

Программа курса
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022
Лектор А.В.Пенской

1. Аффинные пространства и области аффинного пространства. Декартовы и криволинейные координаты. Регулярные гладкие k -мерные параметризованные поверхности в n -мерном аффинном пространстве. Локальные координаты на поверхности и глобальные координаты в объемлющем пространстве. Замена локальных координат на регулярных гладких поверхностях в аффинном пространстве, её гладкость.

2. Гладкие функции на регулярных гладких поверхностях в аффинном пространстве как гладкие в локальных координатах и как ограничения на поверхность гладких функций на объемлющем пространстве.

3. Теорема о неявной функции (без доказательства). Регулярные гладкие k -мерные неявно заданные поверхности в n -мерном аффинном пространстве. Утверждение о том, что неявно заданная регулярная гладкая поверхность может локально рассматриваться как параметризованная.

4. Карты, согласованность карт, атласы, эквивалентность атласов, максимальный атлас, гладкая структура, гладкое многообразие. Пример нехаусдорфова многообразия (прямая с двойной точкой). Пример гладкого многообразия: проективная плоскость и проективное пространство: однородные координаты, аффинные карты и неоднородные координаты, замена неоднородных координат.

5. Гладкие функции на гладких многообразиях и гладкие отображения гладких многообразий. Запись в локальных координатах. Гладкость композиции гладких отображений. Диффеоморфизмы.

6. Векторы в n -мерном аффинном пространстве как 1) соответствующие (криволинейной) системе координат n -ки координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций. Касательные векторы к регулярной гладкой k -мерной поверхности в n -мерном аффинном пространстве, касательное пространство в данной точке к поверхности. Касательные векторы к поверхности как 1) соответствующие локальной системе координат наборы координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене локальных координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций. Касательные векторы на многообразии как 1) соответствующие локальной системе координат n -ки координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций.

7. Векторные поля, гладкие векторные поля. Коммутатор векторных полей и его свойства. Базисы в векторных полях, частный случай: определенный локальными координатами x^1, \dots, x^n базис $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в векторных полях.

8. Интегральные кривые векторного поля, локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем.

9. Дифференциал отображения многообразий, его разные определения, явные формулы в локальных координатах. Дифференциал функции как ковектор. Дифференциальные 1-формы. Базис dx^1, \dots, dx^n в 1-формах. Его двойственность базису $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в векторных полях. Кокасательное пространство к многообразию в точке.

10. Кососимметрические полилинейные функции на векторном пространстве. Внешнее умножение кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве. Свойства внешнего умножения кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве (ассоциативность без доказательства). Коммутативная градуированная ассоциативная алгебра кососим-

метрических полилинейных функций на векторном пространстве. Базис в пространстве кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве от k аргументов. Дифференциальные k -формы. Алгебраические (поточечные) операции с дифференциальными формами: сложение, умножение на функцию, внешнее умножение, контракция с векторным полем. Запись дифференциальных форм в локальных координатах.

11. Обратный образ формы при отображении многообразий и его свойства. Обратный образ как гомоморфизм алгебр дифференциальных форм. Внешний дифференциал и его свойства. Как на практике находить обратный образ дифференциальной формы или ее преобразование при замене координат.

12. Производная Ли дифференциальных форм, её свойства. Дифференцирование градуированной алгебры. Контракция, производная Ли и дифференциал как дифференцирования степени $-1, 0, +1$ градуированной алгебры дифференциальных форм.

13. Коммутирование производной Ли с дифференциалом, тождество цепной гомотопии Картана.

14. Производная Ли векторного поля. Формула для производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

15. Формула для внешнего дифференциала дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

16. Тензоры, операции с ними: сумма, тензорное произведение. Базис в пространстве тензоров данного типа, координаты (компоненты) тензора в базисе, размерность пространства тензоров данного типа. Преобразование компонент тензора при замене базиса. Тензорные поля на многообразии, операции с ними. Преобразование компонент тензорного поля при замене локальных координат.

17. Первая квадратичная форма на поверхностях в евклидовом пространстве, риманова метрика, римановы многообразия. Запись римановой метрики в координатах, преобразование при замене координат. Изометрические отображения. Изометрии, изометричные римановы многообразия. Обратный образ метрики при отображении.

18. Свертка и поднятие / опускание индекса тензорного поля на римановом многообразии. Производная Ли тензорных полей. Киллинговы векторные поля.

19. Разбиение единицы, разбиение единицы, подчинённое покрытие, и разбиение единицы, подчинённое покрытие с тем же множеством индексов. Теорема о существовании разбиения единицы.

20. Преобразование форм старшей степени при замене координат. Ориентация области в аффинном пространстве. Интегрирование дифференциальных форм по области в аффинном пространстве. Ориентированный атлас, ориентированное многообразие, ориентированное многообразие. Интеграл дифференциальной формы старшей степени по ориентированному многообразию, его независимость от выбора атласа и подчиненного ему разбиения единицы. Ориентация на регулярной гладкой гиперповерхности в аффинном пространстве. Связь с криволинейным и поверхностным интегралами второго рода из анализа.

21. Многообразии с краем. Край как многообразие. Ориентация края, индуцированная ориентацией многообразия с краем. Теорема Стокса.

22. Форма объёма. Интегрирование формы объёма, объём многообразия. Интегрирование функций с помощью формы объёма. Связь с криволинейным и поверхностными интегралами первого рода из анализа.

23. Декартово произведение многообразий. Касательное и кокасательное расслоение.

24. Погружение, подмногообразие, вложение. Примеры. Пример неединственности структуры подмногообразия на подмножестве многообразия. Теорема о пропуске отображения через подмногообразие. Эквивалентные подмногообразия.

25. Связность (ковариантное дифференцирование): ковариантная производная векторного поля вдоль вектора и вдоль векторного поля. Символы Кристоффеля, вычисление ковариантной производной в координатах через символы Кристоффеля. Ковариантная производная 1-форм, ковариантная производная тензорных полей произвольного типа.

26. Симметрические связности, симметрия их символов Кристоффеля по нижним индексам в базисе $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Связь симметрической ковариантной производной и производной Ли. Согласованность связности с римановой метрикой. Кососимметричность символов Кристоффеля согласованной с метрикой связности в ортонормированном базисе векторных полей. Связность Леви-Чивиты. Теорема Леви-Чивиты (включая явные формулы для связности Леви-Чивиты).

27. Параллельный перенос в евклидовом пространстве. Параллельное вдоль кривой векторное поле на поверхности в евклидовом пространстве. Уравнение параллельного переноса. Параллельное вдоль кривой векторное поле на многообразии со связностью. Теорема о существовании и единственности параллельного вдоль кривой векторного поля с заданным вектором в начальной точке. Параллельный перенос вектора из начальной точки в конечную вдоль соединяющей их кривой на многообразии со связностью, существование и единственность результата параллельного переноса вдоль кривой. Сохранение длин и углов при параллельном переносе на римановом многообразии со связностью Леви-Чивиты.

28. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические на поверхности, уравнение геодезических. Геодезические на римановом многообразии, уравнение геодезических, его запись в локальных координатах. Существование и единственность геодезических.

29. Геодезические и параллельный перенос. Сохранение длины вектора скорости геодезической. Утверждение о том, что параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром.

30. Экспоненциальное отображение и его свойства. Построение геодезической через экспоненту.

31. Геодезические координаты. Три свойства прямых в евклидовой геометрии. Контрпримеры к этим трём свойствам для геодезических на римановых многообразиях.

32. Теорема Уайтхеда о нормальной окрестности.

33. Полугеодезические координаты. Геодезические сферы. Построение сферических полугеодезических координат с помощью геодезических и геодезических сфер. Свойство геодезической быть локально кратчайшей.

34. Тензор кривизны Римана $R(X, Y)Z$ на римановом многообразии, его симметрии (кососимметричность для согласованной с метрикой связности без доказательства, см. задачу 85). Тензор Риччи, скалярная кривизна, секционная кривизна.