frac{Dw}{dt})$ (воспользовались тем, что $\frac{DG}{dt} = 0$). Этим доказано 4).

Чтобы получить из 4) утверждение 1), продифференцируем $|\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ и воспользуемся параллельностью $\boldsymbol{v}$, т.е. $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$, получим, что $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = const$.

Наиболее удобным является условие 4). Его частным случаем служит 4$'$) $\frac{\partial(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = (\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) + (\boldsymbol{e}_i, \nabla_{\boldsymbol{e}_k}, \boldsymbol{e}_j)$.

Теорема 34. *Условие 4$'$) (для всех i, j, k) эквивалентно 4).*

Доказательство. Поскольку $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^k}Z^k$, $\frac{D}{dt} = \frac{D}{\partial x^k}Z^k$, где $(Z^1, \ldots, Z^k) = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^k)$ — касательные векторы к кривой, то условие 4) эквивалентно требованию (для всех $k = 1, ..., n$) $\frac{\partial(\boldsymbol{v},w)}{\partial x^k} = (\frac{D\boldsymbol{v}}{\partial x^k}, w) + (\boldsymbol{v}, \frac{Dw}{\partial x^k})$. Докажем, что эти равенства вытекают из 4$'$). Для этого вычислим выражения, стоящие в этом равенстве, считая, что $\boldsymbol{v} = X^iA)i$, $w = Y^jA)j$.

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}, w)}{\partial x^k} = \frac{\partial(g_{ij}X^iY^j)}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}X^iY^j + \underline{g_{ij}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}Y^j} + \underbrace{g_{ij}X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}}$$

$$(\nabla_{A)k}\boldsymbol{v}, w) = (\nabla_{A)k}X^iA)i, Y^jA)j) = \underline{\frac{\partial X^i}{\partial x^k}(A)i, A)j)Y^j} + (\nabla_{A)k}A)i, A)j)X^iY^j$$

$$(\boldsymbol{v}, \nabla_{A)k}w) = (X^iA)i, \nabla_{A)k}Y^jA)j) = \underbrace{X^i(A)i, A)j)\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}} + (A)i, \nabla_{A)k}A)h)X^iY^j$$

Исходя из 4$'$), показываем, что первое выражение равно сумме второго и третьего (с учетом совпадения одинаково отмеченных членов).

5.10 Теорема Леви-Чивита.

Теорема 35. *На римановом многообразии существует, и притом только одна, симметричная аффинная связность ∇, совместимая с метрикой.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему на карте. В силу единственности, тогда связности, построенные в картах, будут совпадать на пересечениях карт, и операция ∇ будет определена на всем многообразии. Перепишем 4$'$) трижды, пользуясь круговой заменой индексов.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^\alpha_{ik}g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk}g_{i\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^\alpha_{ji} g_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ki} g_{j\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma^\alpha_{kj} g_{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{ij} g_{k\alpha}$$

Считаем символы Кристоффеля симметричными, вычтем первое из суммы второго и третьего, получим $\Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$. Это выражение называется *первым тождеством Кристоффеля*. Пусть $\{g^{k\beta}\} = G^{-1}$ – обратная матрица. С учетом того, что $g_{\alpha k} g^{k\beta} = \delta^\beta_\alpha$, получим *второе тождество Кристоффеля*: $\Gamma^\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}) g^{k\alpha}$.

Ясно, что оба тождества эквивалентны. Фактически для карты найдены символы Γ^α_{ij} связности ∇. Если они действительно определяют ∇, то связность ∇ совместима с метрикой, поскольку Γ^α_{ij} удовлетворяют условию $4'$), ибо они искались из уравнения $4'$. (Впрочем, это нетрудно проверить и непосредственно.) Отметим, что $\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ji}$, то есть связность должна быть симметричной. Символы найдены однозначно, поэтому операция ∇ единственна.

Остается проверить, что символы действительно определяют связность. Определим ∇ формулой $(\nabla_w \boldsymbol{v})^k = (\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i) Y^j$ и проверим исходное определение.

1. Очевидно, что $(\nabla_w \boldsymbol{v})^k$ —гладкие функции.

2. Линейность по $\boldsymbol{v}$ очевидна (для $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$ с постоянными λ_1, λ_2).

3. $\nabla_{f_1 w_1 + f_2 w_2} \boldsymbol{v} = f_1 \nabla_{w_1} \boldsymbol{v} + f_2 \nabla_{w_2} \boldsymbol{v}$, как видно из определяющей формулы.

4. Координаты $f\boldsymbol{v}$ суть $(fX^1, \ldots, fX^n)$, поэтому $\frac{\partial (fX^k)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} X^k + f \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$.

Следовательно, $(\nabla_w (f\boldsymbol{v}))^k = (\frac{\partial f}{\partial x^j} X^k + f \frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} f X^i) Y^j = \frac{df}{dw} X^k + f (\nabla_w \boldsymbol{v})^k$.

□

Замечание 11. *1. Теорема справедлива и для псевдоримановых многообразий (использована лишь симметрия и невырожденность скалярного произведения G).*

2. операция ∇ сохраняется при изометриях многообразия (как и все определяющие ее тождества).

3. метрика G определяет символы Кристоффеля, которыми затем задается операция ∇.

4. Ниже будет видно, что без условия совместимости с метрикой могут существовать и многие иные (даже симметричные) ∇ на M^n.

5.11 Связность ∇ на подмногообразиях.

Пусть M^m—гладкое подмногообразие риманова многообразия N^n (например, M^m лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Метрика объемлющего многообразия индуцирует риманову метрику на M^m: касательные базисные поля $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ карт M^m — это касательные векторы и для N^n, поэтому определены в $\mathbb{R}^\ltimes$ их скалярные произведения $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$, задающие метрический тензор на M^m.

Замечание 12. *Построения ниже справедливы и в случае, когда N^n (или $\mathbb{R}^n$) — псевдориманово многообразие (или псевдоевклидово пространство), однако мы будем предполагать, что на M^m индуцируется обычная риманова метрика.*

Пусть ∇ — операция дифференцирования, определяемая на M^m метрикой (по теореме Леви-Чивита), и ∇^0— аналогичная операция в объемлющем многообразии. Как было отмечено ранее, операция $\nabla_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{v}$ определена не только для полей $\boldsymbol{w}$, но и для одиночных векторов $\boldsymbol{w}$. Кроме того, результат совпадает с $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$ для кривых, касающихся $\boldsymbol{w}$. Для полей $\boldsymbol{v}$, определяемых в M^m, гладкие кривые тоже можно брать лежащими в M^m. Это означает, что операцию ∇^0 можно применять не только к полям в объемлющем пространстве, но и к полям $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, касательным к подмногообразию. Правда, в отличие от $\nabla_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{v}$ результат $\nabla^0_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{v}$ уже не будет (вообще говоря) касательным полем к M^m, а полем на M^m, состоящим из векторов, касательных к N^n.

Пример. Для $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ векторное поле $\boldsymbol{v}$ — касательные к экватору постоянной длины, $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ в $\mathbb{R}^3$ лежат в плоскости экватора, но направлены к центру и не касаются S^2.

Наша задача — выяснить связь между полями $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ и $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ для векторных полей $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ многообразия M.

Существование $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ можно показать и иначе.

Лемма 12. *Локально координаты с M^m продолжаются до координат в N^n.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \dots, x^m)$ — локальная параметризация M^m на карте N^n, $\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$. Пусть $\boldsymbol{e}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ дополнение до базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ векторов в точке A_0 на карте. Тогда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \dots, x^m) + x^{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \dots x^n\boldsymbol{e}_n$ определяет координаты вокруг A_0 в N^n. В самом деле, это гладкие функции от $x^1, \dots, x^n$, и в точке A_0 векторы $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i$ линейно независимы для всех $i = 1, \dots, n$ (то есть матрица Якоби перехода от координат $r = r(u^1, \dots, u^n)$ в N^n к переменным $x^1, \dots, x^n$ невырождена). $\square$

Из леммы следует, что любые поля $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ на M^m продолжаемы (локально) до полей в N^n, для которых операция $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ определена (координаты $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ в точке $(x^1, \dots, x^n)$ равны координатам исходных полей на M^m в точках $(x^1, \dots, x^m)$). Однако $(\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^i$ зависят лишь от координат $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ в точках A_0, т.е. в точках из M^m они не зависят от способа продолжения $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ за пределы M^m.

Касательное пространство к N^n в точках $A \in M$ есть прямая сумма $V_A \oplus \mathbb{R}^{n-m}_A$, где V_A — касательное пространство к M^m, $\mathbb{R}^{n-m}_A$ — линейная оболочка $\boldsymbol{A})m+1, \dots, \boldsymbol{A})n$. Пусть $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ — проекция $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ на V_a параллельно $\mathbb{R}^{n-m}_A$.

Теорема 36. *Операция $\overline{\nabla}$ — симметричная аффинная связность на M^m.*

Доказательство. Требуется проверить условия 0) – 3) определения операции связности. Условие 0) — следствие гладкости полей $\boldsymbol{A})1, \dots, \boldsymbol{A})n$ и гладкости $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, то есть гладкости координат этого поля в базисах $\boldsymbol{A})1, \dots, \boldsymbol{A})n$. Условия 1) – 3) справедливы для $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ и сохраняются при проектированиях. Например, в случае 3) имеем $\overline{\nabla}(f\boldsymbol{v}) =$ проекция $\overline{\nabla}^0_{\boldsymbol{w}}(f\boldsymbol{v}) =$ проекция $(\frac{df}{d\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + f\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}) = \frac{df}{d\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + f\cdot$ проекция $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \frac{df}{d\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + f\overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ (здесь проекция $\boldsymbol{v}$ равна $\boldsymbol{v}$, поскольку $\boldsymbol{v} \in V_A$).

Проверим симметрию: $\overline{\nabla}_{A)j}A)i = \overline{\nabla}_{A)i}A)j$ при $i \le n$ (отсюда будет следовать $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ji}$, а это эквивалентно симметрии $\overline{\nabla}$). Однако, $\overline{\nabla}_{A)j}A)i =$ проекция $\nabla^0_{A)j}A)i$, а для ∇^0 обсуждаемое соотношение верно для всех $i, j = 1, \dots, N$.

Поскольку координаты с M^m можно продолжать на окрестности в N^n многими способами, то и проекции N^n на касательные к M^m имеются различные. Может показаться, что на M^m имеется много симметричных операций $\overline{\nabla}$. Однако пока мы не учитываем одно из важнейших требований — совместимость получаемых операций $\overline{\nabla}$ с метрикой M^m.

Теорема 37. *Совместимая с метрикой M^m связность ∇ получается при ортогональных проектированиях ∇^0 на M^m.*

Итак, требуем, чтобы разложения $\mathbb{R}^n_A = V_A \oplus \mathbb{R}^{n-m}_A$ были ортогональными. Кстати, поскольку метрика на M^m невырождена, то $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму $V_A \oplus V_A^\perp$ (то есть V_A и ортогонального дополнения) даже в случае, когда N^n псевдориманово ($\mathbb{R}^n_A$ — псевдоримановы пространства).

Следствие 25. *Векторное поле $\boldsymbol{v}$ на M^m тогда и только тогда параллельно (то есть $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для любых $\boldsymbol{w}$), когда $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} \perp V_A$ для всех $A \in M^n$ и касательных к M^m векторных полей $\boldsymbol{w}$.*

Задача Доказать это для векторов $\boldsymbol{v}$ постоянной длины, касающихся экватора (или меридиана) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Доказательство теоремы: Пусть $\boldsymbol{A})1 \dots, \boldsymbol{A})n$ — базисные поля на карте M^m. Процесс ортогонализации в алгебре описывается операциями, гладко зависящими от точки A в M^m , так что получающиеся в результате ортогональные векторные поля $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ — гладкие (хотя они и не голономны). Ортогональная проекция вектора $u \in \mathbb{R}^n_A$ на V_A есть сумма $(u, \bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \dots + (u, \bar{\boldsymbol{e}}_n)\bar{\boldsymbol{e}}_n$, а потому — гладкое векторное поле (этим мы заново проверили условие 0) в определении $\overline{\nabla}$).

Докажем совместимость $\overline{\nabla}$ с метрикой M^m. Имеем $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$, где $\boldsymbol{v}' \in \perp V_A$. Здесь $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — касательные поля для M^m. Проверим критерий 4) (поле $\boldsymbol{u}$ тоже на M^m). $\frac{d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{d\boldsymbol{w}} = (\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v}, \nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u}) = (\overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v}, \overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = (\overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v}, \overline{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u})$, ибо $\boldsymbol{v}' \perp \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}'$. В силу теоремы Леви-Чивита $\overline{\nabla} = \nabla$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 13. *Одно и то же риманово многообразие можно по-разному вкладывать в $\mathbb{R}^N$ (например, лист бумаги можно сворачивать то конусом, то цилиндром, не обязательно круговыми к тому же). Но та же самая операция ∇ на нем получается при всех вложениях ортогональным проектированием на многообразие классической операции ∇^0 в $\mathbb{R}^N$.*

6 ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ.

6.1 Геодезические линии.

Человеку, идущему по экватору, кажется, что он идет прямо, не сворачивая. Иное дело — по параллели, особенно если она близка к (северному) полюсу: при движении на восток он будет постоянно отворачивать влево. Наша задача — найти математический язык для описания подобных явлений.

Пусть M^n – риманово многообразие и $A(t)$ – гладкая линия в M^n. На карте она описываегся как $\boldsymbol{r}(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ причем $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \neq 0$ при правильной параметризации. Однако длина $|\boldsymbol{v}|$, вообще говоря, не постоянна, она определяет собой скорость движения по траектории. Будем рассматривать только равномерные движения, когда $|\boldsymbol{v}| = const$. Поскольку $ds = |\boldsymbol{v}|dt$, это означает, что $s = |\boldsymbol{v}|t + s_0$ — линейная зависимость. При измерении обоих параметров от одной точки можно считать, что $s = |\boldsymbol{v}|t$. Итак,

Вывод: Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ тогда и только тогда имеет постоянную длину, когда параметр t лишь множителем отличается от натурального s. При этом $s = |\boldsymbol{v}|t$, этот множитель — скорость.

Поставим вопрос о том, в каких случаях вектор $\boldsymbol{v}$ не только постоянен по длине, но и параллелен вдоль своей кривой. Для этого, как мы знаем, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$. Что это за линии?

Лемма 13. *В $\mathbb{R}^n$ это в точности прямые.*

Доказательство. Действительно, если линия прямая, то это очевидно. Наоборот, пусть $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$, или $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = 0$. Интегрируя, получим $x^i = x^i_0 + X^i t$ для постоянных $X^i, i = 1, ..., n$, а это параметрические уравнения прямой линии. □

Определение 16. Кривая $A(t)$ в римановом многообразии M^n называется *геодезической*, если ее векторы скорости $\boldsymbol{v}$ образуют параллельное векторное поле вдоль кривой.

Напоминание. Мы рассматриваем параметризации параметрами, пропорциональными натуральному (иначе при движении по той же линии вектор $\boldsymbol{v}$, характеризующий скорость движения, не будет перенесением одного и того же вектора вдоль кривой, например, его длина меняется).

Итак, геодезические линии в M^n — аналог прямых в $\mathbb{R}^n$. Они определяются условием $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$. Если $\boldsymbol{v} = (X^1, ..., X^n) = (\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n)$, то уравнения параллельности для $\boldsymbol{v}$ немедленно приводят к n (нелинейным) уравнениям 2-го порядка, в которых искомыми являются координатные функции точек кривой (в отличие от линейных уравнений параллельности $\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}^j = 0$, где кривая задана, а ищутся координаты переносимого вектора):

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \ k = 1, ..., n. \tag{1}$$

Теорема 38. *Линия тогда и только тогда геодезическая, когда ее координаты* $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ *удовлетворяют уравнениям (1).*

Доказательство. Если $\{x^i(t)\}$ — решение системы, то для поля $(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = (\dot{x}^1(t), \ldots \dot{x}^n(t)))$ выполнено условие параллельности (параллельного переноса). □

В частности, для решений системы *параметр t оказывается пропорциональным натуральному.*

6.2 Кривизны линий.

Пусть $A(t)$ — произвольная кривая, касательный вектор которой $\boldsymbol{v}$, вообще говоря, не параллелен, но имеет постоянную длину, и $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} \neq 0$.

Лемма 14. $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$

Доказательство. В самом деле, достаточно продифференцировать тождество $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = const$, $0 = \frac{d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{dt} = (\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \frac{D\boldsymbol{v}}{dt}) = 2(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v})$. □

Перейдем к натуральному параметру $t = s$. В этом случае $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varepsilon}_1$ – первый вектор в репере Френе.

Определение 17. Величину $k_g = \left|\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}\right|$ будем называть *геодезической кривизной* линии в римановом многообразии M^n.

Пусть $\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{k_g}\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$ (или $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = k_g\bar{\varepsilon}_2$) — единичный вектор. По лемме $\bar{\varepsilon}_2 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1$. Вектор $\bar{\varepsilon}_2$ – аналог второго вектора в репере Френе.

Следствие 26. *Линия тогда и только тогда геодезическая, если для нее $k_g = k_g(s) = 0$ (т.е. когда она "не искривлена" в многообразии).*

Часто k_g называют «внутренней» кривизной линии в многообразии.

Пусть M^n реализовано в качестве гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^N$ с индуцированной на нем метрикой (например — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$).

Теорема 39. *$k_g\bar{\varepsilon}_2$ — ортогональная проекция $k\boldsymbol{\varepsilon}_2$ на V_A (в каждой точке $A \in M$).*

Доказательство. В самом деле, $k\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \nabla^0_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$, но $k_g\bar{\varepsilon}_2 = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$ по определению есть ортогональная проекция $\nabla^0_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$. □

Мы ощущаем только внутреннюю (геодезическую) кривизну k_g (но не k !) линий на поверхности Земли. Поскольку k_g определяется «внутренним» образом, эта кривизна не меняется при «изгибаниях» (поверхностей, многообразий), *изометриях* – диффеоморфизмах многообразий, не изменяющих метрику. Примеры – изгибания плоскости на цилиндрические или конические поверхности (или наоборот).

6.3 Геодезические на сфере и плоскости Лобачевского.

Считаем, что сфера S^{n-1} стандартным образом вложена в $\mathbb{R}^n$, а плоскость Лобачевского L_2 реализована как нижняя полость двуполостного гиперболоида в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_1$.

Теорема 40. *Геодезические линии на S^{n-1} — большие окружности (центральные сечения двумерными плоскостями). Геодезические линии на L^2 — центральные сечения.*

Доказательство. В самом деле, в каждой точке A в любом касательном направлении ε_1 имеется центральное сечение. Вектор ε_1 лежит не только в касательном пространстве V_A, но и в центральном сечении $(A; \varepsilon_1)$, поэтому в этой же двумерной плоскости лежит и вектор $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ – производная в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^3_1$. Поскольку $\varepsilon_1 \perp OA$ и $\frac{d\varepsilon_1}{ds} \perp \varepsilon_1$, $\frac{d\varepsilon_1}{ds}$ – параллелен вектору $\dots$A$\dots$ $A \perp V_A$, следовательно, $\frac{d\varepsilon_1}{ds} \perp V_A$, а $\frac{D\varepsilon_1}{ds}$ — ортогональная проекция $\frac{d\varepsilon_1}{ds}$ на V_A. Следовательно, $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = 0$. □

6.4 Элементы вариационного исчисления (новое, иное освещение геодезических).

Рассматриваются m-поверхности в $\mathbb{R}^n$, с общей границей: $x^i(u^1, ..., u^m) = x^i$, $i = 1, ..., n$, $a^i \le u^i \le b^i$ (на границе области определения функции x^i одни и те же для всех этих поверхностей).

Лагранжиан: $L = L(u^1, ..., u^m; , x^1, ..., x^n; ..., \frac{\partial x^k}{\partial u^j}, ...)$ — гладкая функция от $m + n + mn$ переменных. Для удобства и краткости введем обозначение $\frac{\partial x^k}{\partial u^j} = q(k, j)$.

Задача оптимизации: Найти на таких m-подмногообразиях либо минимум, либо максимум функционала $J(x) = J(x^1, ..., x^n)$, где $J(x) = \int ... \int L(u^1, ..., u^m; x^1, ..., x^n; ..., q(k, j), ...)\, du^1...du^m$.

Примеры. Длины дуг от A до B в римановом многообразии; площади поверхностей с заданным контуром; в механике $x^i = x^i(t)$, и скорости $q^i = \dot{x}^i$ и т.д.

Возьмем функции $\eta^i = \eta^i(u^1, ..., u^m)$, равные нулю на крае, $\bar{x} = x + \varepsilon\eta$, $\bar{x}^k = x^k + \varepsilon\eta^k$, $\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial u^j} = \frac{\partial x^k}{\partial u^j} + \varepsilon\frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} = q(k, j) + \varepsilon q^0(k, j)$.

Рассмотрим $J(x + \varepsilon\eta)$, $-\varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. Это гладкая функция от ε, и если $x(u)$ оптимально (иначе: экстремаль, критическое, стационарное подмногообразие), то производная по ε нулевая.

Определение 18. $\frac{dJ}{d\eta} = lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\varepsilon}(J(x + \varepsilon\eta) - J(x)$.

Как найти эту производную, чтобы, приравняв к нулю, найти условия для $x^k = x^k(u^1, ..., u^m)$ быть стационарной поверхностью?

$\delta J = (J(x+\varepsilon\eta) - J(x)) = \int ... \int (\frac{\partial L}{\partial x^k}\eta^k\varepsilon + \frac{\partial L}{\partial q(k,j)}q^0(k, j)\varepsilon + o(\varepsilon))$ (где $o(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$). Вынесем ε за скобку и поделим на ε обе части равенства. Под интегралом слегка преобразуем, используя равенство $\frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial q(k,j)}\eta^k)}{\partial u^j} = \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial q(k,j)})}{\partial u^j}\eta^k + \frac{\partial L}{\partial q(k,j)}q^0(k, j)$.

Последний член заменим на разность первых двух. Интеграл $\int \dots \int\, \dots\, du^1 ... du^m$ от левого члена нулевой, ибо это первообразная по j-ой координате, а все η^k на границе области интегрирования обращаются в нуль.

После перехода к пределу под интегралом останутся выражения вида $\Phi_k\eta_k$, и интеграл для всех η равен нулю: $\frac{dJ}{d\eta}=0$. Отсюда $\Phi_k=0$ (ибо можно произвольно брать $\eta_k\neq 0$ лишь для одного k, например, и с малыми носителями). Это дает *уравнения Эйлера*:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}-\frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial q(k,j)})}{\partial u^j}=0.$$

Теорема 41. *Если поверхность $x^k=x^k(u^1,...,u^m)$ — стационарна, то она удовлетворяет уравнениям Эйлера (признак экстремальной поверхности).*

6.5 Случай кривых ($m=1, u^j=t$ и $q(k,j)=\dot x^k$)

Рассмотрим два функционала: 1) «действия»: $\int_0^1 g_{ij}\dot x^i\dot x^j dt=\int_0^1 \boldsymbol{v}^2 dt$, и 2) просто длину кривой $\int_0^1\sqrt{g_{ij}\dot x^i\dot x^j}dt$, $x(0)=A$, $x(1)=B$ – фиксированные точки на многообразии M^n.

Теорема 42. *В обоих случаях экстремаль — геодезическая (параметр t пропорционален натуральному s) (конечно, если она существует).*

Доказательство. 1). $\frac{\partial L}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i\dot x^j$, $\frac{\partial L}{\partial \dot x^k}=g_{kj}\dot x^j+g_{ik}\dot x^i=2g_{kj}\dot x^j$, $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot x^k})=2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j+2g_{kj}\ddot x^j$,

$2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j=\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^j}\dot x^i\dot x^j$. Выпишем уравнение Эйлера, сменив знак и поделив на 2: $0=g_{kj}\ddot x^j+\frac12(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\dot x^i\dot x^j+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i\dot x^j)$ или $0=\ddot x^\alpha+\Gamma^\alpha_{ij}\dot x^j\dot x^i$ – после умножения на $g^{k\alpha}$.

2). Теперь другой функционал $\int_0^1\sqrt{g_{ij}\dot x^i\dot x^j}dt=\int_0^1|\boldsymbol{v}|dt$.

Пишем уравнение Эйлера (сократив на $\frac12$): $\frac{d}{dt}(\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\frac{\partial}{\partial \dot x^k}(g_{ij}\dot x^i\dot x^j))-\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot x^i\dot x^j)=0$. Далее $\frac{d}{dt}=s'_t\frac{d}{ds}=|\boldsymbol{v}|\frac{d}{ds}$; $\dot x^i=(x^i)'_s|\boldsymbol{v}|$ и т.п.

$0=\frac{d}{ds}(\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}(g_{kj}\dot x^j+g_{ik}\dot x^i))|\boldsymbol{v}|-\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}(x^i)'(x^j)'|\boldsymbol{v}|^2)$

Во втором слагаемом $|\boldsymbol{v}|^2$ сокращается на $|\boldsymbol{v}|$. В первом после замены $\dot x^i$ на $(x^i)'|\boldsymbol{v}|$ сокращение внутри скобки. Оставшееся $|\boldsymbol{v}|$ в обоих слагаемых сократим! Остальные вычисления, очевидно, совпадают с вычислениями из примера 1). Остается $\frac{d}{ds}(\frac{\partial g_{ij}x'^i x'^j}{\partial x'^k}-\frac{\partial(g_{ij}x'^i x'^j)}{\partial x^k})=0$ (точно так же как в первом примере, с заменой $t\mapsto s$).

Теорема 43. *Экстремали длины — геодезические.*

6.6 Свойства геодезических линий.

Исследуем уравнения геодезических, *записанные через параметр t*. Помним, что $s=|\boldsymbol{v}|dt, |\boldsymbol{v}|=const$, поскольку вектор скорости $\boldsymbol{v}$ к геодезической параллельно переносится по ней.

Уравнения 2-го порядка, их всего n, перепишем в виде системы из $2n$ уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dx^m}{dt}=z^m,\ \ \frac{dz^k}{dt}=-\Gamma^k_{ij}z^iz^j \tag{2}$$

Функциями от t оказываются $x^1,\dots,x^n;z^1,\dots,z^n$, где $(z^1,\dots,z^n)$ – касательный вектор $\boldsymbol{v}$. Система является частным случаем системы уравнений в $2n$-мерном прстранстве:

$$\frac{dx^m}{dt}=F(x^1,\dots,x^n;z^1,\dots,z^n),\ \ \frac{dz^k}{dt}=\Gamma^k(x^1,\dots,x^n;z^1,\dots,z^n) \tag{3}$$

В правых частях в (3) (и в (2)) стоят известные функции от координат $x^1,\dots,x^n,z^1,\dots,z^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Любое решение $x^1(t),\dots,z^n(t)$ этой системы гладко зависит не только от t, но и от начальных условий $(x^1(0),\dots,x^n(0),z^1(0),\dots,z^n(0))$ и решение $x^i(t)$ можно записать как $x^i(t,x_0^1,\dots,x_0^n,z_0^1,\dots,z_0^n)$. В случае системы (2) решение — это выходящая из точки $(x_0^1,\dots,x_0^n)$ геодезическая с касательным вектором $(z_0^1,\dots,z_0^n)$ в этой точке. Пусть $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{g_{ij}z_0^iz_0^j}=s$ — длина этого вектора (в точке $(x_0^1,\dots,x_0^n)$).

Лемма 15. *Для малых s точка с координатами $x^i(1,x_0^1,\dots,x_0^n,z_0^1,\dots,z_0^n)$ — конец геодезической длины s, выходящей из точки $(x_0^1,\dots,x_0^n)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{v}$.*

Доказательство. Так как $|\boldsymbol{v}|$ длина векторов скорости вдоль всей геодезической и $s = |\boldsymbol{v}|t$, то $t = 1$. $\square$

Предположение о малости s объясняется тем, что геодезическая, вообще говоря, определена не для всех s. Например, если M^n — круг на плоскости, то геодезическая (прямая) ограничена границей круга.

Обозначим для краткости через y^i координату $x^i(1, x_0^1, \dots, x_0^n, z_0^1, \dots, z_0^n)$, то есть, $(y^1, \dots, y^n)$ – конец геодезической, выходящей из $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{v} = (z_0^1, \dots, z_0^n)$ и с длиной $|\boldsymbol{v}| = s$. Точка $(y^1, \dots, y^n)$ гладко зависит от $x_0^1, \dots, x_0^n, z_0^1, \dots, z_0^n$.

Теорема 44. *Для каждой точки $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ многообразия найдется такое $\varepsilon > 0$ и такая ее окрестность U, что через любую точку $(x^1, \dots, x^n) \in U$ в любом направлении проходит геодезическая с параметром s в пределах $-\varepsilon < s < \varepsilon$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим постоянное решение $y^i = x^i(t, x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0) = x^i$ (определенное для всех t, в частности для $t_0 = 1$).

По теореме о непрерывной зависимости решений системы (3) от t и от начальных данных решение существует при $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ (в частности, для $t = 1$) и для всех $(x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^n)$ в окрестности точки $(x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0)$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$, а в случае (2) — для всех точек $(x^1, ..., x^n)$ в окрестности U точки $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ и в окрестности V нулевого вектора пространства $\mathbb{R}^n$ (как касательного в точке $(x^1, \dots, x^n) \in U$).

Поскольку касательное расслоение VM^n многообразия M^n устроено (локально) как декартово произведение $U \times \mathbb{R}^n$, то векторы $(z^1, \dots, z^n)$ заполнят собой $U \times D^n$, где $D^n = V$ – некоторый шар. Пусть S^{n-1} — граница D^n. Переходя к меньшей, чем U, окрестности, можно считать ее компактной, компактно будет и произведение $U \times S^{n-1} \subset U \times \mathbb{R}^n$. Функция длины $|v| = \sqrt{g_{ij}(x^1, \dots, x^n) z^i z^j}$ непрерывна, а потому достигает отличного от нуля минимума ε. Для этого ε и существуют геодезические, фигурирующие в теореме. $\square$

Следствие 27. *Если M компактно или геодезически полно, то любая геодезическая продолжается в обе стороны бесконечно.*

(Риманово многообразие *геодезически полно*, если оно полно в метрике, определенной через геодезические: расстоянием между точкам называется нижний предел длин соединяющих их кусочно гладких дуг).

Примерами многообразий, где это не так, служат открытый круг, плоскость с выколотой точкой.

Доказательство. В компактном случае выберем для каждой точки $A \in M^n$ окрестность U_A и число ε_A в соответствии с теоремой. Из покрытия $\{U_A\}$ выберем конечное, тогда минимальное ε среди ε_A отвечающих этому покрытию годится для всех точек многообразия. Таким образом, продолженную геодезическую (до некоторой точки) можно продолжить по s еще на ε, и так бесконечно.

Во втором случае предположим, что геодезическую удается продолжить лишь для всех $s < s_0$. Пусть тогда $\{s_i\}$ — сходящаяся к s_0 последовательность чисел, A_i — соответствующие точки на геодезической. Они составляют фундаментальную последовательность в M^n. Поскольку M^n геодезически полно, имеется предел $\lim A_i = A_0$ (в этом и состоит свойство геодезической полноты). Применим теорему к A_0, получим ее окрестность и конечное $\varepsilon > 0$, для которых любая геодезическая в этой окрестности продолжается по s на ε. Применяя это к A_i с большим номером i и к интересующей нас геодезической, видим, что она должна иметь продолжение в точку A_0. $\square$

Теорема 45. $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial y^i}{\partial z^j} = \delta^i_j$ *в точке* $(x^1, \dots, x^n; 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. В самом деле, при $(z^1, \dots, z^n) = (0, \dots, 0)$ имеем $y^i = x^i$, откуда очевидно первое утверждение. Для вычисления $\frac{\partial y^i}{\partial z^j}$ следует положить $z^k = 0$ при $k \neq j$. В этом случае $\boldsymbol{v} = (0, ..., 0, z^j, 0, ..., 0)$, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{g_{jj}} z^j = s$; $dz^j = \frac{ds}{\sqrt{g_{jj}}}$, поэтому $\frac{d}{dz^j} = \sqrt{g_{jj}} \frac{d}{ds}$. Рассмотрим систему:

$$\frac{dx^m}{dt} = z^m, \quad \frac{dz^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij} z^i z^j.$$

Заменим параметр t на натуральный s. Первая система заменится на $\frac{dx}{ds} = (0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}, 0, \dots, 0)$. Отождествим y^m с x^m в точке, где берутся производные (учитывая, что $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$). Получим $\frac{dy^m}{ds} = 0$ при $m \neq j$ и $\frac{dy^j}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}$. Но $\sqrt{g_{jj}} \frac{dy^j}{ds} = \frac{dy}{dz^j}$. Следовательно, $\frac{\partial y^m}{\partial z^j} = 0$ и $\frac{\partial y^j}{\partial z^j} = 1$ и потому $\{\frac{\partial y^m}{\partial z^j}\} = E$ — единичная матрица. $\square$

Все дальнейшие результаты о геодезических — фактически следствия из этой теоремы.

Теорема 46. *У каждой точки $A_0 \in M^n$ существует окрестность, любые две точки в которой соединимы единственной геодезической (возможно, где-то и выходящей за пределы окрестности).*

Доказательство. На некоторой карте, содержащей $A_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ рассмотрим отображение $(x^1, \ldots, x^n; z^1, \ldots, z^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n)$, где $(y^1, \ldots, y^n)$ — конец геодезической длины $s = \sqrt{g_{ij}(x^1, \ldots, x^n) z^i z^j} = |\boldsymbol{v}|$, выходящей из точки $(x^1, \ldots, x^n)$ в направлении вектора $(z^1, ..., z^n)$. Как показано выше, в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n; 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ имеем $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial y^i}{\partial z^j} = \delta_j^i$. Очевидно также, что $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, $\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = 0$.

Пользуемся тем, что указанное отображение гладкое. Таким образом, его матрица Якоби в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n; 0, \ldots, 0)$ имеет следующий вид,

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

и невырождена. Следовательно, отображение взаимно однозначно (и обратимо) в окрестности начальных данных $(x_0^1, ..., x_0^n; 0, ..., 0)$. Теорема доказана. □

Рассмотрим предыдущее отображение в самой точке A_0, т.е. отображение $(x_0^1, \ldots, x_0^n; z^1, \ldots, z^n) \to (x_0^1, \ldots, x_0^n; y^1, \ldots, y^n)$. Вектору $\boldsymbol{v} = (z^1, \ldots, z^n)$ касательного пространства V_{A_0} ставится в соответствие конец выходящей из A_0 геодезической длины $s = \sqrt{g_{ij} z^i z^j}$ по направлению $\boldsymbol{v}$.

Обозначим это отображение $\mathcal{E}$.

Теорема 47. *При $s < \varepsilon$ для достаточно малого ε отображение $\mathcal{E}$ – диффеоморфизм ε-шара в V_{A_0} на некоторую окрестность точки A_0.*

Доказательство. В самом деле, $(y^1, \ldots, y^n)$ – гладкие функции от $z^1, \ldots, z^n$, причем $\{\frac{\partial y^i}{\partial z^j}\} = E$ при $z^1 = \ldots = z^n = 0$. Следовательно, имеется обратное (для малой окрестности точки A_0). □

Следствие 28. *ε-Шар в касательном пространстве $V_{A_0} = \mathbb{R}^n$ с отображением $\mathcal{E}$ является картой многообразия M^n вокруг точки A_0.*

На этой карте можно выбрать ортонормированный базис $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n \in \mathbb{R}^n = V_{A_0}$. Поскольку $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ – касаются M^n в точке A_0, то вокруг A_0 в координатах карты, индуцированных из $\mathbb{R}^n$, имеем $g_{ij}(A_0) = \delta_{ij}$ (матрица G римановой метрики единична в точке A_0). Проходящим через A_0 геодезическим отвечают на карте, т.е. в $\mathbb{R}^n = V_{A_0}$, прямые $\frac{d\bar{x}^i}{dt} = z^i = const$, $\frac{d^2\bar{x}^i}{dt^2} = 0$.

Таким образом, в силу основных уравнений геодезических в координатах $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ в точке A_0 имеем: $\bar{\Gamma}_{ij}^k z^i z^j = 0$ для всех $(z^1, \ldots, z^n)$ из ε-шара в $\mathbb{R}^n = V_{A_0}$. Для каждого k $\bar{\Gamma}_{ij}^k z^i z^j$ есть квадратичная форма с симметричной матрицей ($\bar{\Gamma}_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ji}^k$). Из равенства нулю квадратичной формы следует равенство нулю соответствующей симметричной билинейной. Применяя ее к парам базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j$, получим $\bar{\Gamma}_{ij}^k(A_0) = 0$ для всех индексов i, j, k.

Система координат вокруг точки A_0, для которой $\Gamma_{ij}^k = 0$ в точке A_0, называется *нормальной системой* (такие координаты называются также римановыми). Таким образом, получено

Следствие 29. *У каждой точки $A_0 \in M^n$ существует окрестность U с нормальными (римановыми) координатами. При этом можно считать, что $g_{ij}(A_0) = \delta_{ij}$ ($G(A_0)$ — единичная матрица).*

Выходящие из точки A_0 геодезические линии — образы лучей, выходящих из начала в касательном пространстве V_{A_0}. Они называются *геодезическими радиусами.* Диффеоморфный образ ε-шара в V_A называется г*еодезическим шаром* с центром в A_0, образы сфер в V_{A_0} — *геодезическими сферами* вокруг A_0.

Теорема 48. *Геодезические радиусы перпендикулярны геодезическим сферам.*

Доказательство. Рассмотрим римановы координаты вокруг A_0, их отождествляем (с помощью отображения $\mathcal{E}$) с координатами в касательном пространстве. На геодезической сфере радиуса ε пусть $\boldsymbol{w}$ — любой касательный к ней вектор, $(\bar{x}^1(\tau), \ldots, \bar{x}^n(\tau))$ — любая кривая на сфере, касающаяся этого вектора при $\tau = \tau_0$. Рассмотрим двумерную поверхность $(t\bar{x}^1(\tau), \ldots, t\bar{x}^n(\tau))$, $0 \le t \le 1 + \delta$. (Поверхность имеет уравнения: $\tilde{x}^1 = t\bar{x}^1(\tau), \ldots, \tilde{x}^n = t\bar{x}^n(\tau)$). Она гладкая во всех точках, кроме $t = 0$. Поскольку $\sqrt{g_{ij}\dot{\tilde{x}}^i(t)\dot{\tilde{x}}^j(t)} = \varepsilon = const$, касательные к этой поверхности векторы скорости $\boldsymbol{v}_1$ по t имеют постоянную длину. Как векторы скорости геодезических радиусов, они параллельны по t в M^n: $\frac{D\boldsymbol{v}_1}{dt} = 0$. Пусть $\boldsymbol{v}_2$ — векторы скорости по τ, $\boldsymbol{v}_2 = (\frac{d\tilde{x}^1}{d\tau}, \ldots, \frac{d\tilde{x}^n}{d\tau}) = t(\frac{d\bar{x}^1}{d\tau}, \ldots, \frac{d\bar{x}^n}{d\tau}) = t\bar{\boldsymbol{v}}_2$.

Лемма 16. $\frac{D\boldsymbol{v}_1}{d\tau} = \frac{D\boldsymbol{v}_2}{dt}$.

Доказательство. В самом деле, $(\frac{D\boldsymbol{v}_1}{d\tau})^k = \frac{d}{d\tau}(\frac{d\tilde{x}^k}{dt}) + \Gamma^k_{ij}\frac{d\tilde{x}^i}{dt}\frac{d\tilde{x}^j}{d\tau} = (\frac{D\boldsymbol{v}_2}{dt})^k$ в силу независимости $\frac{d^2}{d\tau dt}$ от порядка дифференцирования и симметрии Γ^k_{ij} по i, j.

Далее имеем $\frac{d(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{dt} = (\frac{D\boldsymbol{v}_1}{dt}, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \frac{D\boldsymbol{v}_2}{dt}) = 0 + (\boldsymbol{v}_1, \frac{D\boldsymbol{v}_1}{d\tau}) = \frac{1}{2}\frac{d(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)}{d\tau} = 0$, ибо $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) = |\boldsymbol{v}_1|^2 = const$. Следовательно, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = const$. Но при $t \to 0$ имеем $\boldsymbol{v}_2 \to 0$. Следовательно, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$. Поскольку $\boldsymbol{w}$ — один из $\boldsymbol{v}_2$, теорема доказана. □

6.7 Геодезические линии кратчайшие

Теорема 49. *Геодезические линии локально являются кратчайшими.*

Доказательство. Достаточно показать, что радиус — кратчайшая линия, соединяющая A_0 с точкой геодезической сферы. Пусть $(\bar{x}^1(t), \ldots, \bar{x}^n(t)) = A(t)$ — любая кривая, для которой $A(0) = A_0$. Поскольку она правильно параметризована, считаем, что $A(t) \neq A_0$ при $t > 0$. Пусть $\sigma(t) = \sqrt{g_{ij}\bar{x}^i(t)\bar{x}^j(t)}$ – длина геодезического радиус-вектора $A(t) = \sigma(t)\boldsymbol{v}_1$, где координаты $\boldsymbol{v}_1$ равны $\frac{\bar{x}^i(t)}{\sigma(t)}$ и $|\boldsymbol{v}_1| = 1$. Кривая записывается в виде $A(t) = \sigma(t)\boldsymbol{v}_1$.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости кривой $A(t)$, $\boldsymbol{v} = \frac{dA(t)}{dt} = \dot{\sigma}(t)\boldsymbol{v}_1 + \sigma(t)\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2 = \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}$. Вектор $\sigma(t)\boldsymbol{v}_2$ при малых t касается геодезических сфер, поэтому $\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1$ (в евклидовом пространстве V_{A_0} вектор $\boldsymbol{v}_2$ — производная от единичного вектора $\boldsymbol{v}_1$, поэтому там $\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ касается сфер). Таким образом, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{\sigma}(t)^2 + \sigma(t)^2|\boldsymbol{v}_2|^2}$, $ds = |\boldsymbol{v}|\,dt = \sqrt{\dot{\sigma}^2 + \sigma(t)^2|\boldsymbol{v}_2|^2}\,dt$.

Если $\boldsymbol{v}_2 = 0$, то $\boldsymbol{v}_1 = const$ (и кривая $A(t) = \sigma(t)\boldsymbol{v}_1$ — луч в V_{A_0} или геодезический радиус в точке A_0, $ds = \dot{\sigma}dt$, получим длину геодезического радиуса. Если $\boldsymbol{v}_2(t) \neq 0$ для некоторого t, то и в окрестности этого t. Тогда $|\boldsymbol{v}| > |\dot{\sigma}|$, и при вычислении длины дуги получится большее значение, чем величина s по геодезическому радиусу. □

7 Глава 7. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ.

7.1 Тензор кривизны.

Введем обозначение $\partial_{\boldsymbol{v}} f = \frac{df}{d\boldsymbol{v}}$ для производной от функции f по векторным полям $\boldsymbol{v}$. Нам известно соотношение $\partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}} - \partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{u}} = \partial_{[\boldsymbol{vu}]}$ (так определялся коммутатор $[\boldsymbol{vu}]$ векторных полей). Что, если $\partial_{\boldsymbol{v}}$ и $\partial_{\boldsymbol{u}}$ заменить на $\nabla_{\boldsymbol{v}}$ и $\nabla_{\boldsymbol{u}}$ — производные уже не от функций, а от векторных полей?

Теорема 50. *В* $\mathbb{R}^n$ *всегда* $\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = \nabla_{[\boldsymbol{vu}]}\boldsymbol{w}$

Доказательство. Для доказательства достаточно использовать аффинные коорординаты, в них по каждой координате $\boldsymbol{v}$ операции $\nabla_{\boldsymbol{v}}$ превращаются в $\partial_{\boldsymbol{v}}$. □

Пусть M^n — риманово многообразие. Что представляет собой выражение: $R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \nabla_{[\boldsymbol{vu}]}\boldsymbol{w}$? Разумеется, это гладкое векторное поле.

Теорема 51. *Выражение* $R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$*линейно по каждому аргументу. Более того, для любой гладкой функции* f*:* $R(f\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = R(\boldsymbol{u},f\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(f\boldsymbol{w}) = fR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$.

Доказательство. Очевидно, что $R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2) = R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}_1 + R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}_2$. Поскольку $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ входят в выражение одинаково, утверждения достаточно проверять для $\boldsymbol{v}$. Имеем $R(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = \nabla_{\boldsymbol{v}_1}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{v}_2}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{w} - \nabla_{[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{u}]}\boldsymbol{w} - \nabla_{[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{u}]}\boldsymbol{w} = R(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} + R(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}$. Здесь мы пользуемся линейностью операций $\nabla_{\boldsymbol{v}}$ и $\nabla_{\boldsymbol{u}}$, $[\boldsymbol{vu}]$ и т.п. (по любым аргументам).

Вычислим $R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})(f\boldsymbol{w})$

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}(f\boldsymbol{w}) = \nabla_{\boldsymbol{v}}((\partial_{\boldsymbol{u}}f)\boldsymbol{w} + f\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}) = \underline{(\partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{u}}f)\boldsymbol{w}} + \underbrace{\partial_{\boldsymbol{u}}f\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}} + \overline{\partial_{\boldsymbol{v}}f\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}} + f\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}(f\boldsymbol{w}) = \underline{(\partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}}f)\boldsymbol{w}} + \overline{\partial_{\boldsymbol{v}}f\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}} + \underbrace{\partial_{\boldsymbol{u}}f\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}} + f\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$$

$$\nabla_{[\boldsymbol{vu}]}(f\boldsymbol{w}) = \underline{\partial_{[\boldsymbol{vu}]}f\boldsymbol{w}} + f\nabla_{[\boldsymbol{vu}]}\boldsymbol{w}$$

Вычтем из первого два других равенства, одинаково отмеченные члены взаимно уничтожатся. Вычислим $R(f\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{f\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = f\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w},\ \ \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{f\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} =& \nabla_{\boldsymbol{u}}(f\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}) = (\partial_{\boldsymbol{u}}f)\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} + f\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}, \\ \nabla_{[f\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]}\boldsymbol{w} =& (\partial_{\boldsymbol{u}}f)\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - f\nabla_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]}\boldsymbol{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

ибо $[f\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}] = f[\boldsymbol{vu}] - (\partial_{\boldsymbol{u}}f)\boldsymbol{v}$. Вычитая из 1-го два других, получаем нужный результат. □

В частности,

Следствие 30. *При фиксированных* $\boldsymbol{v}$*,* $\boldsymbol{u}$ *соответствие* $\boldsymbol{w} \to R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})w$ *— поле операторов в касательных пространствах, т.е. тензорное поле типа* $(1,1)$.

Пусть ξ — любое ковекторное поле, $\boldsymbol{h}$ — векторное поле.

Следствие 31. *Выражение* $< \xi, R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} >$ *— тензор (тензорное поле) типа* $(3,1)$. *Выражение* $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w},\boldsymbol{h})$ *— тензор типа* $(4,0)$.

Доказательство. В самом деле, $< f\xi,\boldsymbol{a} >= f < \xi,\boldsymbol{a} >=< \xi, f\boldsymbol{a} >=< \xi, f\boldsymbol{a} >$ (ибо $< \xi,\boldsymbol{a} >= \xi_i X^i$), $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = g_{ij}X^iY^j$, поэтому $(f\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, f\boldsymbol{b})$. □

Здесь мы пользуемся одной из характеристик тензорного поля: $T = T(\boldsymbol{a},...;\xi,...)$ — это полилинейный функционал, гладкие функции как множители аргументов выносятся из тензора.

Оба тензора называются *тензорами кривизны* (Римана) многообразия M^n. Поскольку касательные пространства евклидовы (или псевдоевклидовы), в каждой точке $A \in M$ имеется естественный изоморфизм $\tau : V_A \to V_A^*$ векторного пространства сопряженному, при котором для пар $\tau h = \xi$ или $h = \tau^{-1}(\xi)$ имеет место тождество $< \xi,\boldsymbol{a} >= (\boldsymbol{a},h)$. $((\tau\boldsymbol{h})^i = g_{ij}h^i = \xi_j$; $\xi_j\boldsymbol{a}^j = g_{ij}h^ia^j = (\boldsymbol{h},\boldsymbol{a})$.)

Таким образом, для указанных ξ и h имеем $< \xi, R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} >= (R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w},h)$. Это означает, что оба тензора получаются друг из друга посредством операций опускания и поднятия индекса.

Отметим, что тензор $< \xi, R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} >$ не использует скалярное произведение, так что может быть определен для любого M^n с аффинной связностъю ∇.

7.2 О координатах тензора кривизны.

Имеем $R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k =$ (поскольку $[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = 0$) $= \nabla_{\boldsymbol{e}_i}(\Gamma^\beta_{jk}\boldsymbol{e}_\beta) - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}(\Gamma^\beta_{ik}\boldsymbol{e}_\beta) = (\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^\beta_{jk})\boldsymbol{e}_\beta + \Gamma^\alpha_{jk}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_\alpha - (\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^\beta_{ik})\boldsymbol{e}_\beta - \Gamma^\alpha_{ik}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^\beta_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^\beta_{ik} + \Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{j\alpha})\boldsymbol{e}_\beta$.

Выражение в скобках — это $< \varepsilon^\beta, R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k > = R^\beta_{ij,k}$ — координата тензора.

Для тензора $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h})$ имеем $R_{ij,kl} = (R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = R^\beta_{ij,k}(\boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_l) = R^\beta_{ij,k}g_{\beta l}$. Эти координаты — результат опускания верхнего индекса тензора $< \xi, R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w} >$ типа $(3, 1)$ на последнее место.

Отметим: по метрическому тензору $G = \{g_{ij}\}$ находятся символы Кристоффеля, а по ним затем — координаты тензора кривизны.

7.3 Свойства тензора кривизны и его координат.

Итак, $R_{ij,kl} = (R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)$.

Теорема 52. *1.* $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) = -(R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h})$, $R_{ij,kl} = -R_{ji,kl}$.

2. $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) = -(R\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w})$, $R_{ij,kl} = -R_{ij,lk}$.

3. $R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w} + R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} + R(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = 0$, $R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0$ *(тождества Риччи).*

4. $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) = (R(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$, $R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$.

Таким образом, координаты далеко не независимы, существенных намного меньше, чем n^4. При $n = 2$ имеется только одна существенная координата — это $R_{12,12}$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Остальные утверждения достаточно доказать для координат: если $\boldsymbol{v} = X^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{u} = Y^j\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{w} = Z^k\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{h} = H^l\boldsymbol{e}_l$, то, расписывая тензор как полилинейную форму $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) = R_{ij,kl}X^iY^jZ^kH^l$ и используя соотношения для координат, получим нужные соотношения вообще.

Поскольку координатные поля — частный случай голономных векторных полей, достаточно доказывать утверждения для полей $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}$ с нулевыми коммутаторами.

Косая коммутативность по $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{h}$ эквивалентна обращению в нуль $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$. Но имеем: $(R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = (\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) - (\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(\partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) - \partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})) = 0$, ибо $[\boldsymbol{vu}] = 0$ (в случае $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j$ тут сразу вторые частные производные). Этим доказано 2).

Для утверждения 3) просто выписываем все три члена: $R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$; $R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$; $R(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{w}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u}$ и при сложении пользуемся симметрией ∇, например, $\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{v}}(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{v}}(0) = 0$ (использовано, что $[\boldsymbol{vu}] = 0$). Для доказательства 4) складываем четыре тождества Риччи:

$\underline{R_{ij,kl}} + \underbrace{R_{jk,il}} + R_{ki,jl} = 0$

$\underbrace{R_{jk,li}} + \overline{R_{kl,ji}} + R_{lj,ki} = 0$

$\utilde{\overline{R_{kl,ij}}} + \widetilde{R_{li,kj}} + R_{ik,lj} = 0$

$R_{li,jk} + \underline{R_{ij,lk}} + R_{jl,ik} = 0.$

Уничтожаются одинаково отмеченные члены. Из правого столбца получим $2(R_{ki,jl} - R_{jl,ki}) = 0$. Теорема доказана. □

7.4 Тензор Риччи

Свертка тензора кривизны по двум не антисимметричным индексам (иначе был бы нуль!) дает новый тензор $R_{\rho\sigma}$, называемый *тензором Риччи*:

$$g^{\sigma\xi}R_{\mu\nu\,\rho\sigma} = R^{\xi}_{\mu\nu\,\rho} \quad \text{и} \quad s^\xi_\mu R^\xi_{\mu\nu\,\rho} = R^\mu_{\mu\nu\,\rho} = R_{\nu\rho} \ (s^\xi_\mu \text{ – оператор свертки}).$$

Этот тензор симметричен, что следует из симметрий тензора кривизны:

$$R_{\mu\nu\,\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\,\mu\nu} = R_{\sigma\rho\,\nu\mu} \quad \text{и} \quad R_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma}R_{\mu\nu\,\rho\sigma} = g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho\,\nu\mu} = R_{\rho\nu}.$$

7.5 Признаки локальной евклидовости.

Как было отмечено ранее, риманова метрика тогда и только тогда эквивалентна евклидовой (локально), если существуют координаты, в которых $\Gamma^k_{ij} = 0$. Однако невозможно применить этот признак — нельзя перебрать все координаты.

В самом начале, при определении тензора кривизны было замечено, что для евклидова пространства он равен нулю.

Теорема 53. *Эквивалентны утверждения:*

1. *Риманова метрика (локально) эквивалентна евклидовой;*
2. *Тензор кривизны обращается в нуль;*
3. *Параллельный перенос векторов (локально) не зависит от пути.*

Доказательство. Как только что замечено, из 1) следует 2). Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3).

Пусть A_0 и A_1 — две точки на карте (достаточно близкие). Рассмотрим два пути из A_0 в A_1 с общим параметром $t, 0 \le t \le 1$. Считаем, что на них натягивается гладкая поверхность $A(t,\tau)$, $A(0,\tau) = A_0$, $(1,\tau) = A_1$, первый путь пусть $A(t,0)$, второй — $A(t,1)$.

Пусть $\boldsymbol{w}_0$ — некоторый вектор из V_{A_0}. При каждом τ перенесем его в A по пути $A(t,\tau)$, в точке A_1 получим семейство векторов $\boldsymbol{w}(\tau) = \boldsymbol{w}(1,\tau)$, где $\boldsymbol{w}(t,\tau)$ — векторы вдоль пути $A(t,\tau)$. Имеем: $\boldsymbol{w}(t,\tau) = (X^1,\dots,X^n)$, $X^i = X^i(t,\tau)$, $\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\frac{dx^j}{dt} = 0$, Γ^k_{ij} и $\dot{x}^j$ — функции от t и τ.

В этой системе уравнений τ играет роль параметра, поэтому $\boldsymbol{w}(t,\tau)$ — гладкое векторное поле от t и τ. В частности, векторы $\boldsymbol{w}(1,\tau) = \boldsymbol{w}(\tau)$ в A_1 гладко зависят от τ.

Пусть $\boldsymbol{v}$ векторы касательные к поверхности по параметру t а $\boldsymbol{u}$ – по τ. На этой поверхности $0 = R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$. Здесь $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}] = 0$, поскольку координаты с поверхности t,τ продолжаются (локально) до координат в M^n (показано раньше). Поскольку $\boldsymbol{w}$ параллельны по t, $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = 0$, значит, $\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = 0$, поэтому по t параллельно векторное поле $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$. Имеем $(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w})^k = \frac{\partial X^k}{\partial\tau} + \Gamma^k_{ij}X^i\frac{\partial x^j}{\partial\tau}$. Рассмотрим это при $t \to 0$, в малой окрестности точки A_0. Поскольку там $\frac{\partial}{\partial\tau} \to 0$, то $(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w})^k \to 0$, следовательно, $|\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}| \to 0$. Но этот вектор параллелен по t, $|\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}| = const$, поэтому $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = 0$ всюду. Вывод: поле $\boldsymbol{w}(t,\tau)$ параллельно не только по t, но и по τ.

Рассмотрим ситуацию при $r \to 1$, в окрестности A_1, где пользуемся доказанным равенством $\frac{\partial X^k}{\partial\tau} = -\Gamma^k_{ij}X^i\frac{\partial x^j}{\partial\tau}$. Поскольку по той же причине $\frac{\partial x^j}{\partial\tau} \to 0$, то $\frac{\partial X^k}{\partial\tau} \to 0$ при $t \to 1$. Следовательно, $\frac{dX^k(1,\tau)}{d\tau} = 0$, $X^k(1,\tau) = const$.

Итак, результат переноса не зависит от пути (правда, при переносе по “простым” путям, без заузливаний и т.п., поскольку на пути натягивались пленки). Докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 1), пользуясь “простыми” путями. Пусть $\boldsymbol{w}^0_1,\dots,\boldsymbol{w}^0_n$ — базис в A_0. Разнесем параллельно его по всем точкам в окрестности A_0. В любой точке A возникают векторы $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n$, т.е. базисные векторные поля в окрестности. Эти поля можно считать гладкими по следующей причине. Сперва разнесем $w^0_1,\dots,w^0_n$ по линии x^1 в интервале $x^1_0 - \varepsilon \le x^1 \le x^1_0 + \varepsilon$, поля окажутся гладкими. Считая x^1 параметром, с этой линии разнесем по координатным x^2-линиям, на малую координатную поверхность координат x^1 и x^2 (используем гладкую зависимость решения).

Имеем $\nabla_{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{u}_j = 0$, ибо в точку A вектор $\boldsymbol{u}_j$ мы могли принести по линии, касающейся $\boldsymbol{u}_i$. Поскольку ∇ — симметричная связность, то $\nabla_{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{u}_j - \nabla_{\boldsymbol{u}_j}\boldsymbol{u}_i = [\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j] = 0$. Следовательно, поля $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n$ голономные, т.е. являются базисными для некоторой системы координат (карты). В этой системе координат $\Gamma^k_{ij} = (\nabla_{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{u}_j)^k = 0$. Следовательно, связность ∇ эквивалентная евклидовой. Теорема фактически доказана.

В самом деле, раз геометрия (локально) евклидова, то результат переноса векторов не зависит от пути не только “простого”, но и любого. □

7.6 Кривизна в двумерном направлении.

Пусть Π — двумерная плоскость в касательном пространстве V_A в точке $A \in M^n$. Условимся рассматривать касательные векторы $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u} \in \Pi$. Поскольку тензор кривизны кососимметричен по $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$, то всегда $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) = 0$, если $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}$, так что $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ будем считать базисными в Π. Изучим выражение $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$. Пусть $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{u}'$ — другая пара в Π, и C — матрица перехода от $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ к $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{u}'$, фактически составленная координатами $\boldsymbol{v}'$,$\boldsymbol{u}'$ в базисе $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$. Вспомним, что значение кососимметричного тензора на плоскости $\mathbb{R}^2$ (типа $(2,0)$) на каждом базисе — его координата в этом базисе, преобразующаяся по закону $T'_{12} = \det C\, T_{12}$ (такая формула преобразования была установлена для кососимметричных T типа $(n,0)$ в $\mathbb{R}^n$). Поэтому имеем $(R(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}')\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}') = \det C\,(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}') =$

$(\det C)^2\,(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$. В случае, если $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ ортонормированы, то $(\det C)^2 = \Gamma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}')$ — определитель Грама векторов, то есть $(R(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}')\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}') = \Gamma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}')(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$. Если $\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}'$ — тоже ортонормированы, то $\Gamma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}') = 1$. Таким образом, для всех ортонормированных базисов в Π число $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ — одно и то же. Оно обозначается $K_\Pi(A)$ и называется *кривизной многообразия M в точке $A \in M$ по двумерному направлению $\Pi \subset V_A$*.

Из сказанного выше заключаем, что $K_\Pi(A) = \frac{(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\Gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}$ для любой пары неколлинеарных векторов $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u} \in \Pi$ (ибо, если $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ — ортонормированны, то $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \Gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})(R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$).

Замечание 14. *Смена порядка векторов $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ во второй паре аргументов тензора кривизны Римана продиктована некоторыми соображениями, которые выяснятся позже, при сопоставлении с теорией поверхностей в $\mathbb{R}^3$.*

Если $K_\Pi(A)$ в каждой точке M^n не зависит от Π, то при $3 \le n$ эта кривизна оказывается локально постоянной, и, в случае связного M^n, следовательно, постоянной (независящей и от точки A) по всему M^n. Такие римановы многообразия называются *пространствами постоянной кривизны.* Сформулированный факт — сложная теорема. Мы докажем некоторый частный результат, а именно, что пространство постоянной нулевой кривизны локально евклидово.

Теорема 54. *Если $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = 0$ для любых векторных полей $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$, то тензор кривизны Римана равен нулю (и, следовательно, M^n локально евклидово).*

Доказательство. Имеем тождество Риччи: $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) + (R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{h}) + (R(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) = 0$. Если убедимся в косой симметрии тензора по 2-му и 3-му аргументам, то с помощью косой симметрии по первым двум аргументам тождество превратим в $3(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) = 0$, и теорема окажется доказанной.

Проверим косую симметрию. Для этого достаточно убедиться, что $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) = 0$. Исходя из $(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = 0$ имеем $0 = (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) = (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + ((R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + (R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 2(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = -2(R(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = 0$. Теорема доказана. $\square$

7.7 Кривизна $K_\Pi(A)$ как кривизна геодезической поверхности.

В случае $dim\,M = 2$ двумерное направление Π в точке $A \in M$ единственно — это касательная плоскость V_A, поэтому в этом случае $K_\Pi(A)$ — просто некоторая функция $K(A)$ точки $A \in M$, $K(A) = \frac{(R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\Gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}$ для любых линейно независимых векторных полей $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ на двумерном M. Эта функция называется *полной кривизной поверхности* M (будет показано, что в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$ она совпадает с гауссовой, то есть полной кривизной поверхности, чем и объясняется термин).

Рассмотрим, однако, M^n, $n \ge 3$, и точку $A \in M$. Пусть Π — двумерная плоскость в V_A. Ее образ в M^n при экспоненциальном диффеоморфизме ε-шара в V_A на окрестность точки A есть гладкая поверхность S, она состоит из всех выходящих из A геодезических по направлениям векторов $v \in \Pi$, поэтому S называется *геодезической поверхностью,* проходящей через точку A в двумерном направлении Π.

Теорема 55. $K_\Pi(A) = K(A)$ *для S: кривизна M в точке A в двумерном направлении* Π *равна полной кривизне поверхности S в точке A.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ — ортонормированный базис в плоскости Π, а $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ — его дополнение до ортонормированного базиса в V_A. Так как $\Gamma(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 1$, то $K_\Pi(A) = R_{12,12}$. Геодезическая поверхность определена условиями $x^3 = \ldots = x^n = 0$. Пусть $\bar{R}(v,u)w$ — тензор кривизны на S. По той же причине $K(A) = \bar{R}_{12,12}$, так что следует доказать равенство $R_{12,12} = \bar{R}_{12,12}$ в точке A.

Рассматриваемые координаты — нормальные (римановы), $\Gamma^k_{ij} = 0$ в точке A. Ковариантное дифференцирование $\bar{\nabla}$ в S получается ортогональным проектированием результата ∇ на S. Поскольку в точке A имеем $\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = 0$, то также $\bar{\nabla}_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = 0$ при $i,j \le 2$, то есть $\bar{\Gamma}^k_{ij} = 0$ (для индексов $1,2$).

Имеем $R_{12,21} = -R_{12,12} = (-\frac{\partial\Gamma^\beta_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma^\beta_{11}}{\partial x^2})g_{\beta 2}$ (аналогично для $\bar{R}_{12,21}$). Но в точке A имеем $g_{\beta 2} = \delta_{\beta 2}$, то есть $= 1$ при $\beta = 2$ (и нуль при $\beta = 1$), поэтому $R_{12,21} = -\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial x^2}$ (аналогично для $\bar{R}_{12,21}$). $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k})g^{k2}$. Здесь суммирование по k от 1 до n. Для $\bar{\Gamma}^2_{12}$ аналогичное выражение (причем с теми же g_{ij} при $i,j \le 2$, поскольку метрика на S — ограничение метрики M^n на поверхность $x^3 = \ldots = x^n = 0$, но суммирование в нем по k от 1 до 2. При вычислении производной $\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1}$ по правилу произведения производная от g^{k2} не представляет интереса, поскольку выражение в скобках равно нулю в точке A: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = (\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) + (\boldsymbol{e}_i,\nabla\boldsymbol{e}_j) = \Gamma^\alpha_{ik}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_j) +$

$\Gamma^{\alpha}_{kj}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_\alpha)$ ($\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$). Аналогично, для производной от $\bar{\Gamma}^2_{12}$. Таким образом, следует учитывать лишь производные от скобок. Но $g^{k2}(A) = \delta^{k2}$, поэтому остается лишь скобка при $k = 2$. Итак, $g^{22} = 1$, поэтому в точке A имеем: $\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}$. Тот же результат для $\frac{\partial \bar{\Gamma}^2_{12}}{\partial x^1}$.

Рассмотрим $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k})g^{k2}$. При вычислении $\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2}$ (аналогично к $\bar{\Gamma}^2_{11}$) учитываем те же нюансы, что и выше, получаем $\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2})$, и этому же равна производная $\frac{\partial}{\partial x^2}\bar{\Gamma}^2_{11}$. Теорема доказана. $\square$

7.8 Кривизна $K(A)$ для поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 56. *Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ функция $K(A)$ совпадает с гауссовой (то есть полной) кривизной поверхности в каждой точке A.*

Следствие 32. *Гауссова кривизна поверхности — внутренний инвариант (не меняется при изометричных наложениях — изгибаниях поверхностей).*

Это – знаменитая *theorema egregium* Гаусса.

Следствие 33. *Поверхность (локально) изометрична плоскости в точности, когда гауссова кривизна нулевая (в этом случае обращается в нуль тензор кривизны).*

Доказательство теоремы. Фиксируем точку $A_0 = 0$, и в качестве плоскости xOy возьмем касательную плоскость, причем оси Ox, Oy направим по главным направлениям (в которых 1-я и 2-я квадратичные формы примут диагональный вид), а ось Oz — перпендикулярно. Поверхность запишется как $z = f(x, y)$, $f(0, 0) = 0 = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0)$. В системе координат $x^1 = x, x^2 = y$ на поверхности $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, f'_x)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, f'_y)$, $g_{11} = 1 + (f'_x)^2$, $g_{22} = 1 + (f'_y)^2$, $g_{12} = f'_x f'_y$. Коэффициенты 2-й квадратичной формы имеют вид $l_{ij} = (\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i \partial x^j}, n)$, где $n = \frac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{|[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]|}$ — единичный вектор нормали к поверхности ($n = \boldsymbol{e}_3$ в точке O) (здесь $[e_1, e_2]$ — векторное произведение). В точке O имеем $l_{11} = f''_{xx}$, $l_{22} = f''_{yy}$, $l_{12} = 0 = f''_{xy}$ (поскольку оси Ox и Oy – главные направления). Таким образом, гауссова кривизна в точке 0 есть $l_{11}l_{22} = f''_{xx}f''_{yy}$.

В точке O матрица G метрического тензора единична, $G(O) = E$. Кроме того, производные по x и y от g_{ij} в точке O нулевые, поэтому $\Gamma^k_{ij}(O) = 0$ – выбранная система координат x, y в точке $O = (0, 0)$ является нормальной (римановой). Имеем $K(A_O) = K(O) = R_{12,21}$, ибо $\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$ в этой точке. Следовательно, $K(O) = -R_{12,12} = -\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial y}$ (см. предыдущую теорему). В соответствии с предыдущей теоремой $\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x)^2}$, причем $g_{22} = 1 + (f'_y)^2$. Итак, $\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(2f'_y f''_{xy}) = f''_{xy}f''_{xy} + f'_y f'''_{xxy} = 0$ в точке $O = (0, 0)$.

Также в соответствии с предыдущей теоремой $\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(f''_{xx}f'_y + f'_x f''_{xy} - \frac{1}{2}2f'_x f''_{xy}) = f'''_{xxy}f'_y + f''_{xx}f''_{yy} +$ нули $= f''_{xx}f''_{yy} = l_{11}l_{22}$ – гауссова кривизна. Мы воспользовались здесь видом g_{12}, g_{11} и тем, что $f'_x = f'_y = f''_{xy} = 0$ в точке О. Теорема доказана. $\square$

7.9 Вращение векторного поля вдоль пути в двумерном многообразии.

Пусть $A(t)$ — гладкая кривая в двумерном римановом многообразии (путь), и $\boldsymbol{a}(t)$ — ненулевое гладкое векторное поле на этой кривой. Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}(t)$ — векторное поле, полученное параллельным переносом вектора $\boldsymbol{a}(t_0)$ для $t > t_0$, $\Delta\varphi$ — угол от $\bar{\boldsymbol{a}}(t)$ до $\boldsymbol{a}(t)$, отсчитываемый в положительном направлении (считаем, что многообразие M^2 ориентировано, по крайней мере в области изучаемой кривой). Ясно, что $\Delta\varphi$ характеризует меру отклонения поля $\boldsymbol{a}(t)$ от параллельного, то есть определяет вращение $\boldsymbol{a}(t)$ (например, если $\boldsymbol{a}(t)$ — касательные к кривой, то $\Delta\varphi$ — отклонение от "геодезического" движения, равное нулю при движении по геодезической).

Очевидно, $\bar{\boldsymbol{a}}(t)$ зависит от выбора t_0, следовательно, и $\Delta\varphi$ тоже. Но при изменении t_0 угол между $\bar{\boldsymbol{a}}(t)$ и новым параллельным переносом $\bar{\boldsymbol{a}}'(t)$ постоянен, поэтому $\Delta\varphi$ изменится на константу. Нас же будет интересовать — $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ — скорость изменения φ (скорость вращения поля $\boldsymbol{a}(t)$), она не зависит от выбора t_0.

Угол Δ_φ от $\bar{\boldsymbol{a}}$ до $\boldsymbol{a}$ совпадает, очевидно, с углом от $\boldsymbol{a}(t_0)$ до $\overset{\Delta t}{\boldsymbol{a}}(t_0)$, где $\overset{\Delta t}{\boldsymbol{a}}(t_0)$ — вектор, полученный параллельным переносом $\boldsymbol{a}(t)$ по t в обратную сторону в точку $A(t_0)$, $\Delta t = t - t_0$ (такое обозначение уже использовалось ранее при изучении $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$). Без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{a}(t)$ — единичные векторы (любое ненулевое поле можно нормировать). Имеем $\frac{D\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{a}^{\Delta t} - \boldsymbol{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{a}^{\Delta t} - \boldsymbol{a}}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, откуда $|\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}| = \dot{\varphi}$ (ибо $|\boldsymbol{a}| = 1$). Кроме того, $\frac{D\boldsymbol{a}}{dt} \perp \boldsymbol{a}$, поэтому $\frac{D\boldsymbol{a}}{dt} = \dot{\varphi}\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}$ — единичный вектор, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$ и пара $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ имеет положительную ориентацию.

Такие векторы $\boldsymbol{b}$ можно построить во всех точках, возникнет ортогональное $\boldsymbol{a}(t)$ векторное поле $\boldsymbol{b}(t)$. Можно написать $|\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}| = (\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b})$ Получим $\Delta\varphi = \int_{t_0}^{t} (\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}) dt$.

7.10 Случай замкнутого пути.

В ситуации предыдущего пункта рассмотрим *замкнутый контур* L, параметризованный с периодом $c > 0$ ($\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}(t+c)$, $-\infty < t < \infty$). Мы предполагаем, что это гладкая замкнутая кривая, расположенная в координатной области (гомеоморфной $\mathbb{R}^n$), и без самопересечений, т.е. $A(t_1) \neq A(t_2)$, если $|t_1 - t_2| < c$. Хорошо извествно, что такой конту ограничивает в карте область, замыкание которой гомеоморфно (в нашем случае диффеоморфно) диску.

Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор в точке t_0, а $\bar{\boldsymbol{a}}$ — в той же точке $\boldsymbol{A}(t_0)$, но полученный после параллельного обнесения $\boldsymbol{a}$ по замкнутому пути (т.е. имеет параметр $t_0 + c$). Под $\Delta\varphi$ здесь естественнее считать уже не угол от $\bar{\boldsymbol{a}}$ до $\boldsymbol{a}$, а наоборот – от $\boldsymbol{a}$ до $\bar{\boldsymbol{a}}$. Угол φ теперь — это угол отклонения обнесенного вектора от исходного. Имеем: $\Delta\varphi = -\oint (\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}) dt$.

Заметим, что вектор $\boldsymbol{a}$, заданный в точке t_0, мы продолжаем до векторного поля (единичных) векторов на всем контуре, затем строим поле $\boldsymbol{b}(t)$ единичных векторов ортогональных полю $\boldsymbol{a}$. Результат интегрирования определен, конечно, с точностью до $2\pi k$ (ибо продолженное поле $\boldsymbol{a}(t)$ может вращаться). Если изменить продолжение $\boldsymbol{a}(t)$, то поскольку вектор $\boldsymbol{a}(t_0{+}c) = \boldsymbol{a}(t_0)$, результат может измениться только на $2\pi k$. Пусть $\bar{\Delta}\varphi$ — вращение поля $\boldsymbol{a}(t)$ после одного обхода, $\bar{\Delta}\varphi = \oint (\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b})\, dt$, а $\Delta\varphi$ — угол от вектора $\boldsymbol{a}(t_0)$ до параллельно обнесенного. Тогда, либо $\Delta\varphi = -\bar{\Delta}\varphi$, либо $\Delta\varphi + \bar{\Delta}\varphi = 2\pi k$ (в отличие от $\Delta\varphi$, малого при малых контурах, угол $\bar{\Delta}\varphi$, поскольку поле $\boldsymbol{a}$ может совершать обороты, не обязательно мал). Тем самым $\Delta\varphi = -\oint (\frac{Da}{dt}, \boldsymbol{b})\, dt + 2\pi k$. В случае, если $\boldsymbol{a}(t)$ — касательные к контуру L, $\Delta\varphi + \bar{\Delta}\varphi = 2\pi$.

Результат не зависит от выбора (единичного) вектора $\boldsymbol{a}$ в точке t_0, ибо $\Delta\varphi$ – это поворот всей касательной плоскости после ее обнесения по контуру, углы между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ остаются постоянными, так что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ после обнесения повернутся на один и тот же угол.

Еще несколько замечаний. а) $\Delta\varphi$ не зависит не только от выбора $\boldsymbol{a}$ в точке A_0, с параметром t_0, но и от выбора исходной точки A_0. Если $'_0$ отвечает $t'_0 > t_0$, пусть $\boldsymbol{a}'$ — перенос $\boldsymbol{a}$ в точку t'_0, и $\bar{\boldsymbol{a}}'$ — перенос $\boldsymbol{a}'$ туда же. Ясно, что $\Delta\varphi$ от $\boldsymbol{a}$ до $\bar{\boldsymbol{a}}$ совпадает с углом от $\boldsymbol{a}'$ до $\bar{\boldsymbol{a}}'$.

б) $\Delta\varphi$ меняет знак при обнесении в обратном направлении: в качестве исходного возьмем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$, тогда $\boldsymbol{a}$ — результат обратного обнесения $\bar{\boldsymbol{a}}$.

Условимся производить обнесение контура без самопересечений только в положительном направлении, которое определяется направлением вектора $\boldsymbol{e}'_2$ из положительного базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, в точке A_0, такого, что вектор $\boldsymbol{e}'_2$ касается кривой, а $\boldsymbol{e}'_1$ направлен вовне от ограниченной контуром области. В этом случае $\Delta\varphi$ не зависит от выбора ориентации многообразия M^2: при смене ориентации меняется положительное направление обхода, но изменяется и положительное направление отсчета $\Delta\varphi$.

7.11 Исследование формулы обнесения по контуру.

Считаем, что контур находится внутри карты с координатами x^1, x^2. В качестве векторного поля $\boldsymbol{a}$ возьмем любое поле единичных векторов на всей карте (например, нормированные векторы $\boldsymbol{A})1$), в качестве $\boldsymbol{b}$ — ортогональные к $\boldsymbol{a}$ единичные векторы, для которых ориентация $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ совпадает с ориентацией карты. Тогда $\Delta\varphi = -\oint ((\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^1}, \boldsymbol{b})\, dx^1 + (\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^2}, \boldsymbol{b})\, dx^2)$, и по формуле Грина

$$\Delta\varphi = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^1}, \boldsymbol{b} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^2}, \boldsymbol{b} \right) \right) dx^1 dx^2 =$$

$$= \iint_D \left(\left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^1}, \frac{D\boldsymbol{b}}{dx^2} \right) - \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^2}, \frac{D\boldsymbol{b}}{dx^1} \right) + \left(\frac{D}{dx^2} \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^1} \right), \boldsymbol{b} \right) - \left(\frac{D}{dx^1} \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^2} \right), \boldsymbol{b} \right) \right) dx^1 dx^2 =$$

$$= \iint_D \left(\left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^1}, \frac{D\boldsymbol{b}}{dx^2} \right) - \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dx^2}, \frac{D\boldsymbol{b}}{dx^1} \right) - (R\,(\boldsymbol{A})1, \boldsymbol{A})2)\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \right) dx^1 dx^2.$$

Область интегрирования D – область, ограниченная контуром. Для сокращения обозначений пусть $\Phi(a, b)$ – все выражение под интегралом. Заметим, что здесь интеграл берется от 2-формы, то есть без учета меры (площади), которая есть $d\sigma = \sqrt{\det G} dx^1 dx^2$, где G - матрица метрики. Тогда $\Delta\varphi = \int\int_D \frac{\Phi(a,b)}{\sqrt{|G|}} d\sigma$ – это уже интеграл от функции точек $A \in D$ (вспомним, что $\int \omega$ равен интегралу Римана от функции точек по мере в области интегрированияпорожденной формой объема, в нашем случае метрической).

Лемма 17. *Подинтегральная функция не зависит от выбора векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. В самом деле, если бы для некоторых полей $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ функция под интегралом изменилась бы в некоторой точке $A \in D$, то изменилось бы значение интеграла от нее в малой области D'

вокруг A. Но результат интегрирования есть угол $\Delta\varphi$ поворота обнесенного по контуру D' вектора, а он зависит только от контура.

Значит, для вычисления подинтегральной функции можно подбирать поля $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ удобным для расчетов способом.

Теорема 57. $\frac{\Phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\sqrt{|G|}} = K(A)$ *– полная кривизна многообразия M (гауссова кривизна в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$).*

Доказательство. Возьмем вокруг A координаты из касательной плоскости (геодезический круг) с векторами $\boldsymbol{A})1, \boldsymbol{A})2$ ортонормированными в точке A. В качестве $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ возьмем поля, получающиеся параллельным переносом $\boldsymbol{A})1, \boldsymbol{A})2$ сперва по координатной линии x^2 (при $x^1 = 0$), затем с этой линии в обе стороны по x^1 линиям (при $x^2 = const$, где $-\varepsilon < const < \varepsilon$). В этих условиях в точке A имеем $\sqrt{|G|} = 1$, и обращаются в нуль $\frac{Da}{dx^1}$ и $\frac{Db}{dx^1}$ в выражении для $\Phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Оставшееся слагаемое в $\Phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ есть $-R_{12,12} = K(A)$ в точке A. Теорема доказана. □

Следствие. *1.* $\Delta\varphi = \int\int_D K(A)d\sigma = \int\int_D \frac{R_{12,21}}{|G|}d\sigma = \int\int \frac{R_{12,21}}{\sqrt{|G|}}dx^1dx^2$

2. *Если α, β, γ – углы геодезического треугольника, то $\alpha+\beta+\gamma = \Delta\varphi + \pi$. В самом деле, если двигаться из вершины A по геодезической стороне AB, то в вершине B сделаем поворот влево на угол $\pi - \beta$ (отклонение от параллельного переноса). Далее сделаем в C поворот на угол $\pi - \gamma$, в вершине A – на угол $\pi - \alpha$. Если бы мы сохраняли параллельное направление вектора при обходе, то отклонение от первоначального в точке A было бы только $\Delta\varphi$. Таким образом, к $\Delta\varphi$ мы добавили 3 поворота влево, получили $\Delta\varphi + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma = 2\pi$, что и требовалось. (Ранее доказывалось соотношение $\Delta\varphi + \bar{\Delta}\varphi = 2\pi k = 2\pi$ (у нас $k = 1$), причем $\bar{\Delta}\varphi = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)$).*

3. *Если кривизна $K(A) = K$ – постоянная, то $\Delta\varphi = K\sigma$, где σ – площадь области, окруженной контуром. На сфере радиуса 1 $\Delta\varphi = \sigma$, сумма углов геодезического треугольника площади σ есть $\alpha+\beta+\gamma = \pi + \sigma > \pi$. При $K = 0$ – обычные соотношения евклидовой плоскости (планиметрии). Известно, что в некотором масштабе для плоскости Лобачевского $K = -1$, $\Delta\varphi = -\sigma$, $\alpha+\beta+\gamma = \pi - \sigma < \pi$.*

7.12 Обнесение вектора по контурам поверхностей, касающихся бивектора.

Пусть A_0 – точка многообразия M^n, $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{w}_0$ - касательные векторы в точке A_0. Можно считать, что $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0$ – значения векторных полей $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$, и $\boldsymbol{w}$, определенных в окрестности A_0. Поскольку $R(v,u)\boldsymbol{w} = R(\boldsymbol{A})i, \boldsymbol{A})j)\boldsymbol{A})k\, X^iY^jZ^k$, $\boldsymbol{A})1, \ldots, \boldsymbol{A})n$ базисные поля карты $(x^1, \ldots, x^n)$, а X^i, Y^j, Z^k - координаты $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, значение $R(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0$ определено независимо от продолжений векторов в точке A_0 до векторных полей в ее окрестности.

Пусть $\Pi \subset V_{A_0}$ – линейная оболочка $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0$. Будем рассматривать поверхности в M^n, касающиеся плоскости Π. Такие существуют (например, $x^i = x^i_0 + t^1Y^i + t^2X^i$, $i = 1, ..., n$).

Пусть S – одна из таких поверхностей, $x^i = x^i(t^1, t^2)$. Пусть $\boldsymbol{u} = (\frac{\partial x^1}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial t^1})$ – векторное поле по линиям t^1, $\boldsymbol{v}$ – аналогичное векторное поле по t^2. Поскольку координаты t^1, t^2 с поверхности продолжаются (локально) до координат в M^n, то $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}] = 0$. Считаем, что точке A_0, отвечают координаты $t^1 = t^2 = 0$ на S.

Пусть $\boldsymbol{w}_1$ – результат переноса $\boldsymbol{w}_0$ по линии t^1 (при $t^2 = 0$) в точку $(\Delta t^1, 0)$ на S, $\boldsymbol{w}_2$ – результат переноса $\boldsymbol{w}_1$, по линии t^2 (при $t^2 = \Delta t^2$) в точку $(\Delta t^1, \Delta t^2)$ на S, $\boldsymbol{w}_3$ – результат переноса $\boldsymbol{w}_2$ по линии t^1 (при $t^2 = \Delta t^2$) в точку $(0, \Delta t^2)$ и $\boldsymbol{w}_4$ -результат переноса $\boldsymbol{w}_3$ по линии t^2 (при $t^1 = 0$) в точку A_0.

Теорема 58. $R(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0 = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{w}_4 - \boldsymbol{w}_0}{\Delta t^1 \Delta t^2}$ *(независимо от выбора S).*

Доказательство. Определим на S векторное поле $\boldsymbol{w}$ следующим образом. Сперва разнесем $\boldsymbol{w}_0$ по линии t^1 (при $t^2 = 0$) на участок $-\varepsilon \le t^1 \le \varepsilon$, а полученное (гладкое по t^1) поле разнесем по линиям t^2 для значений $-\varepsilon \le t^2 \le \varepsilon$. Поле $\boldsymbol{w}$ гладко на S (гладкая зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий). Имеем $R(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0 = \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = \frac{D}{dt^2}\frac{D}{dt^1}\boldsymbol{w}$ (здесь учтено, что $[\boldsymbol{vu}] = 0$ и что $\boldsymbol{w}$ параллельно по t^2 -линиям, касающихся векторов $\boldsymbol{v}$).

Для вычисления $\frac{D}{dt^2}(\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1})$ (а к этому сведено доказательство теоремы) нужно $(\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1})(0, \Delta t^2)$ перенести из $(0, \Delta t^2)$ в $(0, 0)$, вычесть $\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1}(0, 0)$, поделить на Δt^2 и найти предел при $\Delta t^2 \to 0$. Но $\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1} = 0$

в точках $(t^1,0)$ (ибо w – перенос $\boldsymbol{w}_0$ на этой линии). Пусть $\frac{\overset{\Delta t^2}{D}\boldsymbol{w}}{dt^1}$ – параллельный перенос в точку $A_0(0,0)$ вектора $\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1}$ из точки $(0,\Delta t^2)$, тогда $\frac{D}{dt^2}(\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1}) = \lim_{\Delta t^2\to 0}\frac{1}{\Delta t^2}\frac{\overset{\Delta t^2}{D}\boldsymbol{w}}{dt^1}$. Изучим $\frac{\overset{\Delta t^2}{D}\boldsymbol{w}}{dt^1}$.

Прежде всего, $\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1} = \lim_{\Delta t^1\to 0}(\frac{\boldsymbol{w}_3-\boldsymbol{w}(0,\Delta t^2)}{\Delta t^1})$, или $\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1} = \frac{\boldsymbol{w}_3-\boldsymbol{w}(0,\Delta t^2)}{\Delta t^1} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t^1,\Delta t^2)$ (где $\boldsymbol{w}_3 = (\Delta t^1,\boldsymbol{w}_2)^t$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\Delta t^1,\Delta t^2)$), причем векторное поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ стремится к нулю при $\Delta t^1\to 0$. При этом $\boldsymbol{\varepsilon}(t^1,0) = 0$, поскольку на линии $(t^1,0)$ $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}(0,0) = \boldsymbol{w}_0$ и $(\Delta t^1,\boldsymbol{w}_1)^t = \boldsymbol{w}_0$. В силу гладкости поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеем $\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t^2\boldsymbol{\varepsilon}_1$, и $\boldsymbol{\varepsilon}_1\to 0$ при $\Delta t^1\to 0$. Имеем из предыдущего равенства $\boldsymbol{w}_3 - \boldsymbol{w}(0,\Delta t^2) = \frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1}\Delta t^1 - \boldsymbol{\varepsilon}_1\Delta t^1\Delta t^2$. Нам следует перенести это равенство из точки $(0,\Delta t^2)$ в точку $A_0 = (0,0)$, при этом $\boldsymbol{w}_3\to\boldsymbol{w}_4$, $\boldsymbol{w}(0,\Delta t^2)\to\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}_4-\boldsymbol{w}_0 = (\Delta t^2,\frac{D\boldsymbol{w}}{dt^1})^t\Delta t^1 - (\Delta t^2,\boldsymbol{\varepsilon}_1)\Delta t^1\Delta t^2$. Далее $(\Delta t^2,\boldsymbol{\varepsilon})^t\to 0$ при $\Delta t^1\to 0$ (непрерывная зависимость результата переноса от начальных условий). Остается поделить это равенство на $\Delta t^1\Delta t^2$ и взять предел при $\Delta t^1\to 0, \Delta t^2\to 0$. Теорема доказана. □

Итак, результат не зависит от выбора поверхности S, касающейся Π . Найдем переформулировку, в которой будет несущественным и выбор $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0$ в этой плоскости.

Для этого заметим, что $\Gamma(\Delta t^1\boldsymbol{u}_0,\Delta t^2\boldsymbol{v}_0) = (\Delta t^1)^2(\Delta t^2)^2\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)$, а площадь криволинейного параллелограмма $\Delta\sigma$ на этих векторах есть $\Delta\sigma = \sqrt{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)}\Delta t^1\Delta t^2 + \delta(\Delta t^1,\Delta t^2)$, где $\delta\to 0$ при $\Delta t^1,\Delta t^2\to 0$. Имеем $\frac{\boldsymbol{w}_4-\boldsymbol{w}_0}{\Delta t^1\Delta t^2} = \frac{\boldsymbol{w}_4-\boldsymbol{w}_0}{\Delta\sigma}(\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)}+\frac{\delta}{\Delta t^1\Delta t^2})$ и $R(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0 = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\boldsymbol{w}_4-\boldsymbol{w}_0}{\Delta\sigma}\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)}$.

Теорема 59. *Соотношение* $\frac{R(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0}{\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)}} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\boldsymbol{w}_4-\boldsymbol{w}_0}{\Delta\sigma}$ *одно и то же для всех линейно независимых пар* $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0\in\Pi$, *но только меняет знак при изменении ориентации базисных векторов* $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0$.

Доказательство. В самом деле, если C – матрица перехода в Π от $\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0$ к $\boldsymbol{v}_0',\boldsymbol{u}_0'$, то $R(\boldsymbol{v}_0',\boldsymbol{u}_0')\boldsymbol{w}_0 = \det C\, R(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_0$, и $\Gamma(\boldsymbol{v}_0',\boldsymbol{u}_0') = (\det C)^2\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)$.

Таким образом, предел в правой части не зависит ни от выбора касающейся Π поверхности в M^n, ни от базисов $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0$ в Π, но изменяется знак при изменении направления обнесения $\boldsymbol{w}_0$ по контурам. □

7.13 Обнесение и кривизна в двумерном направлении.

Рассмотрим частный случай, в котором $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0$. Пусть $\boldsymbol{u}_4$ – результат обнесения $\boldsymbol{u}_0$ (в ориентации $\boldsymbol{u}_0$,$\boldsymbol{v}_0$, то есть сперва по линии t^1 вектора $\boldsymbol{u}$, затем по t^2-линии в точку $(\Delta t^1,\Delta t^2)$ при $\Delta t^2 > 0$ (и $\Delta t^1 > 0$) и т.д.). Обнесенный вектор $\boldsymbol{u}_4$ уже не касается Π. Пусть $\bar{\boldsymbol{u}}_4$ – его ортогональная проекция на Π, $\Delta\psi$ – угол от $\boldsymbol{u}_0$ до $\bar{\boldsymbol{u}}_4$ (измеряемый в ориентации от $\boldsymbol{u}_0$ до $\boldsymbol{v}_0$).

Теорема 60. $K_\Pi(A_0) = \frac{(R(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)}{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta\sigma}$. *Таким образом,* $\Delta\psi = K_\Pi(A_0)\Delta\sigma + \varepsilon(\Delta\sigma)$, *где* $\varepsilon\to 0$ *при* $\Delta\sigma\to 0$.

Доказательство. Результат предыдущей теоремы не зависит от выбора $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0$, но зависит, конечно, от $\boldsymbol{w}_0$. Таким образом, мы не имеем права изменять $\boldsymbol{u}_0$, но можем изменять $\boldsymbol{v}_0$. Возьмем в качестве $\boldsymbol{v}_0$ единичный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{u}_0$ (и той же ориентации к $\boldsymbol{u}_0$, что и прежний). Заметим, что в этом случае $\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)} = |\boldsymbol{u}_0|$. Имеем $K_\Pi A = (\frac{R(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{u}_0}{\sqrt{\Gamma}},\frac{\boldsymbol{v}_0}{\sqrt{\Gamma}}) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}(\frac{\boldsymbol{u}_4-u_0}{\Delta\sigma},\frac{\boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{u}_0|}) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{(\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{v}_0)}{|\boldsymbol{u}_4|\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{(\bar{\boldsymbol{u}}_4,\boldsymbol{v}_0)}{|\boldsymbol{u}_0|\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{|\bar{\boldsymbol{u}}_4|\cos\varphi}{|\boldsymbol{u}_0|\Delta\sigma}$. Но $\lim|\bar{\boldsymbol{u}}_4| = |\boldsymbol{u}_0|$. Угол же φ между векторами $\boldsymbol{v}_0$ и $\bar{\boldsymbol{u}}_4$ удовлетворяет соотношению $\cos\varphi = \sin\psi$ (если $\varphi < \frac{\pi}{2}$, например, то ψ от $\boldsymbol{u}_0$ направлен в ту же сторону, что и $\boldsymbol{v}_0$, и наоборот при $\varphi > \frac{\pi}{2}$). Итак, $K_\Pi A = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\psi}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\psi}{\psi}\frac{\psi}{\Delta\sigma}$, причем $\frac{\sin\psi}{\psi}\to 1$. Теорема доказана. □

Отметим, что результат не зависит от ориентации $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0$ – при ее смене изменится направление ψ, но меняется и направление отсчета углов.

8 ДОБАВЛЕНИЯ

8.1 Формула Гаусса – Бонне

Рассмотрим контур $\boldsymbol{r}(u^1(t), u^2(t))$, лежащий в пределах некоторой карты на поверхности, репер $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}$, полученный ортонормализацией координатного репера в этой области, и касательный орт $\tau(t)$ вдоль контура.

При обходе контура вектор $\boldsymbol{v}$ повернется относительно параллельного перенесения, согласно п. ?.11, на угол $\Delta\omega_1 = \iint_S K d\sigma$. Поворот $\tau(t)$ относительно паралельного перенесения, см.п. 7.9, равен $\Delta\omega_2 = -\oint_{\gamma=\partial\sigma} k_g$. Поворот касательного вектора τ относительно координатного орта $\boldsymbol{v}$ равен 2π.

(Мы можем продеформировать малый контур в пределах координатной области в окружность, для которой этот поворот равен 2π, но при регулярной деформации с непрерывно меняющимся ненулевым вектором скорости число оборотов (целое число) не меняется.)

Первый угол равен сумме второго и третьего. В итоге мы получаем важную формулу

$$\iint_S K d\sigma + \oint_{\gamma=\partial\sigma} k_g \, ds = 2\pi.$$

Она называется формулой Гаусса – Бонне.

8.2 2. Геодезические на сфере

Мы отмечалив введении, что экватор сферы "очевидно" нужно считать аналогом прямой на сфере, т.е. геодезической. Мы теперь можем это установить, не решая уравнения.

Задача. Написать и решить уравнение геодезической для единичной сферы.

Для любого большого круга на сфере вектор кривизны направлен к центру и его направление совпадает с направлением нормали к сфере. Значит, геодезическая кривизна равна нулю и большой круг является геодезической. Других геодезических нет, т.к. через каждую точку в каждом направлении можно провести большой круг.

С другой стороны мы можем рассуждать иначе.

Геодезические переходят в геодезические при изометриях, т.к. они принадлежат внутренней геометрии поверхности. В частности, это так при симметриях поверхности. Но каждый большой круг определяет отражение сферы в плоскости этого круга. Если бы в направлении круга проходила через данную точку геодезическая отличная от круга, то при этом отражении она перешла бы в отличную от нее геодезическую с тем же направлением, чего быть не может по теореме единственности.

8.3 3. Геодезические поверхностей вращения. Теорема Клеро

Предыдущее рассуждение показывает более общим образом, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими.

Контрольный вопрос. Когда окружность, ортогональная оси, будет геодезической?

Вообще, для геодезических кривых поверхности вращения справедлива

8.3.1 Теорема Клеро

Для точек геодезической на поверхности вращения произведение расстояния от точки до оси вращения на синус угла кривой с меридианом постоянно.

Доказательство. Рассмотрим, вообще, поверхность, метрика которой может быть приведена к виду $ds^2 = du^2 + g(u)dv^2$. В нашем случае поверхности вращения $g = \eta(u)$ есть квадрат расстояния ρ от точки кривой до оси вращения (см.п.11 Лекция 6). Заметим, что для кривых $v = const$ параметр u нормальный. Подсчитаем символы Кристоффеля по известной формуле. Мы получим, что ненулевыми являются только символы $\Gamma^1_{22} = -gg'$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2g}g'$, причем $g' = \frac{dg}{du}$.

Запишем уравнения геодезических:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = gg'\dot{v}^2 \\ \ddot{v} &= -\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} - \Gamma^2_{21}\dot{v}\dot{u} = -\tfrac{1}{g}g'\dot{u}\dot{v} = -\tfrac{1}{g}\dot{g}\dot{v}. \end{aligned}$$

Нам удобнее считать косинус, а не синус. Поэтому введем угол φ между направлением геодезической и параллелью. Координаты направляющего вектора параллели $(0, 1)$, а его длина $\sqrt{g}$, координаты направляющего вектора геодезической – $(\dot{u},\, \dot{v})$, длина равна 1, т.к. параметр геодезической нормальный. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{g\dot{v}}{\sqrt{g}} = \sqrt{g}\,\dot{v}$$

и

$$(\rho\cos\varphi)^{\cdot} = (\sqrt{g}\cos\varphi)^{\cdot} = (g\dot{v})^{\cdot} = \dot{g}\dot{v} + g\ddot{v},$$

что равно нулю, благодаря второму уравнению геодезических. □

Контрольный вопрос. Верно ли обратное?

Приведем еще одно доказательство теоремы Клеро, не опирающееся на подсчет кристоффелей. (Это доказательство взято из лекций И.А.Дынникова на сайте кафедры.)

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{q}(s)$ – натуральная параметризация геодезической на поверхности вращения. Разложим радиус-вектор $\boldsymbol{q}$ в сумму $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2$ векторов, первый из которых параллелен оси поверхности, а второй – перпендикулярен. Тогда расстояние $\rho(\boldsymbol{q}(s))$ от точки $\boldsymbol{q}(s)$ до оси равно $|\boldsymbol{q}_2|$, а касательная к параллели, проходящей через эту точку, имеет своим направляющим вектором векторное произведение $[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]$. Так как параметризация рассматриваемой геодезической натуральна, мы имеем $\langle \boldsymbol{q}'', \boldsymbol{q}' \rangle = 0$. Кроме того, так как кривая $\boldsymbol{q}(s)$ является геодезической, вектор ускорения $\boldsymbol{q}''$ (который в натуральной параметризации совпадает с вектором кривизны) ортогонален всей касательной плоскости в соответствующей точке, в частности, направляющему вектору параллели, т.е. $\langle \boldsymbol{q}'', [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2] \rangle = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \rho\cos\alpha)' = \quad & \left(\tfrac{\langle \boldsymbol{q}', [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]\rangle}{|[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]|}\right)' = \left(\tfrac{(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1|}\right)' = \left(\boldsymbol{q}', \tfrac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1}, \boldsymbol{q}_2\right)' = \\ & = \left(\boldsymbol{q}'', \tfrac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1}, \boldsymbol{q}_2\right) + \left(\boldsymbol{q}', \left(\tfrac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1}\right)', \boldsymbol{q}_2\right) + \left(\boldsymbol{q}_1', \tfrac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1}, \boldsymbol{q}_2'\right) + \left(\boldsymbol{q}_2', \tfrac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1}, \boldsymbol{q}_2'\right). \end{aligned}$$

Мы уже выяснили, что первое слагаемое в этой сумме равно нулю. Второе слагаемое равно нулю, поскольку вектор $\boldsymbol{q}_1/|\boldsymbol{q}_1|$ является единичным направляющим вектором оси поверхности, а значит, он постоянен. Третье слагаемое равно нулю, так как вектор $\boldsymbol{q}_1'$ коллинеарен $\boldsymbol{q}_1$, а последнее – поскольку дважды содержит $\boldsymbol{q}_2'$ в смешанном произведении. Таким образом, $(\rho\cos\alpha)' = 0$, т.е. $\rho\cos\alpha$ – постоянная величина.

8.4 4. Полугеодезические координаты

Мы теперь должны выяснить второе основное свойство геодезических — показать, что это *кратчайшие* кривые. Иными словами, эти кривые минимизируют функционал длины, т.е. служат точками минимума для функции длины на бесконечномерном пространстве кривых, соединяющих две данные точки. Естественный подход к доказательству этого факта лежит через вариационное исчисление — уравнение геодезической служит уравнением Эйлера - Лагранжа для функционала длины (это уравнение в функциональном анализе является аналогом условия равенства нулю производной в стационарных точках для обычных функций). Однако в рамках дифференциальной геометрии предпочитают обходиться своими средствами, не прибегая к бесконечномерному анализу. Так мы и поступим. Но для этого нам нужно ввести и рассмотреть специальный тип координат.

Как мы знаем, система координат, в которой средний коэффициент $g_{12} = F$ первой квадратичной формы обращается в нуль, имеет важное свойство: координатные линии ортогональны.

Мы встречались также с так называемыми конформными координатами, в которых, кроме этого условия, выполнено также условие $g_{11} = g_{22}$ $(E = G)$. В этом случае углы между кривыми на поверхности те же, что и у их прообраза в координатной плоскости.

Введем еще один интересный пример ортогональной системы координат, в которой $g_{11} = 1$.

Определение. *Полугеодезической* называется система координат, в которой метрика имеет вид

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u,\, v)\, dv^2.$$

Частным случаем является метрика, которая была введена для поверхностей вращения. В ней g_{22} не зависит от v.

Задача. Подсчитать символы Кристоффеля в полугеодезической системе.

[**Решение.** (Обозначим элемент $g_{22} = G$ здесь через b^2 (т.е. $b = |\boldsymbol{r}_v||$), чтобы не путать его с обычным обозначением самой матрицы первой формы.) Заметим, во-первых, что обратная матрица к матрице метрики будет $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}$. Из частных производных от g_{ij}, через которые выражаются кристоффели, остаются только $\frac{\partial b^2}{\partial x^i}$, где x^i есть u или v. В выражении для Γ^1_{ij} оба индекса могут быть только 2 и остается только $-\frac{\partial b^2}{\partial u}$. Таким образом, $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial b^2}{\partial u}$. В выражении для Γ^2_{ij} отпадает случай $i = j = 1$. Если оба индекса равны 2, то мы получаем $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial v} = \frac{\partial \ln b}{\partial v}$. Если индексы различны, то $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial u} = \frac{\partial \ln b}{\partial u}$.]

Задача. Показать, что гауссова кривизна поверхности в полугеодезической системе равна $K = -\frac{\partial^2 b}{\partial v^2}/b$.

Легко получается следующее свойство полугеодезической системы координат:

Утверждение 1. *В полугеодезической системе координат (u, v) длины дуг координатных линий $v = const$ между любой парой координатных линий $u = u_1$ и $u = u_2 > u_1$ все равны $u_2 - u_1$.*

Доказательство. Действительно, на координатной линии $v = \text{const}$ мы имеем $dv = 0$ и $ds = du$. Иными словами, u является натуральным параметром на каждой кривой $v = \text{const}$. □

Возьмем какую-либо кривую $u = \text{const} = u_0$ в качестве начальной и заменим переменные: $(u,\, v) \mapsto (u - u_0,\, v)$. Очевидно, мы не изменим при этом вид метрики и координатные линии, а точки на начальной линии будут иметь первую координату $u = 0$. В таком случае для любой точки $(u,\, v)$ в области нашей координатной системы первая координата будет выражать длину дуги координатной линии $v = \text{const}$ от этой точки до начальной кривой.

Второе свойство полугеодезических координат состоит в том, что дуги кривых $v = \text{const}$ имеют следующее свойство минимальности. Грубо говоря, длина дуги такой кривой меньше длины любой другой кривой, соединяющей ее концы. Однако, тут имеется небольшая тонкость, которую мы проясним позже, из-за которой нам приходится ввести дополнительное требование на малость такой дуги.

Утверждение 2. *Пусть имеется область U на поверхности, в которой введены полугеодезические координаты $(u,\, v)$. Пусть λ – отрезок кривой $v = const = v_0$, длина которого меньше расстояния от λ до границы U. (Имеется в виду расстояние в римановом многообразии, как оно было определено в п.5 главы 11А.)*

Тогда длина λ меньше длины любой другой дуги, соединяющей ее концы.

Доказательство. Пусть μ дуга, соединяющая концы p и q дуги λ. Если μ выходит за пределы U, то ее длина больше длины λ. Пусть она целиком лежит в U. Тогда ее длина, согласно нашему условию на вид метрики есть

$$\int_p^q \sqrt{1 + g_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du.$$

Ясно, что поскольку $g_{22} > 0$, это выражение не меньше, чем $\int_p^q du$, т.е. длина λ. При этом равенство возможно, если и только если $\frac{dv}{du} = 0$, т.е. $v = \text{const}$. □

Теперь мы объясним, почему система координат с таким свойством называется полугеодезической. Дело в том, что кривые $v = \text{const}$ на самом деле являются геодезическими:

Утверждение 3. *В полугеодезической системе координат с метрикой $ds^2 = du^2 + g_{22}\,dv^2$ координатные кривые $v = const$ являются геодезическими.*

Доказательство. Мы видели, что параметр u является натуральным на кривых $v = \text{const}$. Поэтому орт касательной к координатной кривой $v = \text{const}$ является также ее вектором скорости $\boldsymbol{\tau}(u)$ с координатами $(1, 0)$. Нам надо показать, что эти кривые удовлетворяют уравнению геодезической $\frac{d\boldsymbol{\tau}^i}{d\,u} + \boldsymbol{\tau}^k \Gamma^i_{kj} \boldsymbol{\tau}^j = 0$.

Выше (в решении задачи) мы подсчитали символы Кристоффеля в полугеодезической системе и убедились, что отличные от нуля символы имеют хотя бы один нижний индекс 2. Таким образом левая часть уравнения равна нулю: первое слагаемое – поскольку координаты $\boldsymbol{\tau}$ постоянны, а остальные слагаемые, т.к. ненулевые кристоффели умножаются на нулевую координату $\boldsymbol{\tau}$. □

Замечание. Пример большого круга на сфере показывает необходимость введения условия того типа, которое мы приняли в утверждении 2. Если для точки на этом круге взять маленькую окрестность, то в остальной части сферы можно ввести карту, в которой дуга круга не будет иметь минимальную длину среди кривых, которые соединяют ее концы и лежат в дополнении к выбранной малой окрестности.

Итак, полугеодезическая система координат определена однопараметрическим семейством геодезических, второе семейство координатных кривых определено как семейство ортогональных кривых к первому. Обратно, такая пара семейств кривых определяет полугеодезическую систему координат, если на геодезических в качестве координатного параметра выбрать натуральный параметр. На самом деле для второго семейства достаточно потребовать, чтобы только одна его кривая была ортогональна семейству геодезических. Тогда это будет верно и для остальных:

Утверждение 4. *Пусть в данной системе локальных координат (u, v) семейство кривых $v = const$ состоит из геодезических, причем натуральным параметром для них служит u. Пусть также координатная кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству. В таком случае это — полугеодезическая система координат.*

Доказательство. Ясно, что $g_{11} = 1$, поскольку параметр u натуральный и, значит, вектор скорости вдоль координатных кривых $v = \text{const}$ является ортом. Нужно показать, что $g_{12} = 0$, т.е., что все кривые $u = \text{const}$ ортогональны геодезическому семейству. Из условия, что кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству, следует, что в точках этой кривой $g_{12} = 0$.

Т.к. g_{11} постоянно, непосредственно видно, что $\Gamma^1_{11} = g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u}$.

По условию, линии $v = \text{const}$ геодезические, т.е. $\nabla_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} = 0$. По определению кристоффелей Γ^1_{11} есть первая координата этого вектора. Таким образом, $g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u} = 0$.

Но $g^{12} = \frac{g_{12}}{g}$, где g – детерминант матрицы первой формы. Значит, либо $g_{12} = 0$ (что и требуется), либо g_{12} постоянно. Однако в точках начальной кривой $g_{12} = 0$ и утверждение доказано. □

8.5 5. Построение полугеодезической системы координат

Мы показали, что координатные кривые полугеодезической системы образуют два семейства, одно из которых состоит из геодезических, причем их натуральный параметр является координатой, а другое состоит из кривых ортогональных кривым первого семейства. И обратно, если для данной системы координат одно семейство координатных кривых состоит из геодезических, натуральный параметр которых служит координатой, причем хотя бы одна кривая второго семейства ортогональна кривым первого, то тогда все кривые второго семейства будут ортогональны кривым первого, а система координат будет полугеодезической.

Отсюда видно, как построить полугеодезическую систему координат в окрестности данной точки $A \in M^2$. Нужно провести через эту точку дугу λ регулярной кривой, и взять на ней произвольный (регулярный) параметр v. Затем через каждую точку λ нужно провести геодезическую γ в направлении ортогональном λ. На каждой построенной геодезической γ_v, отвечающей какому-либо значению v, возьмем натуральный параметр u в качестве координаты, считая, что в точке пересечения γ_v с λ он равен нулю. Тогда пары (u, v) будут служить регулярными координатами в малой окрестности A (т.к. в точках λ кривые ортогональны), причем кривые $u = \text{const}$ будут ортогональны построенному семейству геодезических во всех своих точках и наша система координат будет полугеодезической, т.е. первая квадратичная форма будет иметь требуемый вид.

8.6 6. Геодезические как кратчайшие.

Теперь мы можем обосновать второе основое свойство геодезических. Любую геодезическую γ, проходящую через точку A, мы можем включить в координатное семейство полугеодезической системы координат. Нужно только в описанном только что построении начать с регулярной кривой, ортогональной γ в точке A. Отсюда и из утверждения 2 следует:

Утверждение 5. Для некоторой окрестности A дуга геодезической, соединяющая A с любой другой точкой B этой окрестности, имеет длину меньшую, чем длина любой другой дуги, соединяющей A и B. □

Мы однако еще не доказали, что точку A можно соединить с любой точкой из некоторой ее окрестности геодезической дугой. Для этого нам нужно рассмотреть еще одну конструкцию.

8.7 7. Экспоненциальное отображение.

Мы знаем, что в каждом направлении через данную точку может быть проведена ровно одна геодезическая, натуральный параметр которой имеет в данной точке значение нуль.

Придадим этому утверждению более формальный и более полный характер. Нам дана поверхность M^2 с римановой метрикой, имеющей в данной окрестности запись $(g_{ij})\ :\ ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2\,g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2$. Она задает скалярное произведение в касательной плоскости в каждой точке этой окрестности.

Утверждение 1. *Рассмотрим касательную плоскость $\tau_A M^2$ в точке A поверхности M^2. Для каждого орта $\boldsymbol{e}$ в $\tau_A M^2$ обозначим через $\gamma_{\boldsymbol{e}}$ геодезическую, проходящую через A так, что натуральный параметр точки A есть 0 и вектор скорости в натуральной параметризации в точке A есть $\boldsymbol{e}$.*

Отобразим прямую $t\boldsymbol{e} \in \tau_A$ на $\gamma_{\boldsymbol{e}}$, сопоставив точке $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{e}$ этой прямой точку $\boldsymbol{y} \in \gamma_{\boldsymbol{e}}$ с натуральным параметром t.

Мы получим диффеоморфное отображение некоторой окрестности V точки A в $\tau_A M^2$ на окрестность U этой точки в M^2, которое обозначается $\exp\colon V \to U \subset M^2$.

Это отображение называется *экспоненциальным* и обозначается exp.

Мы отождествили точку A поверхности с началом в ее касательной плоскости, что, конечно, не может привести к недоразумениям.

Доказательство. Заметим, что взяв на прямой $t\boldsymbol{e}$ какой-либо вектор $\boldsymbol{v}$ в качестве образующей, мы получим параметризацию $\bar{t}\boldsymbol{v}$ той же прямой с параметром $\bar{t}$ пропорциональным исходному: $\bar{t}\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{e}$, $\bar{t} = \pm\frac{t}{|\boldsymbol{v}|}$. Принимая $\bar{t}$ за параметр точки $\exp(t\boldsymbol{e})$, мы получим параметризацию геодезической с параметром пропорциональным натуральному и с вектором скорости $\boldsymbol{v}$.

Утверждение 1 непосредственно вытекает из следующего:

Утверждение $1'$**.** Дифференциал $\breve{g}$ в точке A есть тождественное отображение.

Это утверждение требует такого пояснения. Хотя в образе и прообразе мы рассматриваем разные многообразия, но сейчас у нас в прообразе линейное пространство $\tau_A M^2$, а для линейного пространства его касательное пространство в каждой точке и, в частности, в начале, естественным образом отождествляется с ним самим. (Можно написать $\boldsymbol{\tau}_A(M^2) = \boldsymbol{\tau}_A(\boldsymbol{\tau}_A(M^2))$.) Поэтому дифференциал в точке A нашего отображения действует из $\tau_A M^2$ в $\tau_A M^2$, т.е. в себя, и утверждение, что он есть тождественное отображение, имеет смысл.

Доказательство. Чтобы проверить это утверждение, удобно рассматривать векторы как векторы скорости кривых, и нам нужно показать для каждого вектора $\boldsymbol{v}$, что какая-либо кривая в $\tau_A M^2$ с вектором скорости $\boldsymbol{v}$ переходит в кривую в M^2 также с вектором скорости $\boldsymbol{v}$. Но в качестве кривой в $\tau_A M^2$ мы можем взять прямую $t\boldsymbol{v}$, а ее образ, как мы видели, есть геодезическая кривая, параметризованная так, что ее вектор скорости есть $\boldsymbol{v}$. □

Итак, отображение $\breve{g}$ переводит окрестность A в касательной плоскости в многообразие M^2 с тождественным дифференциалом в точке A. По теореме об обратном отображении эта окрестность диффеоморфно отображается на некоторую окрестность A в M^2. Иными словами, точку A можно соединить геодезической с каждой точкой в малой окрестности A.

Теперь усилим наш результат.

8.8 8. Соединение точек геодезическими

Теорема. *Для любой окрестности $\widetilde{U}$ точки $A \in M^2$ имеется такая окрестность $U(A)$, что **любые** две точки из U соединимы единственной геодезической, лежащей в $\widetilde{U}$.*

Доказательство. Воспользуемся теперь теоремой о неявной функции в усиленной форме. Она утверждает, что если нам дано отображение $\boldsymbol{z} = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — точки многомерных пространств, причем матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}$ квадратная и невырожденная в окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$, то для некоторой окрестности $\widetilde{U}$ точки $\boldsymbol{z}_0 = F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ и некоторой окрестности U точки $\boldsymbol{x}_0$ имеется окрестность W точки $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ такая, что для каждой ее точки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ мы имеем: $\boldsymbol{x} \in U$, и если $W_{\boldsymbol{x}'}$ обозначает подмножество точек $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ в W с фиксированной координатой $\boldsymbol{x}'$, то F диффеоморфно отображает $W_{\boldsymbol{x}'}$ на $\widetilde{U}$. (Иными словами, W представляется прямым произведением U и $\widetilde{U}$, а F оказывается проекцией этого прямого произведения на сомножитель $\widetilde{U}$.)

В нашем случае минор $(\frac{\partial \exp(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}})$ матрицы Якоби не нуль в окрестности A, т.к. он равен 1 в точке A. U и $\widetilde{U}$ — это окрестности в M^2 точки $\boldsymbol{x}_0 = A$, и мы получаем, что каждую точку $x \in U$ можно соединить с каждой точкой $y \in \widetilde{U}$ геодезической. Точнее говоря, для пары (x, y) определен ветор $\boldsymbol{v}$ с началом в x так, что геодезическая, исходящая из x с вектором скорости $\boldsymbol{v}$, при $t = 1$ пройдет через y.

Поскольку при стремлении этих точек к A геодезическая стремится также совпасть с A (иначе будет противоречие с теоремой п.10.5), мы получаем, что если точки берутся в малой окрестности, то соединяющая их геодезическая будет лежать целиком в $\widetilde{U}$. Ясно также, что такая геодезическая (лежащая целиком в $\widetilde{U}$) единственна. □