Задачи для экзамена
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022
Лектор А.В.Пенской

Задача 1. Доказать, что стандартная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Задача 2. Доказать, что группа $\mathrm{SO}(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 - матриц. Аналогичный вопрос для группы $\mathrm{O}(n)$. Какова размерность этих групп?

Задача 3. Доказать, что группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — реулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n \times n$ - матриц.

Задача 4. Задать тор вращения как гладкую гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Регулярна ли эта поверхность?

Задача 5. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций из южного и северного полюсов, а другой с помощью параметризаций открытых полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Докажите, что это действительно атласы, то есть карты удовлетворяют определению карт и согласованы. Эквивалентны ли эти два атласа?

Задача 6. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не эквивалентны, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 7. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где, например, $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на $\mathbb{T}^2$ и u, v на $\mathbb{S}^2$. Является ли отображение Гаусса гладким?

Задача 8. Найти касательное пространство к $\mathrm{SO}(3)$ в а) точке E, б) точке

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах u и v, полученных проекцией из северного полюса N, задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Гладкое ли это отображение? Запишите его в стереографических координатах s и t, полученных проекцией из южного полюса, а также в терминах $w = s - it$. Продолжается ли это отображение в северный полюс? Будет ли оно гладким на всей сфере, включая полюса?

Задача 10. Рассмотрим стандартное отображение $p : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке A на сфере точку проективной плоскости, отвечающей проходящей через A прямой. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u и v, полученных проекцией из северного полюса N, а на проективной плоскости однородные координаты $[z^0 : z^1 : z^2]$ и неоднородные координаты $x^1 = \dfrac{z^1}{z^0}$, $x^2 = \dfrac{z^2}{z^0}$ в аффинной карте U_0. Записать отображение p в координатах u, v и x^1, x^2. Найти дифференциал p в произвольной точке сферы в этих координатах.

Задача 11. Пусть M — регулярная гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y — векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности M, касательные к M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_P M$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_P M$.

Задача 12. Доказать, что $[X, fY] = \partial_X f \cdot Y + f \cdot [X, Y]$.

Задача 13. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ локальный диффеоморфизм, X, Y векторные поля на M. Верно ли, что тогда $d\varphi_p[X, Y] = [d\varphi_p X, d\varphi_p Y]$?

Задача 14. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $F : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $F(U)$.

Задача 15. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и такую карту (U, α) на нём, что α^{-1} задаётся формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ x = r\sin\varphi, \end{cases}$$

а U — неравенствами $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Для произвольной точки $A \in \mathbb{T}^2$ найдите $d_A N\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ и $d_A N\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$ в координатах u v. Найдите матрицу дифференциала отображения N в базисах $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$.

Задача 16. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 17. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 18. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ F, \ldots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.

Задача 19. Рассмотрим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$ и векторные поля $X_1, \ldots, X_k$. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(X_1, \ldots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \ldots & \omega_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \ldots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}.$$

Задача 20. Пусть V векторное пространство размерности n. Найти размерность пространства $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций на V от k аргументов.

Задача 21. Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k-формы?

Задача 22. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Найти ограничение $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 23. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 24. Вывести формулу для производной Ли k-формы

$$\sigma = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sigma_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 25. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ на плоскости.

Задача 26. Найти производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Задача 27. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega.$$

Задача 28. Доказать, что

$$L_{fX}\omega = fL_X\omega + df \wedge \iota_X\omega,$$

где f — гладкая функция.

Задача 29. Найти коммутатор векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 30. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $d\omega(X,Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 31. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $(L_Y\omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 32. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

где L ориентированный отрезок от точки $(1,2)$ до точки $(2,1)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 33. Вычислить интеграл

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 34. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Задача 35. Вычислить интеграл по сфере радиуса 1 от формы

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Задача 36. Построить атлас на многообразии с краем — единичном замкнутом диске $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ в евклидовой плоскости.

Задача 37. Доказать, что связное многообразие или неориентируемо, либо допускает ровно две ориентации.

Задача 38. Рассмотрим атлас на многообразии. Назовём упорядоченное множество карт (U_i, φ_i), $i = 1, \ldots, n$, дезориентирующей цепочкой карт, если для любого $i = 1, \ldots, n - 1$ пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ непусто, якобиан замены координат на этом пересечении положителен, пересечение $U_n \cap U_1$ тоже непусто, но якобиан замены координат на этом пересечении отрицателен. Доказать, что если на многообразии есть дезориентирующая цепочка карт, то многообразие неориентируемо.

Задача 39. Построить на листе Мёбиуса атлас с дезориентирующей цепочкой карт. Вывести из этого, что лист Мёбиуса неориентируем.

Задача 40. Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной стандартным уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, индуцированную риманову метрику, то есть первую квадратичную форму, в сферических координатах φ, ψ на сфере. Проверить, что поворот сферы на угол α вокруг оси Oz является изометрией сферы. Найти форму объёма и площадь сферы $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2)$.

Задача 41. Найти дифференциал от формы $\omega = P(x, y)\, dx + Q(x, y) dy$. Записать формулу Грина из курса математического анализа

$$\oint_{\partial D} P(x, y)\, dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

в терминах ω и $d\omega$. Объяснить, как это согласуется с теоремой Стокса (обратите внимание на ориентацию).

Задача 42. Пусть $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R) = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$, а $\vec{\mathbf{n}}$ — поле единичных нормалей к поверхности Σ. Доказать, что

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{\Sigma} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

(надо вычислить левую часть равенства).

Задача 43. Найти дифференциал от формы

$$\omega = P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy.$$

Записать формулу Гаусса-Остроградского из курса математического анализа

$$\oiint_{\partial V} P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

в терминах ω и $d\omega$. Объяснить, как это согласуется с теоремой Стокса (обратите внимание на ориентацию).

Задача 44. Найти дифференциал от формы

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dy.$$

Аналогично предыдущим двум задачам записать классическую формулу Стокса

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dy =$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

в терминах ω и $d\omega$. Объяснить, как это согласуется с теоремой Стокса (обратите внимание на ориентацию).

Задача 45. Перепишите на языке дифференциальных форм классические формулы Стокса

$$\iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS = \oint\limits_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}, \quad \iint\limits_{\Sigma} (\nabla\times\vec{\mathbf{F}})\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS = \oint\limits_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}.$$

и Гаусса-Остроградского

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{\mathbf{F}}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial V} \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS, \quad \iiint\limits_{V} \nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial V} \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS.$$

Задача 46. Доказать, что на любом многообразии можно ввести риманову метрику.

Задача 47. Доказать, что на n-мерном многообразии M существует дифференциальная n-форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Задача 48. Пусть V векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а $e^1, \ldots, e^n$ соответствующий двойственный базис в V^*. Доказать, что тогда полилинейные функции

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},$$

где $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n$, образуют базис в пространстве $T^p_q V$ тензоров типа $\binom{p}{q}$, то есть пространстве полилинейных функций от p ковекторов и q векторов. Какова размерность пространства $T^p_q V$? Пространство $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций от k векторов из векторного пространства V является подпространством пространства тензоров $T^0_k V$. Доказать, что связь между базисами в этих пространствах выражается формулой

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \, e^{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

Пространство $S^2 V^*$ симметрических полилинейных функций от 2 векторов из векторного пространства V, то есть симметрических билинейных форм, является подпространством пространства тензоров $T^0_2 V$. Доказать, что в качестве базиса в $S^2 V^*$ можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

Какова размерность пространства $S^2 V^*$?

Задача 49. Мы определяли тензоры как полилинейные функции от ковекторов и векторов, а тензорное произведение формулой

$$(S_1 \otimes S_2)(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1+p_2}, v_1, \ldots, v_{q_1+q_2}) =$$

$$= S_1(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, v_1, \ldots, v_{q_1}) S_2(\xi_{p_1+1}, \ldots, \xi_{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \ldots, v_{q_1+q_2}).$$

Вывести из этого, что для координат этих тензоров верно равенство

$$(S_1 \otimes S_2)^{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}_{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}} = (S_1)^{i_1, \ldots, i_{p_1}}_{j_1, \ldots, j_{q_1}} (S_2)^{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}.$$

Задача 50. Доказать, что свертка тензора по одному из верхних и одному из нижних индексов является тензором. Как записать свёртку, если рассматривать тензор как полилинейную функцию от ковекторов и векторов? Почему свёртка не зависит от выбора базиса?

Задача 51. Являются ли корректно определёнными тензорными полями на многообразии величины, определённые в произвольных локальных координатах как

a) $T^i_j = \delta^i_j$,

b) $T_{ij} = \delta_{ij}$,

c) $T_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$,

d) $T_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$,

где f — некоторая гладкая функция?

Задача 52. Найти явную формулу для производной Ли $L_X T$ тензорного поля T типа $\binom{1}{1}$, то есть поля операторов, вдоль векторного поля X.

Задача 53. Найти явную формулу для производной Ли $L_X dVol$ формы объёма $dVol = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ вдоль векторного поля X на ориентированном римановом многообразии с римановой метрикой $g = g_{ij} dx^i dx^j$ в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$.

Задача 54. Доказать, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy векторные поля

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

являются киллинговыми. Доказать, что линейная комбинация двух киллинговых векторных полей тоже является полем Киллинга. Вывести из этого, что векторное поле $Z = X + Y$ тоже киллингово. Найти соответствующие векторным полям X, Y и Z однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Задача 55. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ мономорфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Доказать, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 56. Доказать, что открытая область U многообразия M является многообразием. Является ли естественное отображение $i : U \longrightarrow M$ погружением? Является ли (U, i) подмногообразием? Является ли U вложенным подмногообразием?

Задача 57. Пусть N — связное подмножество n-мерного многообразия M, обладающее таким свойством: у любой точки $A \in M$ существует такая окрестность U с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n$, что или $N \cap U = \emptyset$, или $N \cap U$ задаётся в U как решение системы гладких уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots \\ f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$$

полного ранга, то есть $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) = n-k$. Доказать, что на N есть такая структура гладкого многообразия, что естественное отображение $i : N \longrightarrow M$ является вложением. Всякое ли вложенное подмногообразие может быть получено таким образом?

Задача 58. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Доказать, что φ — погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Является ли $(\mathbb{R}, \varphi)$ подмногообразием? Вложенным подмногообразием?

Задача 59. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 60. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на сфере единичного радиуса в трёхмерном евклидовом пространстве. В качестве координат взять широту и долготу.

Задача 61. Найти явную формулу для ковариантной производной от билинейной формы q_{ij} и поля операторов A_i^j, а также для ковариантной производной тензорного поля произвольного типа $\binom{p}{q}$.

Задача 62. Пусть M — риманово многообразие, то есть многообразие с заданной римановой метрикой g. Мы определяли согласованность связности ∇ с метрикой $\langle\,,\rangle$ как выполенение для любой пары векторных полей X, Y и Z тождества $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$. Доказать, что согласованность связности с метрикой эквивалентно тождеству $\nabla g = 0$, выписать его в явном виде через g_{ij}.

Задача 63. Вывести закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Является ли символ Кристоффеля тензором типа $\binom{1}{2}$?

Задача 64. Пусть даны символы Кристоффеля Γ^i_{jk} и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ двух связностей на многообразии M. Доказать, что их разность $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

Задача 65. Пусть M — многообразие, а ∇ — *произвольная* связность. Определим формулой $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ *кручение* связности ∇. Проверьте, что кручение определяет тензор типа $\binom{1}{2}$, называемый тензором кручения связности ∇. Проверьте, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам. Заметим, что симметричность связности равносильна нулевому кручению. Доказать, что связность симметрическая тогда и только тогда, когда в локальных координатах $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Задача 66. Пусть M риманово многообразие, а ∇^M — связность Леви-Чивиты на нём. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие. Индуцируем на N риманову метрику, и пусть $P_A : T_A M \longrightarrow T_A N$ поле ортогональных проекторов P. Докажите, что связность Леви-Чивиты на N можно найти по формуле

$$\nabla^N_X Y = P(\nabla^M_X Y).$$

Задача 67. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 68. Найти результат параллельного переноса вдоль кривой на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$ а) касательного вектора, параллельного оси цилиндра, и б) касательного вектора, ортогонального оси цилиндра. Как параллельный перенос зависит от кривой?

Задача 69. На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Решить явно дифференциальное уравнение параллельного переноса.

Задача 70. Как устроен параллельный перенос на круговом конусе?

Задача 71. Доказать, что если две поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 72. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 73. Доказать, что если прямая лежит на поверхности в евклидовом пространстве, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 74. Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей $x = 1$, $y + z = 0$.

Задача 75. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая — геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 76. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 77. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической? Для геодезических на поверхности вращения получить соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 78. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_AM \longrightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Задача 79. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_AM \| v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 80. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \ldots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A, то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$.

Доказать, что в геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A, имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i — некоторые константы.

Доказать, что в этих координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \ldots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \ldots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U.

Задача 81. Докажите, что на римановом многообразии в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n-1} = \mathrm{const}, x^n = t$ являются геодезическими с натуральным параметром t.

Задача 82. Доказать, что сферические координаты в трёхмерном евклидовом пространстве являются полугеодезическими.

Задача 83. Найдите длину геодезической $\exp_A tX$, где $X \in T_AM$, от точки A до точки $\exp_A t_0 X$.

Задача 84. Выведите из определения тензора кривизны Римана явное выражение для компонент $R^l_{ij,k}$ тензора Римана через символы Кристоффеля Γ^k_{ij}.

Задача 85. Доказать, что для согласованной с метрикой связности верно тождество

$$(R(X,Y)Z, W) = -(R(X,Y)W, Z) \Longleftrightarrow R_{ij,kl} = -R_{ij,lk}.$$

Задача 86. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$.

Задача 87. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество для скалярной кривизны $R = \dfrac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Задача 88. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивиты является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Задача 89. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$. Пусть $\mathrm{Ric}(X,Y)$ — тензор Риччи, а K гауссова кривизна M. Доказать, что в данном случае $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\langle X,Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$. Доказать, что скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 90. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(<Y,Z>X-<X,Z>Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

Дополнительные задачи на оценку «отлично»

Задача 91*. Множество k-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 92*. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

Задача 93*. Доказать, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Задача 94*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 95*. Градиент $\mathrm{grad}\, f$ функции f — это векторное поле, полученное из дифференциала функции f подниманием индекса. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\mathrm{div}\, X$ формулой

$$\mathrm{div}\, X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Определим оператор Лапласа-Бельтрами от функции f формулой

$$\Delta f = -\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f.$$

Найдите оператор Лапласа-Бельтрами на евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 96*. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\mathrm{div}\, X$ формулой

$$\mathrm{div}\, X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Доказать, что $L_X\, dVol = \mathrm{div}\, X dVol$, откуда

$$\mathrm{div}\, X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\det g} X^i).$$

Задача 97*. Описать геодезические на круговом цилиндре и круговом конусе в трёхмерном евклидовом пространстве. Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические.

Задача 98*. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для любых векторных полей Y и Z и связности Леви-Чивиты верно равенство

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0.$$

Задача 99*. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для связности Леви-Чивиты верно равенство

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0.$$

Задача 100*. Доказать, что для двумерной поверхности M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой верна формула

$$\langle R(X,Y)Z, V\rangle = \mathbf{II}(Y,Z)\mathbf{II}(X,V) - \mathbf{II}(X,Z)\mathbf{II}(Y,V),$$

где $\mathbf{II}$ — вторая квадратичная форма.