Программа курса
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2017
Лектор А.В.Пенской

1. Гладкие регулярные кривые в $\mathbb{R}^n$, гладкие регулярные k-мерные поверхности в $\mathbb{R}^n$. Гладкие k-мерные подмногообразия $\mathbb{R}^n$. Неявно заданные подмногообразия $\mathbb{R}^n$.

2. Гладкие многообразия: карты, отображения склейки, согласованные карты, атлас, эквивалентность атласов, гладкая структура, максимальный атлас.

3. Гладкие функции на гладком многообразии, гладкие отображения гладких многообразий. Корректность определения (независимость гладкости от выбора карты). Запись функций и отображений в координатах.

4. Разбиение единицы, подчинённое покрытию. Теорема о существовании разбиения единицы, подчинённого данному покрытию.

5. Касательные векторы на многообразии: определение а) через сопоставленные системе координат наборы чисел с заданным законом преобразования при замене координат, и б) через дифференцирование гладких функций, эквивалентность этих определений. Касательное пространство в точке гладкого многообразия, структура векторного пространства на нём.

6. Индуцированное гладким отображением многообразий $F\colon M \longrightarrow N$ отображение алгебр гладких функций $F^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$. Дифференциал $d_pT : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ в точке p отображения F : определение для двух определений касательных векторов и их эквивалентность. Матрица дифференциала в локальных координатах. Дифференциал композиции отображений.

7. Векторные поля на гладких многообразиях. Локальный базис $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Коммутатор векторных полей и его свойства, в том числе тождество Якоби. Векторные поля, их интегральные кривые и системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Дифференциальные 1-формы. Кокасательное пространство в точке гладкого многообразия. Дифференциал df функции $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ как 1-форма. Связь с дифференциалом отображения $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$. Дуальный к базису в векторных полях базис в пространстве 1-форм, локальный базис $\{dx^j\}$.

9. Подмногообразие. Погружения и вложения. Образ вложения. Примеры.

10. Касательное и кокасательное расслоения к гладкому многообразию.

11. Дифференциальные k-формы на гладком многообразии, пространство $\Omega^k(M)$ дифференциальных k-форм на M, обратный образ формы. Алгебраические операции с дифференциальными формами: сложение, умножение на функцию, внешнее умножение дифференциальных форм и их свойства. Локальный базис $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\}$.

12. Индуцированное отображением гладких многообразий $F : M \longrightarrow N$ отображение пространств k-форм $F^*\colon \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$. Взаимодействие обратного образа формы и внешнего умножения: $F^*(\omega\wedge\tau) = F^*\omega\wedge F^*\tau$, обратного образа формы и суммы форм: $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$,

13. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм и его свойства, в том числе тождество Лейбница и взаимодействие с обратным образом формы: $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.

14. Ориентируемость многообразия, ориентированные многообразия. Многообразия с краем.

15. Носитель дифференциальной формы. Интегрирование дифференциальных форм с компактным носителем, проверка корректности определения.

16. Риманова метрика, форма объёма, интегрирование функций. Связь с криволинейными и поверхностными интегралами I и II рода.

17. Производная Ли $L_X\omega$ диффенциальной формы вдоль векторного поля, внутреннее произведение (контракция) $\iota_X\omega$ дифференциальной формы и векторного поля, их свойства. Понятие дифференцирования степени p градуированной алгебры дифференциальных форм, d, L_X и ι_X как примеры. Соотношения между d, L_X и ι_X, формула гомотопии Картана.

18. Теорема Стокса. Формула Грина, теорема Гаусса-Остроградского и классическая теорема Стокса как частные случаи.

19. Замкнутые формы, точные формы. Группы когомологий де Рама, когомологические классы, когомологичные формы. Примеры. Индуцированное отображением гладких многообразий $F\colon M \longrightarrow N$ отображение групп когомологий $F^*\colon H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$.

20. Лемма Пуанкаре.

21. Гомотопные отображения, гомотопически эквивалентные многообразия. Группы когомологий гомотопически эквивалентных многообразий.

22. Язык точных последовательностей. Короткая точная последовательность Майера-Виеториса.

23. Длинная точная последовательность Майера-Виеториса (только построение отображений без проверки корректности их определения и точности).

24. Покрытие Лерэ. Конечномерность групп когомологий компактного многообразия, обладающим покрытием Лерэ.

25. Связность (ковариантное дифференцирование): ковариантная производная векторного поля вдоль вектора и вдоль векторного поля. Символы Кристоффеля, вычисление связности в координатах. Симметрические связности, симметрия их символов Кристоффеля по нижним индексам (для локального базиса $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$).

26. Согласованность связности с римановой метрикой. Связность Леви-Чивиты. Теорема Леви-Чивиты (включая явные формулы для связности Леви-Чивиты).

27. Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривой на римановом многообразии. Уравнение параллельного переноса. Существование и единственность результата параллельного переноса вдоль заданной кривой. Сохранение длин и углов при параллельном переносе.

28. Геодезические на римановом многообразии. Уравнение геодезических. Существование и единственность геодезических. Сохранение длины касательного вектора геодезической.

29. Экспоненциальное отображение и его свойства.

30. Теорема Уайтхеда о существовании у каждой точки риманова многообразия такой окрестности, что любые две точки этой окрестности соединяются в ней единственной геодезической.

31. Полугеодезические координаты. Свойство геодезической быть локально кратчайшей.

32. Тензоры (тензорные поля) типа $\binom{p}{q}$, продолжение связности на тензорные поля. Оператор кривизны Римана $R(X,Y)Z$ на римановом многообразии, его линейность по всем трём аргументам. Оператор кривизны Римана как тензор типа $\binom{1}{3}$. Тензор Риччи.