Задачи для экзамена
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2017
Лектор А.В.Пенской

Задача 1. Доказать, что $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — неособая (гладкая) гиперповерхность в пространстве $n \times n$-матриц.

Задача 2. Доказать, что $\mathrm{SO}(3)$ — неособая (гладкая) поверхность в пространстве вещественных 3×3-матриц.

Задача 3. Задать тор вращения как гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Неособа ли эта поверхность?

Задача 4. Приведите пример подмножества $\mathbb{R}^1$, не являющегося подмногообразием $\mathbb{R}^1$. Аналогичный вопрос для $\mathbb{R}^2$.

Задача 5. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций, а другой с помощью параметризаций полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Эквивалентны ли эти два атласа?

Задача 6. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не эквивалентны, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 7. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ x = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где, например, $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на $\mathbb{T}^2$ и u, v на $\mathbb{S}^2$. Является ли отображение Гаусса гладким?

Задача 8. Рассмотрим открытое покрытие $\{U, V\}$ вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, состоящей из открытых множеств $U = (-\infty, 2)$ и $V = (0, \infty)$. Постройте разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.

Задача 9. Введите однородные и неоднородные комплексные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Докажите, что $\mathbb{CP}^1$ является (вещественным) гладким двумерным многообразием. Доказажите, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2$. *Указание: если в координатах на сфере, введённых с помощью стереографической проекции, положить $z = u + iv$, $w = \tilde{u} - i\tilde{w}$, то отображение склейки принимает вид*

$$z = \frac{1}{w}$$

(проверьте!)

Задача 10. Множество k-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 11. Пусть M — многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y — векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности M, касательные к M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_P M$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается M, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_P M$.

Задача 12. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

Задача 13. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 14. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 15. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f, \ldots, x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.

Задача 16. Найти касательное пространство к $\mathrm{SO}(3)$ в а) точке E, б) произвольной точке.

Задача 17. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ (вложенное) подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p \iota : T_p N \longrightarrow T_{\iota(p)} M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_p N$ с $d_p \iota(X) \in T_{\iota(p)} M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)} N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$.

Докажите, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 18. Докажите, что открытая область многообразия является многообразием. Докажите, что $\mathrm{GL}(n)$ является гладким многообразием. Является ли $\mathrm{SL}(n)$ подмногообразием $\mathrm{GL}(n)$?

Задача 19. Является ли $\mathrm{SO}(n)$ подмногообразием $\mathrm{GL}(n)$?

Задача 20. Является ли $\mathrm{SO}(3)$ подмногообразием $\mathrm{SL}(3)$?

Задача 21. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R}, \varphi)$ — погружение в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Это вложение?

Задача 22. Построить пример такой поверхности Σ в $\mathbb{R}^n$, что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является (вложенным) подмногообразием.

Задача 23. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $p = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ множество $f^{-1}(f(p))$ будет подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

Задача 24. Найдите интегральные кривые векторного поля $-y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Задача 25. Рассмотрите двумерную сферу с атласом из двух карт, построенных при помощи стереграфических проекций из южного и северного полюса. Постройте явно атлас касательного и кокасательного расслоения к сфере.

Задача 26. Докажите, что векторное поле X является гладким тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-формы ω функция $\omega(X)$ является гладкой.

Задача 27. Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k-формы?

Задача 28. Найти $d\omega$, если

$$\omega = x^2 dx \wedge dy + xzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Найти $\omega \wedge (dx + dy + dz)$.

Задача 29. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2),$$

а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

Найти ограничение $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 30. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 31. Записать дифференциальные формы

$$\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \quad \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$$

в полярных координатах. Записать $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ в сферических координатах.

Задача 32. Докажите, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие замкнуто. Докажите, что ограничение точной формы на подмногообразие точно.

Задача 33. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 34. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Задача 35. Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L -x^2 ydx + xy^2 dy,$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 36. Вычислить

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

для *любого* контура L. Как ответ соотносится с теоремой Стокса?

Задача 37. Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ метрику, индуцированную стандартной метрикой на $\mathbb{R}^3$ (в прошлом учебном году это называлось «найдите первую квадратичную форму сферы»). Найдите с помощью найденной метрики на сфере угол между векторами $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial\psi}$, где φ, ψ — сферические координаты на сфере, в точке с координатами $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{4}$. Найти форму объема на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Найти площадь (двумерный объём) двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 38. Доказать, что на n-мерном многообразии M существует дифференциальная n-форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Задача 39. Объясните, как известные из анализа формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского могут быть интерпретированы как частные случаяи теоремы Стокса для дифференциальных форм.

Задача 40. Доказать, что

$$L_X(\omega)(X_1,\dots,X_k) = L_X(\omega(X_1,\dots,X_k)) -$$

$$-\omega([X,X_1],\dots,X_k) - \dots - \omega(X_1,\dots,[X,X_k]).$$

Указание: например, можно использовать вычисление в локальных координатах.

Задача 41. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega,$$

то есть $L_X(\iota_Y\omega) - \iota_Y(L_X\omega) = \iota_{[X,Y]}\omega$.

Задача 42. Доказать, что

$$L_{fX}\omega = fL_X\omega + df \wedge \iota_X\omega,$$

где f — гладкая функция.

Задача 43. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

Задача 44. Докажите, что любая 1-форма на окружности $\mathbb{S}^1$ когомологична 1-форме, инвариантной относительной вращений. Найдите с помощью этого $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Задача 45. Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$. *Указание: например, можно использовать усреднение по действию тора на себе сдвигами, поступая как в предыдущей задаче.*

Задача 46. Пусть M компактное ориентируемое многообразие без края размерности n. Доказать, что $H^n(M)$ нетривиальна.

Задача 47. Найдите когомологии плоскости без одной точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Указание: чему гототопически эквивалентна плоскость без одной точки?*

Задача 48. Найдите когомологии листа Мебиуса.

Задача 49. Найдите когомологии $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^n$.

Задача 50. Найдите когомологии $\mathbb{RP}^2$ и $\mathbb{R}P^n$. *Указание: рассмотрите формы на сфере, инвариантные относительно антиподального отображения.*

Задача 51. Докажите, что умножение когомологических классов, заданное формулой

$$[\omega_1] \wedge [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

определено корректно и задает структуру кольца на $H^*(M) = \bigoplus\limits_{k=0}^{\dim M} H^k(M)$.

Задача 52. Рассмотрим евклидову метрику на плоскости. Найдите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты в полярных координатах.

Задача 53. Найдите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты для стандартной сферы радиуса 1 в сферических координатах.

Задача 54. Пусть M риманово многообразие, а ∇^M — связность Леви-Чивиты на нём. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие. Индуцируем на N риманову метрику, и пусть $P_A : T_AM \longrightarrow T_AN$ поле ортогональных проекторов P. Докажите, что связность Леви-Чивиты на N можно найти по формуле

$$\nabla^N_X Y = P(\nabla^M_X Y).$$

Задача 55. Найдите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты для стандартной сферы радиуса 1 в стереографических координатах.

Задача 56. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 57. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой? *Указание: так как на двумерной поверхности параллельный перенос восстанавливается по параллельному переносу некоторого одного начального вектора, то достаточно найти результат параллельного переноса начального вектора, параллельного оси цилиндра.*

Задача 58. На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Решите эту задачу, решив дифференциальное уравнение параллельного переноса.

Задача 59. Как устроен параллельный перенос на круговом конусе? *Указание: как связаны метрики на конусе и его развертке?*

Задача 60. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 61. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 62. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 63. Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Указание: воспользуйтесь тем, что прямая на поверхности является геодезической, а поле скоростей геодезической параллельно вдоль неё.

Задача 64. Доказать, что геодезическими на k-мерной плоскости в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Задача 65. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая — геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 66. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 67. Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{R}^3$).

Задача 68. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 69. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Обратите внимание, что (в модели в верхней полуплоскости)*

$$I_1 = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}, \quad I_2 = x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y$$

являются двумя первыми интегралами исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Задача 70. Приведите пример связного риманова многообразия, на котором экспоненциальное отображение не является 1) инъективным, 2) сюръективным.

Задача 71. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 72. Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 73. Пусть M — риманово многообразие, то есть многообразие с заданной римановой метрикой g. Мы определяли согласованность метрики $(\,,)$ со связностью ∇ как выполенение для любой пары векторных полей X, Y и Z тождества $X(Y,Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$. Найдите ковариантную производную метрики $g_{ij;k}$ и докажите, что согласованность метрики со связностью эквивалентно тождеству $g_{ij;k} = 0$.

Задача 74. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(<Y,Z>X-<X,Z>Y).$$