Задачи для экзамена
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2020
Лектор А.В.Пенской

Задача 1. Доказать, что стандартная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Задача 2. Доказать, что группа $\mathrm{SO}(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 - матриц. Аналогичный вопрос для группы $\mathrm{O}(n)$. Какова размерность этих групп?

Задача 3. Доказать, что группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ — реулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n\times n$ - матриц.

Задача 4. Задать тор вращения как гладкую гиперповерхность $f(x,y,z)=0$ в $\mathbb{R}^3$. Регулярна ли эта поверхность?

Задача 5. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций из южного и северного полюсов, а другой с помощью параметризаций открытых полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Докажите, что это действительно атласы, то есть карты удовлетворяют определению карт и согласованы. Эквивалентны ли эти два атласа?

Задача 6. Пусть $(\mathbb{R},\mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t\mapsto t$, а $(\mathbb{R},\mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t\mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не эквивалентны, но $(\mathbb{R},\mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R},\mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 7. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x=(R+r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y=(R+r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z=r\sin\varphi, \end{cases}$$

где, например, $\varphi\in(0,\pi)$, $\psi\in(0,\pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N:\mathbb{T}^2\longrightarrow\mathbb{S}^2$, которое точке $p\in\mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p)\in\mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на $\mathbb{T}^2$ и u, v на $\mathbb{S}^2$. Является ли отображение Гаусса гладким?

Задача 8. Найти касательное пространство к $\mathrm{SO}(3)$ в а) точке E, б) точке

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Рассмотрим отображение $F:\mathbb{S}^2\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$, которое в стереографических координатах u и v, полученных проекцией из северного полюса N, задаётся формулой $z\mapsto z^2$, где $z=u+iv$. Гладкое ли это отображение? Запишите его в стереографических координатах s и t, полученных проекцией из южного полюса, а также в терминах $w=s-it$. Продолжается ли это отображение в северный полюс? Будет ли оно гладким на всей сфере, включая полюса?

Задача 10. Рассмотрим стандартное отображение $p:\mathbb{S}^2\longrightarrow\mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке A на сфере точку проективной плоскости, отвечающей проходящей через A прямой. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u

и v, полученных проекцией из северного полюса N, а на проективной плоскости однородные координаты $[z^0 : z^1 : z^2]$ и неоднородные координаты $x^1 = \dfrac{z^1}{z^0}$, $x^2 = \dfrac{z^2}{z^0}$ в аффинной карте U_0. Записать отображение p в координатах u, v и x^1, x^2. Найти дифференциал p в произвольной точке сферы в этих координатах.

Задача 11. Пусть M — регулярная гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y — векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности M, касательные к M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_P M$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_P M$.

Задача 12. Доказать, что $[X, fY] = \partial_X f \cdot Y + f \cdot [X, Y]$.

Задача 13. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ локальный диффеоморфизм, X, Y векторные поля на M. Верно ли, что тогда $d\varphi_p[X, Y] = [d\varphi_p X, d\varphi_p Y]$?

Задача 14. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $F : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $F(U)$.

Задача 15. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и такую карту (U, α) на нём, что α^{-1} задаётся формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ x = r\sin\varphi, \end{cases}$$

а U — неравенствами $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Для произвольной точки $A \in \mathbb{T}^2$ найдите $d_A N\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ и $d_A N\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$ в координатах u v. Найдите матрицу дифференциала отображения N в базисах $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$.

Задача 16. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 17. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 18. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ F, \ldots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.

Задача 19. Рассмотрим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$ и векторные поля $X_1, \ldots, X_k$. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(X_1, \ldots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \ldots & \omega_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \ldots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}.$$

Задача 20. Пусть V векторное пространство размерности n. Найти размерность пространства $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций на

V от k аргументов.

Задача 21. Доказать, что если дифференциальные 1-формы ω_1, …, ω_p линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k-формы?

Задача 22. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Найти ограничение $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 23. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 24. Вывести формулу для производной Ли k-формы

$$\sigma = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sigma_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 25. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ на плоскости.

Задача 26. Найти производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Задача 27. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega.$$

Задача 28. Доказать, что

$$L_{fX}\omega = f L_X\omega + df \wedge \iota_X\omega,$$

где f — гладкая функция.

Задача 29. Найти коммутатор векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 30. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $d\omega(X, Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 31. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $(L_Y\omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 32. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

где L ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 33. Вычислить интеграл

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 34. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Задача 35. Вычислить интеграл по сфере радиуса 1 от формы

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Задача 36. Доказать, что выбор ориентации на двумерной поверхности в трёхмерном ориентированном евклидовом пространстве эквивалентен выбору гладкого поля единичных нормалей к поверхности.

Задача 37. Построить атлас на многообразии с краем — единичном замкнутом диске $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ в евклидовой плоскости.

Задача 38. Объяснить, как известные из анализа формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса получаются как частный случай теоремы Стокса для дифференциальных форм. Почему ориентация границы в классических формулировках точно такая, которая индуцируется на крае многообразия из ориентации многообразия?

Задача 39. Доказать, что связное многообразие или неориентируемо, либо допускает ровно две ориентации.

Задача 40. Рассмотрим атлас на многообразии. Назовём упорядоченное множество карт (U_i, φ_i), $i = 1, \ldots, n$, дезориентирующей цепочкой карт, если для любого $i = 1, \ldots, n-1$ пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ непусто, якобиан замены координат на этом пересечении положителен, пересечение $U_n \cap U_1$ тоже непусто, но якобиан замены координат на этом пересечении отрицателен. Доказать, что если на многообразии есть дезориентирующая цепочка карт, то многообразие неориентируемо.

Задача 41. Построить на листе Мёбиуса атлас с дезориентирующей цепочкой карт. Вывести из этого, что лист Мёбиуса неориентируем.

Задача 42. Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной стандартным уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, индуцированную риманову метрику, то есть первую квадратичную форму, в сферических координатах φ, ψ на сфере. Проверить, что поворот сферы на угол α вокруг оси Oz является изометрией сферы. Найти форму объёма и площадь сферы $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2)$.

Задача 43. Доказать, что на любом многообразии можно ввести риманову метрику.

Задача 44. Доказать, что на n-мерном многообразии M существует дифференциальная n-форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Задача 45. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразия M в риманово многообразие N с римановой метрикой $\langle\, ,\rangle^N$. Доказать, что введённая на M по формуле

$$\langle X, Y\rangle_A^M = \langle d_A f(X), d_A f(Y)\rangle_{f(A)}^N$$

билинейная форма $\langle\, ,\rangle^M$ является римановой метрикой тогда и только тогда, когда в любой точке дифференциал df инъективен.

Задача 46. Пусть V векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а $e^1, \ldots, e^n$ соответствующий двойственный базис в V^*. Доказать, что тогда полилинейные функции

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},$$

где $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n$, образуют базис в пространстве $T^p_q V$ тензоров типа $\binom{p}{q}$, то есть пространстве полилинейных функций от p ковекторов и q векторов. Какова размерность пространства $T^p_q V$? Пространство $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций от k векторов из векторного пространства

V является подпространством пространства тензоров $T^0_k V$. Доказать, что связь между базисами в этих пространствах выражается формулой

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \, e^{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

Пространство $S^2 V^*$ симметрических полилинейных функций от 2 векторов из векторного пространства V, то есть симметрических билинейных форм, является подпространством пространства тензоров $T^0_2 V$. Доказать, что в качестве базиса в $S^2 V^*$ можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

Какова размерность пространства $S^2 V^*$?

Задача 47. Мы определяли тензоры как полилинейные функции от ковекторов и векторов, а тензорное произведение формулой

$$(S_1 \otimes S_2)(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1+p_2}, v_1, \ldots, v_{q_1+q_2}) =$$
$$= S_1(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, v_1, \ldots, v_{q_1}) S_2(\xi_{p_1+1}, \ldots, \xi_{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \ldots, v_{q_1+q_2}).$$

Вывести из этого, что для координат этих тензоров верно равенство

$$(S_1 \otimes S_2)^{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}_{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}} = (S_1)^{i_1, \ldots, i_{p_1}}_{j_1, \ldots, j_{q_1}} (S_2)^{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}.$$

Задача 48. Доказать, что свертка тензора по одному из верхних и одному из нижних индексов является тензором. Как записать свёртку, если рассматривать тензор как полилинейную функцию от ковекторов и векторов? Почему свёртка не зависит от выбора базиса?

Задача 49. Доказать, что отождествление V и V^* при наличии евклидова скалярного произведения в V — это в точности операции опускания и подъёма индекса.

Задача 50. Являются ли корректно определёнными тензорными полями на многообразии величины, определённые в произвольных локальных координатах как

a) $T^i_j = \delta^i_j$,

b) $T_{ij} = \delta_{ij}$,

c) $T_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$,

d) $T_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$,

где f — некоторая гладкая функция?

Задача 51. Найти явную формулу для производной Ли $L_X T$ тензорного поля T типа $\binom{1}{1}$, то есть поля операторов, вдоль векторного поля X.

Задача 52. Найти явную формулу для производной Ли $L_X dVol$ формы объёма $dVol = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ вдоль векторного поля X на ориентированном римановом многообразии с римановой метрикой $g = g_{ij} dx^i dx^j$ в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$.

Задача 53. Доказать, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy векторные поля

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

являются киллинговыми. Доказать, что линейная комбинация двух киллинговых векторных полей тоже является полем Киллинга. Вывести из этого, что векторное поле $Z = X + Y$ тоже киллингово. Найти соответствующие векторным полям X, Y и Z однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Задача 54. Приведите пример подмножества $\mathbb{R}^1$, не являющегося подмногообразием $\mathbb{R}^1$. Аналогичный вопрос для $\mathbb{R}^2$.

Задача 55. Пусть M гладкое многообразие а A подмножество M. Фиксируем топологию на A. Доказать, что тогда на A существует не более одной дифференцируемой структуры, такой, что (A, i) — подмногообразие в M, где i — отображение вложения.

Задача 56. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ мономорфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Доказать, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 57. Доказать, что открытая область U многообразия M является многообразием. Является ли естественное отображение $i : U \longrightarrow M$ погружением? Является ли (U, i) подмногообразием? Является ли U вложенным подмногообразием?

Задача 58. Пусть N — связное подмножество n-мерного многообразия M, обладающее таким свойством: у любой точки $A \in M$ существует такая окрестность U с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n$, что или $N \cap U = \emptyset$, или $N \cap U$ задаётся в U как решение системы гладких уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \qquad \ldots \\ f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$$

полного ранга, то есть $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) = n - k$. Доказать, что на N есть такая структура гладкого многообразия, что естественное отображение $i : N \longrightarrow M$ является вложением. Всякое ли вложенное подмногообразие может быть получено таким образом?

Задача 59. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Доказать, что φ — погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Является ли $(\mathbb{R}, \varphi)$ подмногообразием? Вложенным подмногообразием?

Задача 60. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 61. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на сфере единичного радиуса в трёхмерном евклидовом пространстве. В качестве координат взять широту и долготу.

Задача 62. Найти явную формулу для ковариантной производной от билинейной формы q_{ij} и поля операторов A_i^j, а также для ковариантной производной тензорного поля произвольного типа $\binom{p}{q}$.

Задача 63. Пусть M — риманово многообразие, то есть многообразие с заданной римановой метрикой g. Мы определяли согласованность связности ∇ с метрикой $\langle\,,\rangle$ как выполенение для любой пары векторных полей X, Y и Z тождества $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$. Доказать, что согласованность связности с метрикой эквивалентно тождеству $\nabla g = 0$, выписать его в явном виде через g_{ij}.

Задача 64. Вывести закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Является ли символ Кристоффеля тензором типа $\binom{1}{2}$?

Задача 65. Пусть даны символы Кристоффеля Γ^i_{jk} и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ двух связностей на многообразии M. Доказать, что их разность $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

Задача 66. Пусть M — многообразие, а ∇ — *произвольная* связность. Определим формулой $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ *кручение* связности ∇. Проверьте, что кручение определяет тензор типа $\binom{1}{2}$, называемый тензором кручения связности ∇. Проверьте, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам. Заметим, что симметричность связности равносильна нулевому кручению. Доказать, что связность симметрическая тогда и только тогда, когда в локальных координатах $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Задача 67. Пусть M риманово многообразие, а ∇^M — связность Леви-Чивиты на нём. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие. Индуцируем на N риманову метрику, и пусть $P_A : T_A M \longrightarrow T_A N$ поле ортогональных проекторов P. Докажите, что связность Леви-Чивиты на N можно найти по формуле

$$\nabla^N_X Y = P(\nabla^M_X Y).$$

Задача 68. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 69. Найти результат параллельного переноса вдоль кривой на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$ а) касательного вектора, параллельного оси цилиндра, и б) касательного вектора, ортогонального оси цилиндра. Как параллельный перенос зависит от кривой?

Задача 70. На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Решить явно дифференциальное уравнение параллельного переноса.

Задача 71. Как устроен параллельный перенос на круговом конусе?

Задача 72. Доказать, что если две поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 73. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 74. Доказать, что если прямая лежит на поверхности в евклидовом пространстве, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 75. Найти результат параллельного переноса вектора $(0,1,1)$ из точки $(1,0,0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ в точку $(1,-1,1)$ вдоль прямолинейной образующей $x=1$, $y+z=0$.

Задача 76. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая — геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 77. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 78. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической? Для геодезических на поверхности вращения получить соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 79. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_AM \longrightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Задача 80. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_AM||v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 81. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \ldots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A, то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$.

Доказать, что в геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A, имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i — некоторые константы.

Доказать, что в этих координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \ldots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \ldots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U.

Задача 82. Докажите, что на римановом многообразии в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n-1} = \mathrm{const}$, $x^n = t$ являются геодезическими с натуральным параметром t.

Задача 83. Доказать, что сферические координаты в трёхмерном евклидовом пространстве являются полугеодезическими.

Задача 84. Найдите длину геодезической $\exp_A tX$, где $X \in T_AM$, от точки A до точки $\exp_A t_0 X$.

Задача 85. Выведите из определения тензора кривизны Римана явное выражение для компонент $R^l_{ij,k}$ тензора Римана через символы Кристоффеля Γ^k_{ij}.

Задача 86. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$.

Задача 87. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество для скалярной кривизны $R = \dfrac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Задача 88. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивиты является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Задача 89. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$. Пусть $\mathrm{Ric}(X,Y)$ — тензор Риччи, а K гауссова кривизна M. Доказать, что в данном случае $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\langle X,Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$. Доказать, что скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 90. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(<Y,Z> X - <X,Z> Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

Дополнительные задачи на оценку «отлично»

Задача 91*. Множество k-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 92*. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

Задача 93*. Доказать, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Задача 94*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 95*. Градиент $\operatorname{grad} f$ функции f — это векторное поле, полученное из дифференциала функции f подниманием индекса. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Определим оператор Лапласа-Бельтрами от функции f формулой

$$\Delta f = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f.$$

Найдите оператор Лапласа-Бельтрами на евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 96*. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Доказать, что

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\det g} X^i).$$

Задача 97*. Описать геодезические на круговом цилиндре и круговом конусе в трёхмерном евклидовом пространстве. Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические.

Задача 98*. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для любых векторных полей Y и Z и связности Леви-Чивиты верно равенство

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0.$$

Задача 99*. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для связности Леви-Чивиты верно равенство

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0.$$

Задача 100*. Доказать, что для двумерной поверхности M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой верна формула

$$\langle R(X,Y)Z, V\rangle = \mathbf{II}(Y,Z)\mathbf{II}(X,V) - \mathbf{II}(X,Z)\mathbf{II}(Y,V),$$

где $\mathbf{II}$ — вторая квадратичная форма.