ПРОГРАММА
экзамена по курсу
"ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ"
(осенний семестр 2012/13 уч. года, лектор - проф. Е.В.Троицкий)
Окончательная версия

Программа состоит из двух частей: списка теоретических вопросов и списка задач. Задачи из списка делятся на три типа:

1) Задачи, которые прилагаются к билету (т.о. билет фактически состоит из двух теоретических вопросов и задачи), они помечены буквой "З".

2) Задачи, в которых доказываются вспомогательные факты теоретического вопроса (как правило, выкладки или рассуждения, не содержащие новых понятий и методов, или известные из других курсов). Они помечены буквой "Б". В том вопросе программы, в котором данная задача должна быть изложена вместе с решением, имеется соответствующая пометка "включая задачу такую-то". В формулировках вопросов в экзаменационных билетах этих пометок уже не будет.

3) Прочие задачи, которые будут использоваться, главным образом, как материал для дополнительных вопросов на экзамене. Они помечены буквой "П".

СПИСОК ВОПРОСОВ

1. Метрическое пространство, открытые и замкнутые множества и их свойства. (включая задачи 1, 3, 4, 5, 6)
2. Топологические пространства, внутренность, замыкание. Непрерывное отображение. (включая задачи 8, 9, 10)
3. Гомеоморфизм. Декартово произведение. (включая задачи 17, 18)
4. Связность и линейная связность. Связь между этими понятиями.
5. Хаусдорфовость. Нормальность. Лемма Урысона. Формулировка теоремы Титце о продолжении. Разбиение единицы.
6. Компактность. Компактное хаусдорфово пространство нормально. (включая задачу 38)
7. Гладкое многообразие, гладкое отображение, диффеоморфизм. Существование атласа с картами, диффеоморфными шару (R^n). (включая задачи 49, 50)
8. Существование гладкого разбиения единицы.
9. Поверхность уровня как многообразие.
10. Три определения касательного вектора, эквивалентность первых двух. (включая задачи 53, 54, 55)
11. Касательное отображение, регулярное значение. Прообраз регулярного значения. (включая задачу 61)
12. Погружение, вложение, вложение в сильном смысле, подмногообразие. Теорема о связи образа вложения и подмногообразия. Формулировка леммы Сарда. (включая задачу 60)

13. Слабая теорема Уитни.

14. Касательное расслоение.

15. Понятие ориентированного многообразия с краем. Край. Ориентация края гладкого ориентированного многообразия. (включая задачу 71)

16. Риманова метрика, тензорный подход, существование. Прообраз, индуцированная метрика. (включая задачи 72, 73, 74, 75)

17. Тензоры, сумма, произведение, свертка, альтернирование и симметрирование тензоров. (включая задачи 89)

18. Тензорные поля и полилинейные отображения. (включая задачу 88)

19. Поднятие и опускание индексов у тензора. (включая задачи 92, 93)

20. Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров. (включая задачи 91)

21. Дифференциальные формы и алгебраические операции над ними. Представление дифференциальных форм в локальных координатах. (включая задачи 95, 96, 97)

22. Ковариантный градиент векторного поля в евклидовом пространстве. Закон изменения коэффициентов связности при замене координат.

23. Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности в евклидовом пространстве. (включая задачи 100, 101)

24. Аффинная связность. Ее свойства и характеризация ими.

25. Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой. (включая задачу 102)

26. Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.

27. Операция параллельного перенесения. Геометрическая интерпретация ковариантной производной. Связность на поверхности в евклидовом пространстве.

28. Сохранение длины и угла между векторами при параллельном перенесении.

29. Геодезические. Существование и единственность при заданных начальных условиях. (включая задачу 105)

30. Экспоненциальное отображение. Теорема о существовании окрестности с условием единственности “короткой” геодезической.

31. Тензор кривизны Римана.

32. Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.

33. Формулы для компонент тензора кривизны римановой связности. (включая задачу 107)

34. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с гауссовой кривизной поверхности.

35. Геометрический смысл компонент тензора Римана. (включая задачу 112)

36. Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой среди гомотопных при нулевом тензоре кривизны.

37. Внешний дифференциал и его свойства. (включая задачи 133, 134, 135, 136, 137)

38. Понятие когомологий гладкого многообразия. Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении. Связь с гомотопиями. (включая задачи 140, 141)

39. Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат. (включая задачи 147, 149)

40. Общая формула Стокса.

41. Объем риманова ориентированного компактного многообразия.

СПИСОК ЗАДАЧ

1. (Б) Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

2. (П) Показать, что от конечности в свойствах пересечений открытых множеств нельзя отказаться.

3. (Б) Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.

4. (Б) Доказать, что $\operatorname{Int} Y$ открыто.

5. (Б) Доказать, что $\overline{Y}$ замкнуто.

6. (Б) Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.

7. (П) Привести пример топологического пространства (X, τ), не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).

8. (Б) В топол. пр-ве $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.

9. (Б) В топол. пр-ве $\overline{Y}$ замкнуто.

10. (Б) Проверить для τ_1 (топологии, индуцированной на подпространстве) аксиомы топологии.

11. (З) Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:
1) ρ_X порождает τ_X, которая индуцирует τ_1,
2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y, которая порождает τ_{ρ_Y}.
Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

12. (З) Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

13. (З) Пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые, $f : X \to Y$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{F_1} : F_1 \to Y$ и $f|_{F_2} : F_2 \to Y$ непрерывны.

14. (З) Пусть $f_n : X \to \mathbf{R}$ — непрерывные функции, сходящиеся к f равномерно на X. Тогда f непрерывная.

15. (З) Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0 в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

16. (З) Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

17. (Б) Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств $\mathcal{B}_1$, чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию ?

18. (Б) Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

19. (З) Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

20. (З) Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

21. (З) Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\rho_X(x_1, x_2),\ \rho_Y(y_1, y_2)\},$$
$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)},$$
$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать:

1) Что это метрики.
2) Что соответствующие топологии на $X \times Y$ совпадают.

22. (З) Доказать, что подмножества прямой (a, b), $[a, b)$ и $[a, b]$ не гомеоморфны.

23. (З) Отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ связен и линейно связен.

24. (З) Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

25. (З) Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

26. (П) Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

27. (З) Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

28. (З) Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

29. (З) Всякое метрическое пространство нормально.

30. (З) Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнуто.

31. (З) Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x, y) | x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

32. (З) Доказать, что если отображение $f : X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y непрерывно то график $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ замкнут в $X \times Y$.

33. (З) Замкнутое подмножество замкнутого подмножества замкнуто в объемлющем пространстве.

34. (З) (Теорема Титце о продолжении) Пусть X — нормальное топологическое пространство, $f : F \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \to \mathbf{R}$. Если f ограничена, то и g можно выбрать ограниченной той же константой.

35. (З) Доказать, что отрезок $[a, b]$ компактен.

36. (З) Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

37. (З) Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

38. (Б) Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.

39. (П) Пусть $f : X \to \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

40. (З) Точка x_0 называется *предельной точкой* множества Z, если в каждой ее окрестности содержится бесконечно много точек Z. Доказать, что в метрическом пространстве X множество Z, не имеющее предельных точек, является замкнутым.

41. (З) Число $\varepsilon > 0$ является *числом Лебега* открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ метрического пространства X, если покрытие $\{B_\varepsilon(x) | x \in X\}$ является измельчением $\{U_\alpha\}$ (т. е. каждый шар лежит в некотором элементе покрытия). Доказать, что если в X всякая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то всякое открытое покрытие имеет число Лебега.

42. (З) Пусть X — метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

1. X компактно;
2. любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;
3. любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т. е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.

43. (З) Декартово произведение компактных пространств является компактным.

44. (З) Привести пример многообразия с несогласованными гладкими структурами, т. е. с двумя такими гладкими атласами (U_i, φ_i) и (V_j, ψ_j), что $\{(U_i, \varphi_i), (V_j, \psi_j)\}$ не является гладким атласом.

45. (З) Доказать, что S^n является гладким многообразием.

46. (З) Доказать, что $\mathbf{R}P^n$ является гладким многообразием.

47. (З) Будут ли гладкими многообразиями граница квадрата и восьмерка (подмножества $\mathbf{R}^2$) ?

48. (З) Доказать, что S^2 — комплексно-аналитическое многообразие.

49. (Б) Доказать, что из гладкости функции по отношению к некоторой карте следует гладкость по отношению к любой.

50. (Б) Доказать, что из гладкости отображения по отношению к некоторой паре карт следует гладкость по отношению к любой.

51. (З) Проверить, что формулы

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$x^k = \frac{\varepsilon\, y^k}{\sqrt{1 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

задают диффеоморфизм $B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n$.

52. (З) Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

53. (Б) (оправдание определения) Пусть $\gamma : (-1; 1) \to M$ — гладкое отображение. Тогда соответствие

$$\xi_\gamma : (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt} \right) \Bigg|_{t=0}$$

является вектором. Здесь в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ отображение γ задано как $(x^1(t), \dots, x^n(t))$.

54. (Б) Каждый касательный вектор в точке P однозначно определяется своими компонентами относительно одной системы координат.

55. (Б) Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности $P \in M$, $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, а $\xi \in T_P M$ имеет координаты ξ^i. Тогда соответствие

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n)\xi^i$$

не зависит от выбора локальной системы координат и определяет оператор дифференцирования.

56. (З) Доказать эквивалентность третьего определения (через дифференцирования) касательного вектора двум другим.

57. (З) Доказать эквивалентность трех определений дифференциала.

58. (З) Привести пример погружения, взаимно-однозначного на образ, но не являющегося вложением.

59. (З) Для компактных многообразий вложение всегда является сильным.

60. (Б) Доказать, что подмногообразие автоматически замкнуто.

61. (Б) Пусть $f : M \to N$, а $Q_0 \in N$ — регулярное значение f. Тогда $M_{Q_0} := f^{-1}(Q_0)$ является гладким подмногообразием, $\dim M_{Q_0} = \dim M - \dim N$. В качестве локальных координат в окрестности некоторой точки M_{Q_0} можно взять некоторые $(m - n)$ координат M.

62. (З) Привести пример такого вложения, что образ не является подмногообразием (и даже многообразием).

63. (З) Непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

64. (З) Ориентировать ориентируемое многообразие можно ровно двумя способами.

65. (З) Назовем замкнутый путь в многообразии M *дезориентирующим,* если имеется набор карт $U_1, \dots, U_k$ покрывающих его, причем каждая пересекается только с двумя соседними, а все якобианы перехода, кроме одного, положительны. Доказать, что многообразие неориентируемо тогда и только тогда, когда имеется дезориентирующий путь.

66. (З) Назовем *локальной ориентацией* выбор ориентации (т. е. базиса) в каждом касательном пространстве. Локальная ориентация *локально постоянна,* если для каждой карты U стандартный базис ∂_i задает локальную ориентацию в пределах карты либо во всех точках совпадающую с данной, либо ей противоположную. Доказать, что многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда имеется локально постоянная ориентация.

67. (З) Доказать, что многообразия S^n и T^2 ориентируемы.

68. (З) Доказать, что комплексно-аналитическое многообразие ориентируемо.

69. (З) Доказать, что лента Мебиуса есть неориентируемое многообразие.

70. (З) Доказать, что проективная плоскость $\mathbf{R}P^2$ есть неориентируемое многообразие.

71. (Б) Проверить, что ограничения карт на край действительно образуют атлас.

72. (Б) Условие, что матрица $\|g_{ij}\|$ симметрическая (невырожденная) положительно определенная достаточно проверить для каждой точки $P \in M$ только в одной карте.

73. (Б) Проверить инвариантность определения скалярного произведения с помощью римановой метрики.

74. (Б) Проверить эквивалентность определений билинейной формы над точкой через тензорный закон и как формы на касательном пространстве.

75. (Б) Проверить согласованность двух определений обратного образа.

76. (З) Доказать, что если $i : N \to M$ — погружение (в частности, вложение), а g — риманова метрика на M, то $i^* g$ — риманова метрика на N. Почему это не так для произвольного отображения ?

77. (З) Доказать теорему о существовании римановой метрики с помощью разбиения единицы (без теоремы Уитни).

78. (З) Показать, что тензор типа $(1, 1)$, инвариантный относительно ортогональных замен координат, пропорционален тензору δ^i_j.

79. (З) Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

80. (З) Найти общий вид тензора четвертой валентности, инвариантного относительно произвольной замены координат.

81. (П) Выразить след матрицы в виде результата тензорных операций.

82. (З) Выразить детерминант матрицы в виде результата тензорных операций.

83. (П) Доказать, что величины C^i_i, $C^i_j C^j_i$, $C^i_j C^j_k C^k_i$, выражаются через коэффициенты многочлена $\det (C - \lambda E)$.

84. (З) Найти тип тензора, компоненты которого суть коэффициенты

1. векторного произведения,

2. смешанного произведения

векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

85. (П) Пусть X имеет валентность $(1, 0)$, W – $(0, 1)$. Найти ранг оператора $X \otimes W$.

86. (П) В точке ковекторы являются функционалами на векторах.

87. (П) Базисы $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ в $T_P M$ и $\{dx^j\}$ в $T^*_P M$ двойственны.

88. (Б) Пусть L_T — "полилинейное отображение соответствующее тензору T, а T_L — "тензор соответствующий полилинейному отображению L. Доказать, что

1. L_T полилинеен и не зависит от выбора системы координат.

2. T_L действительно удовлетворяет (p, q)-тензорному закону.

3. Эти отображения взаимно обратны.

89. (Б) Проверить тензорный закон для суммы тензоров.

90. (З) Показать на примере, что перестановка верхнего и нижнего индекса не является тензорной операцией. Рассмотреть случай тензора типа $(1, 1)$ (линейного оператора). Получить в частности, что понятие симметричности оператора $C^i_j = C^j_i$ зависит от системы координат.

91. (Б) Доказать, что локально для любой системы координат имеет место разложение

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Оно единственно.

92. (Б) Пусть b_{ij} — невырожденное тензорное поле типа $(0,2)$. Под невырожденностью понимается условие $\det\|b_{ij}\| \neq 0$. Проверить независимость этого условия от выбора системы координат.

93. (Б) Доказать, что компоненты обратной матрицы b^{jk}, т. е. удовлетворяющей условию $b^{jk}b_{ki} = \delta^j_i$, образуют тензор типа $(2,0)$.

94. (З) Докажите, что альтернирование является линейным отображением, осуществляющим проектирование на кососимметрические тензоры, а симметрические лежат в его ядре.

95. (Б) Вывести из определения внешнего умножения, что

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q)}.$$

96. (Б) Доказать, что внешние произведения базисных ковекторов образуют базис в пространстве кососимметрических тензоров (в точке). Найти размерность пространства симметрических тензоров. Исследовать возможность разложения тензора типа $(0,q)$ в сумму симметрического и кососимметрического.

97. (Б) Покажите, что для получения формулы внешнего умножения на языке дифференциальных форм достаточно перемножить выражения, а затем, путем перестановок (с учетом знаков) упорядочить дифференциалы.

98. (З) Выражение $\sqrt{\det\|g_{ij}\|}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ является тензором относительно замен координат с положительным якобианом. Здесь g_{ij} — риманова метрика.

99. (П) Покажите, что обычное частное дифференцирование компонент тензорного поля в $\mathbf{R}^n$ не является тензорной операцией.

100. (Б) Явный вид ∇ в $\mathbf{R}^n$ для общих тензоров устанавливается аналогично выкладкам для векторных и ковекторных полей. Проделайте эту выкладку.

101. (Б) Проверить правило Ньютона-Лейбница ковариантного дифференцирования произведения произвольных тензорных полей.

102. (Б) Риманова связность ∇ на римановом многообразии коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.

103. (З) Доказать эквивалентность требований евклидовости с точки зрения метрики и евклидовости с точки зрения связности.

104. (З) Если две геодезические соприкасаются в некоторой точке, то они совпадают.

105. (Б) При параллельном перенесении вектора вдоль геодезической римановой связности угол между ним и касательным вектором остается постоянным.

106. (З) Показать, что в координатах, заданных отображением exp, все Γ^i_{jk} обращаются в P_0 в нуль.

107. (Б) Вывести формулу для компонент тензора Римана римановой связности.

108. (З) Доказать, что тензор Риччи симметричен.

109. (П) Чему равен тензор кривизны одномерного многообразия ?

110. (П) Доказать, что если Γ^i_{jk} — коэффициенты связности, то $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ является тензором.

111. (П) Доказать, что если Γ^i_{jk}, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — коэффициенты двух связностей, то $\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

112. (Б) Доказать, что $\nabla_k \delta^i_j = 0$.

113. (П) Составить уравнение параллельного перенесения векторов на плоскости.

114. (П) Составить уравнение геодезических линий на плоскости и в пространстве.

115. (З) Составить уравнение геодезических линий на сфере. Найти решения уравнения.

116. (З) Описать операцию параллельного перенесения по основанию прямого кругового конуса.

117. (З) Описать операцию параллельного перенесения по треугольнику на сфере, образованному двумя меридианами и экватором.

118. (П) Показать, что если два подмногообразия соприкасаются по некоторой кривой, то операция параллельного перенесения вдоль этой кривой не зависит от выбора подмногообразия.

119. (З) Выписать в векторной форме формулу ковариантной производной на поверхности в трехмерном пространстве.

120. (З) Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от способа расположения кривой на конусе.

121. (З) Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

122. (З) Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль кривой, составленной из двух меридианов и параллели.

123. (П) Установить зависимость между углом поворота касательного вектора на сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой и площадью области, ограниченной этой кривой.

124. (З) Вычислить тензор кривизны сферы S^2,

125. (З) Вычислить тензор кривизны тора T^2, вложенного в R^3 ,

126. (З) Вычислить тензор кривизны прямого кругового конуса,

127. (П) Вычислить тензор кривизны цилиндра.

128. (П) Найти число независимых компонент тензора кривизны многообразия размерности 2, 3, 4 (в предположении, что все симметрии описаны в теореме).

129. (З) Описать геодезические линии на псевдосфере.

130. (З) Доказать, что на поверхности в трехмерном пространстве линия является геодезической тогда и только тогда, когда она в каждой точке нормальна, т.е. ее главная нормаль параллельна к нормали к поверхности.

131. (П) Показать, что при движении геодезические линии переходят в геодезические линии.

132. (П) Покажите, что из непрерывной гомотопности двух гладких отображений следует их гладкая гомотопность.

133. (Б) Градиент дифференциальной формы в координатах можно получить “непосредственным дифференцированием”. Проверить.

134. (Б) Пусть $\omega_{(1)}$ и $\omega_{(2)}$ — дифференциальные формы степеней p и q соответственно. Тогда

$$d(\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)}) = d\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} + (-1)^p \omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)}.$$

135. (Б) Для любой формы ω имеем $d(d\omega) = 0$.

136. (Б) Проверить, что при взятии обратного образа получаем действительно дифференциальную форму.

137. (Б) Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

138. (П) Доказать, что если $\deg \omega > n$, то $\omega = 0$.

139. (З) Доказать, что если формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0.$$

140. (Б) Группы когомологий диффеоморфных многообразий совпадают.

141. (Б) Группы когомологий гомотопически эквивалентных многообразий совпадают.

142. (З) Вычислить когомологии де Рама интервала (a, b) и евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

143. (З) Вычислить когомологии де Рама многообразий окружности S^1.

144. (З) Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbf{R}^2$ с одной выколотой точкой.

145. (З) Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbf{R}^2$ с двумя выколотыми точками.

146. (З) Доказать *лемму Пуанкаре*: любая замкнутая форма на любом многообразии является локально точной.

147. (Б) Интеграл определен корректно, т. е. не зависит от выбора $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)\}$.

148. (П) Показать, что при смене ориентации интеграл меняет знак.

149. (Б) Показать, что, при некоторых естественных ограничениях на карты, можно вычислять интеграл от формы следующим образом: разбить многообразие на куски, каждый из которых лежит в одной карте, проинтегрировать ограничения формы в локальных координатах, а результаты сложить.

150. (З) Вывести из общей формулы Стокса формулу Грина.

151. (З) Вывести из общей формулы Стокса формулу Стокса на поверхности.

152. (З) Вывести из общей формулы Стокса формулу Остроградского — Гаусса.

———————————

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия,* М.: Наука, 1979.

2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии,* М.: Издво Моск. ун-та, 1980.

3. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М.: Наука, 1967.

4. Хирш М. *Дифференциальная топология,* М.: Мир, 1979.