

**Программа курса**  
**Дифференциальная геометрия и топология**  
**Мехмат МГУ, осень 2015**  
**Лектор А.В.Пенской**

*Вопросы, отмеченные звёздочкой, необходимо знать претендующим на оценку «отлично».*

1. Гладкие регулярные кривые, гладкие регулярные поверхности в  $\mathbb{R}^n$ . Неявно заданные поверхности.
2. Гладкие многообразия: карты, отображения склейки, атлас, эквивалентность атласов, гладкая структура, максимальный атлас.
3. Гладкие отображения гладких многообразий, гладкие функции на гладком многообразии.
4. Разбиение единицы, подчинённое покрытие.
5. Касательные векторы на многообразии: определение через классы эквивалентности гладких кривых, через сопоставленные системе координат наборы чисел и через дифференцирование гладких функций, эквивалентность этих определений. Касательное пространство в точке гладкого многообразия, структура векторного пространства на нём.
6. Векторные поля на гладких многообразиях. Коммутатор векторных полей и его свойства.
7. Индуцированное отображением многообразий  $F: M \rightarrow N$  отображение алгебр гладких функций  $F^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ . Определение дифференциала  $d_p F$  отображения  $F$  в точке  $p \in M$ , его запись в локальных координатах. Дифференциал композиции отображений. Дифференциал вещественнозначной функции на гладком многообразии.
8. Погружение, подмногообразие, вложение. Примеры.
9. Косасательное пространство в точке гладкого многообразия. Дифференциальные 1-формы. Дуальный к базису в векторных полях базис в пространстве 1-форм. Локальные базисы  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  и  $\{dx^j\}$ .
10. Касательное расслоение к гладкому многообразию.
11. Дифференциальные  $k$ -формы на гладком многообразии. Индуцированное отображением гладких многообразий  $F: M \rightarrow N$  отображение пространств  $k$ -форм  $F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ . Внешнее умножение дифференциальных форм и его свойства, в том числе  $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$ . Локальный базис  $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}$ .
12. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм и его свойства, в том числе тождество Лейбница и свойство  $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$ .
13. Ориентируемость многообразия, ориентированные многообразия. Многообразия с краем.
14. Носитель дифференциальной формы. Интегрирование дифференциальных форм с компактным носителем. Риманова метрика, форма объёма, интегрирование функций.
15. Теорема Стокса. Формула Грина, теорема Гаусса-Остроградского и классическая теорема Стокса как частные случаи.
16. Замкнутые формы, точные формы. Группы когомологий де Рама, когомологические классы, когомологичные формы. Примеры. Индуцированное отображением гладких многообразий  $F: M \rightarrow N$  отображение групп когомологий  $F^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ .
17. Лемма Пуанкаре и её следствия.
18. Гомотопные отображения, гомотопически эквивалентные многообразия. Группы когомологий гомотопически эквивалентных многообразий.
- 19\*. Короткая и длинная точные последовательности Майера-Вьеториса.

**20\***. Конечномерность групп когомологий компактного многообразия. Когомологии де Рама с компактным носителем. Двойственность Пуанкаре (без доказательства).

**21\***. Тривиальное расслоение, локально тривиальное расслоение: тотальное пространство расслоения, проекция, база расслоения, слой расслоения, тривиализующие окрестности, тривиализующие отображения, тривиализация расслоения. Слой расслоения над точкой базы. Тривиализация со структурной группой  $GL(V)$ , склеивающие коциклы, эквивалентность двух тривиализаций со структурной группой  $GL(V)$ , структура векторного расслоения на локально тривиальном расслоении. Ранг векторного расслоения. Примеры: цилиндр и лист Мёбиуса, расслоенные над окружностью, касательное расслоение гладкого многообразия, универсальное (тавтологическое) расслоение над проективным пространством.

**22\***. Сечение расслоения, пространство сечений векторного расслоения, базис в пространстве сечений векторного расслоения над областью. Морфизм векторных расслоений с одинаковой базой. Критерий тривиальности векторного расслоения в терминах базиса в пространстве сечений.

**23\***. Восстановление векторного расслоения по базе, слою, тривиализующим окрестностям и склеивающим коциклам. Продолжение операций с векторными пространствами на векторные расслоения. Кокасательное расслоение  $T^*M$ , расслоение тензоров  $T_q^p M$ . Тензоры (тензорные поля) типа  $\binom{p}{q}$  как сечения расслоения  $T_q^p M$ . Локальный базис в тензорах. Компоненты  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  тензора типа  $\binom{p}{q}$  как координаты в локальном базисе. Преобразования компонент тензора при замене локальных координат.

**24.** Определение тензора типа  $\binom{p}{q}$  через закон преобразования компонент при замене локальных координат. Примеры тензоров: векторы, ковекторы, риманова метрика, поле линейных операторов и т.д. Алгебраические операции с тензорами: свертка пары индексов, тензорное умножение тензоров, подъём и опускание индекса.

**25.** Ковариантная производная  $\nabla_X Y$  векторных полей на двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  и её свойства.

**26\***. Связность в векторном расслоении, локальные коэффициенты связности, символы Кристоффеля как локальные коэффициенты связности в касательном расслоении. Продолжение связности с расслоения  $\xi$  на его двойственное расслоение  $\xi^*$ . Продолжение связностей с расслоений  $\xi$  и  $\eta$  на их прямую сумму  $\xi \oplus \eta$  и тензорное произведение  $\xi \otimes \eta$ . Продолжение связности с касательного расслоения  $TM$  на расслоение тензоров  $T_q^p M$ , запись на языке компонент, вывод явной формулы для  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ .

**27.** Ковариантная производная векторных полей, символы Кристоффеля, ковариантная производная тензорных полей (определение через явную формулу для компонент  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ). Проверка того, что  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  является тензором типа  $\binom{p}{q}$ .

**28.** Риманова метрика, риманово многообразие, теорема Леви-Чивиты, связность Леви-Чивиты, явные формулы для неё.

**29\***. Оператор  $R(X, Y)$  кривизны связности в векторном расслоении, линейность  $R(X, Y)s$  по векторным полям  $X, Y$  и сечению  $s$ , кососимметричность по векторным полям  $X$  и  $Y$ .

**30.** Оператор  $R(X, Y)Z$  кривизны связности в касательном расслоении, его линейность по всем трём аргументам. Тензор Римана и его компоненты  $R_{ij,k}^l$ . Тензор Римана с опущенным индексом  $R_{ij,kl}$ . Симметрии тензора Римана.

**31.** Тензор Риччи, его симметричность для связности Леви-Чивиты. Скалярная кривизна. Секционная кривизна в направлении двумерного подпро-

пространства касательного пространства в точке.

**32.** Явная формула для компонент тензора Римана связности Леви-Чивиты через символы Кристоффеля. Явная формула для тензора Римана на двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  через вторую квадратичную форму.

**33.** Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривой на римановом многообразии. Уравнение параллельного переноса. Существование и единственность результата параллельного переноса вдоль заданной кривой. Сохранение длин и углов при параллельном переносе.

**34.** Геодезические на римановом многообразии. Уравнение геодезических. Существование и единственность геодезических. Сохранение длины касательного вектора геодезической.

**35.** Экспоненциальное отображение и его свойства. Теорема Уайтхеда о существовании у каждой точки риманова многообразия такой окрестности, что любые две точки этой окрестности соединяются в ней единственной геодезической.

**36.** Полугеодезические координаты. Свойство геодезической быть локально кратчайшей.