Дифференциальная геометрия, III курс, осенний семестр 2021–2022 уч.г. Задачи.

С.М.Гусейн-Заде

Задача 1$_*$. Является ли подмногообразием плоскости $\mathbb{R}^2$ интервал $y = 0$, $0 < x < 1$? (Осторожно! См. определение.)

Задача 2$_*$. Является ли $GL(n, \mathbb{R})$ подмногообразием в (n^2–мерном) векторном пространстве матриц размера $n \times n$.

Задача 3. Доказать, что $SO(3)$ является подмногообразием в (9–мерном) векторном пространстве матриц размера 3×3.

Задача 4*. Доказать, что $SO(n)$ является подмногообразиями (вещественно $2n^2$–мерного) векторного пространства комплексных матриц размера $n \times n$.

Задача 5*. Доказать, что $U(n)$ и $SU(n)$ являются подмногообразием в ($2n^2$–мерном) векторном пространстве комплексных матриц размера $n \times n$.

Задача 6*. Верно ли, что любое k–мерное подмногообразие M пространства $\mathbb{R}^n$ является множеством решений системы из $(n-k)$ уравнений $f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0$, для которой ранг матрицы $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$ $(i = 1, \ldots, n-k,\ j = 1, \ldots, n)$ равен $n - k$ в любой точке $a \in M$?

Задача 7$_*$. Доказать, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ является гладким многообразием.

Задача 8. Доказать, что пространство $G(k, n)$ k–мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ является гладким многообразием ($G(k, n)$ называется Грассмановым многообразием).

Задача 9$_*$. Доказать, что $T \otimes S$ действительно является тензором (T и S — тензоры).

Задача 10$_*$. Пусть $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$ Доказать, что δ_{ij} не является тензором (типа $(0, 2)$).

Задача 11$_*$. Пусть $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$ Доказать, что δ^i_j является тензором типа $(1,1)$. Что за оператор (в касательном пространстве к рассматриваемому многообразию) отвечает этому тензору?

Задача 12$_*$. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что $v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ вектором, вообще говоря, не является.

Задача 13$_*$. Пусть u^i и v^j — вектора (в одной точке). Является ли вектором $w^i = u^i v^i$?

Задача 14$_*$. Пусть u^i $(i = 1, 2)$ — вектор в некоторой точке поверхности. Является ли вектором v^i, где $v^1 = -u^2$, $v^2 = u^1$?

Задача 15$_*$. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ тензором (типа $(0,2)$), вообще говоря, не является.

Задача 16$_*$. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что в критических точках функции f (т.е. в точках, в которых $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ является тензором типа $(0,2)$.

Задача 17$_*$. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(1,1)$), вообще говоря, не является.

Задача 18$_*$. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $T^{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(2,0)$), вообще говоря, не является.

Задача 19. Пусть $u^i = u^i(x)$ и $v^i = v^i(x)$ — векторные поля на многообразии M^n. Является ли векторным полем $w^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$.

Задача 20$_*$. Пусть $\alpha_i = \alpha_i(x)$ — ковекторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(0,2)$), вообще говоря, не является.

Задача 21$_*$. Пусть T^{ij}_{kl} — тензор типа $(2,2)$. Доказать, что $\widehat{T}^i_\ell = T^{ij}_{j\ell}$ является тензором (типа $(1,1)$).

Задача 22. Доказать, что дифференциальная 2–форма $x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx + z \cdot dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^3$ инвариантна относительно всех ортогональных преобразований, сохраняющих начало координат и ориентацию. Выяснить, как она ведет себя при гомотетиях пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 23. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что в точках, в которых v_i обращается в ноль, $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ является тензором типа $(1,1)$.

Задача 24. Пусть a_{ij} — тензор типа $(0,2)$ такой, что $\det(a_{ij}) \neq 0$, $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ ((a_{ij}) и (a^{ij}) — соответствующие матрицы). Доказать, что a^{ij} — тензор типа $(2,0)$.

Задача 25. Проверить (или, правильнее, проинтерпретировать), что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями (общей) теоремы Стокса.

Задача 26$_*$. Доказать, что на любом многообразии существует риманова метрика.

Задача 27. Пусть M^k — подмногообразие аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, f — гладкая функция на многообразии M^k. Доказать, что существует гладкая функция F на пространстве $\mathbb{R}^n$ такая, что $f = F_{|M^k}$.

Задача 28$_*$. Пусть M^n — ориентированное риманово многообразие. Доказать, что $\sqrt{\det(g_{ij}(x))}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ ($x^1, \ldots, x^n$ — положительно ориентированная локальная система координат на M^n) является (корректно определенной) n–формой на M^n.

Задача 29. Назовем n–форму ω на n–мерном многообразии M^n невырожденной, если в любой локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ форма ω равна $f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, где функция f в ноль не обращается. Доказать, что на неориентируемом многообразии не существует невырожденной n–формы.

Задача 30. Верно ли, что на любом многообразии M^n существует дифференциальная n–форма, ограничение которой на касательное пространство T_xM^n в любой точке $x \in M^n$ не равно нулю?

Задача 31. Доказать, что на многообразии M^n существует дифференциальная n–форма, ограничение которой на касательное пространство T_xM^n в любой точке $x \in M^n$ не равно нулю, тогда и только тогда, когда многообразие M^n ориентируемо.

Задача 32$_*$. Пусть U — открытая область в многообразии M^n, f — (бесконечно дифференцируемая) функция на U. Доказать, что для любого замкнутого множества $V \subset U$ существует функция $\widetilde{f}$, определенная на (всем) многообразии M^n и совпадающая с функцией f в некоторой окрестности множества V.

Задача 33$_*$. Пусть U — открытая область в многообразии M^n, ω — дифференциальная k–форма на U. Доказать, что для любого замкнутого множества $V \subset U$ существует k–форма $\widetilde{\omega}$ на многообразии M^n, совпадающая с формой ω в некоторой окрестности множества V.

Задача 34. Пусть U — открытая область в многообразии M^n, ω — замкнутая (соответственно — точная) k–форма на U. Верно ли, что для любого замкнутого множества $V \subset U$ существует замкнутая (соответственно — точная) k–форма $\widetilde{\omega}$ на многообразии M^n, совпадающая с формой ω в некоторой окрестности множества V?

Задача 35*. Доказать, что для 1-формы ω на многообразии M^n и для любых векторных полей X и Y на M^n имеет место равенство $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$, где $[X,Y]$ — коммутатор векторных полей X и Y: $[X,Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$.

Задача 36$_*$. Пусть M^n и N^k — гладкие многообразия, U — открытая область в M^n, f — (гладкое) отображение $U \to N^k$. Верно ли, что для любого замкнутого множества $V \subset U$ существует отображение $\widetilde{f} : M^n \to N^k$, совпадающее с f в некоторой окрестности множества V?

Задача 37$_*$. Доказать, что аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентна точке.

Задача 38$_*$. Доказать, что окружность S^1 гомотопически не эквивалентна точке.

Задача 39. Доказать, что двумерная сфера S^2 гомотопически не эквивалентна точке.

Задача 40. Вычислить группы когомологий де Рама плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Задача 41*. Вычислить группы когомологий де Рама плоскости без нескольких (конечного числа) точек. Предъявить дифференциальные формы, соответствующие базису в группах когомологий.

Задача 42. Вычислить группы когомологий де Рама трехмерного (координатного) пространства без осей координат.

Задача 43. Вычислить группы когомологий де Рама двумерной сферы S^2.

Задача 44. Доказать, что двумерная сфера S^2 гомотопически не эквивалентна окружности S^1.

Задача 45. Доказать, что любое замкнутое (компактное без края) ориентируемое многообразие гомотопически не эквивалентно точке.

Задача 46. Доказать, что замкнутое ориентируемое многообразие размерности n гомотопически не эквивалентно замкнутому многообразию размерности k при $k < n$.

Задача 47*. Доказать, что любое замкнутое (компактное без края) многообразие гомотопически не эквивалентно точке.

Задача 48*. Пусть на многообразии M^n задана гладкая инволюция σ (отображение $M^n \to M^n$, квадрат $\sigma \circ \sigma$ которого совпадает с тождественным). Пусть σ^* — индуцированное отображение $H^k_{dR}(M^n) \to H^k_{dR}(M^n)$, a — элемент группы $H^k_{dR}(M^n)$, для которого $\sigma^* a = a$. Доказать, что в классе смежности a существует k–форма ω, для которой $\sigma^*\omega = \omega$.

Задача 49*. Пусть на многообразии M^n задано гладкое действие конечной группы G. Дифференциал G–инвариантной форма G–инвариантен. (Докажите.) Обозначим через $H^k_{dR,G}(M^n)$ факторпространство G–инвариантных замкнутых k–форм по подпространству дифференциалов G–инвариантных $(k-1)$–форм. Доказать, что $H^k_{dR,G}(M^n)$ изоморфно подпространству группы $H^k_{dR}(M^n)$, состоящему из G–инвариантных классов когомологий.

Задача 50*. Пусть на многообразии M^n задано гладкое действие окружности S^1 (т.е. непрерывное по $g \in S^1$ семейство отображение $\varphi_g : M^n \to M^n$, для которого $\varphi_{g1 \cdot g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$), a — элемент группы когомологий де Рама $H^k_{dR}(M^n)$. Доказать, что в классе смежности a существует k–форма ω, для которой $\varphi_g^*\omega = \omega$ для всех $g \in S^1$.

Задача 51*. Пусть $\omega = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ — замкнутая k–форма на пространстве $\mathbb{R}^n$. Написать явную формулу, определяющую $(k-1)$–форму χ, для которой $d\chi = \omega$.

Задача 52*. Пусть $\omega = \sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^4$ и $\Omega = \sum\limits_{i_1 < i_2} \Omega_{i_1 i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$ — замкнутые 3– и 2–формы соответственно на $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^3 = x^4 = 0\}$. Доказать, что формы ω и Ω точны и написать явную формулу для формы ξ такой, что $d\xi = \omega$.

Задача 53$_*$. Доказать, что $H^0_{dR}(M^n)$ — линейное пространство, размерность которого равна количеству связных компонент многообразия M^n. (Говорят, что две точки x и y лежат в одной компоненте связности многообразия M^n, если их можно соединить путем, т.е. если существует (непрерывное) отображение $f : I \to M^n$ отрезка $I = [0, 1]$ в многообразие M^n такое, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.)

Задача 54$_*$. Пусть M^n — замкнутое (т.е. компактное без края) ориентированное многообразие, $int : H^n_{dR}(M^n) \to \mathbb{R}$ — отображение, ставящее в соответствие элементу $a \in H^n_{dR}(M^n)$ интеграл по многообразию M^n (замкнутой) n–формы ω на многообразии M^n из класса смежности a: $[\omega] = a$. Доказать, что int — отображение на.

Задача 55$_*$. Вычислить когомологии $H^k_{dR}(S^1)$ окружности S^1.

Задача 56. Вычислить все коэффициенты связности Γ^i_{pq} для обычной (тривиальной) связности на плоскости в полярных координатах. Пользуясь этим вычислить дивергецию $div\, v = v^i_{;i}$ в полярных координатах.

Задача 57*. Вычислить все коэффициенты связности Γ^i_{pq} для обычной (тривиальной) связности в пространстве в сферических координатах. Пользуясь этим вычислить дивергецию $div\, v = v^i_{;i}$ в сферических координатах.

Задача 58*. Доказать, что (для связности на многообразии, согласованной с метрикой) дивергеция $div\, v = v^i_{;i}$ векторного поля $v = v(x)$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} v^i),$$

где $g = det\,(g_{ij})$ — определитель матрицы Грама.

Задача 59$_*$. Доказать, что если Γ^i_{pq} и Γ^{*i}_{pq} — коэффициенты двух аффинных связностей на многообразии M^n, то $\Gamma^i_{pq} - \Gamma^{*i}_{pq}$ — тензор.

Задача 60*. Доказать, что если аффинная связность на римановом многообразии согласована с метрикой, то операция поднимания (опускания) индекса перестановочна с ковариантным дифференцированием.

Задача 61*. Будем говорить, что (риманова) метрика на многообразии M^k является собственной, если для любой точки $x_0 \in M^k$ экспоненциальное отображение определено на всем касательном пространстве $T_{x_0}M^n$ (а не только на окрестности нуля в нем). Доказать, что на любом многообразии существует собственная риманова метрика.

Задача 62$_*$. Доказать, что если аффинная связность на римановом многообразии согласована с метрикой, то операция паралельного переноса векторов вдоль кривой сохраняет скалярное произведение.

Задача 63*. Чему равна ковариантная производная от формы объема (для аффинной связности на ориентированном римановом многообразии, согласованой с метрикой).

Задача 64. В каких-либо координатах на двумерной сфере написать уравнения параллельного переноса векторов вдоль "меридиана" и вдоль "параллели" (вообще говоря, не экватора) и найти их решения.

Задача 65. Рассматривается поверхность с координатами r и φ, где $r > 0$, φ — периодическая координата, меняющаяся от 0 до 2π, и с метрикой $ds^2 = dr^2 + \mathrm{sh}^2 r \cdot d\varphi^2$. Написать уравнение параллельного переноса векторов вдоль кривой $r = 1$ и вычислить результат обноса вдоль всей кривой (т.е. для $0 \le \varphi \le 2\pi$).

Задача 66*. Доказать, что для поверхности в (трехмерном) пространстве скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой.