**Задачи для экзамена**
**Дифференциальная геометрия и топология**
**Мехмат МГУ, осень 2015**
**Лектор А.В.Пенской**

*Задачи, отмеченные звёздочкой, необходимо уметь решать претендующим на оценку «отлично».*

**Задача 1.** Доказать, что $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ — регулярная (гладкая) гиперповерхность в пространстве $n \times n$-матриц.

**Задача 2.** Доказать, что $\mathrm{SO}(3)$ — регулярная (гладкая) поверхность в пространстве вещественных $3 \times 3$-матриц.

**Задача 3.** Задать тор вращения как гиперповерхность $f(x,y,z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Регулярная (гладкая) ли эта поверхность?

**Задача 4.** Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций, а другой с помощью параметризаций полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются $x$ и $y$). Эквивалентны ли эти два атласа?

**Задача 5.** Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_3$, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

**Задача 6*.** Множество $k$-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

**Задача 7.** Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

**Задача 8*.** Доказать, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2$.

**Задача 9*.** Множество ортонормированных $k$-реперов с началом в точке $(0,\ldots,0)$ в $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что это гладкое многообразие. Найти размерность. Чему диффеоморфны $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

**Задача 10*.** Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность $U$ точки $p$, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

**Задача 11*.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1,\ldots,f_k$ такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1,\ldots,f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

**Задача 12*.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1,\ldots,f_l$, $l < k$, такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1,\ldots,f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

**Задача 13*.** Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1,\ldots,x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f,\ldots,x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки $p$.

**Задача 14.** Докажите, что если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на многообразии $M$, то $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

**Задача 15.** Проверьте, сохраняется ли коммутатор векторных полей при отображениях многообразий: пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ локальный диффеоморфизм, $X, Y$ векторные поля на $M$, верно ли, что тогда $d\varphi_p[X, Y] = [d\varphi_p X, d\varphi_p Y]$?

**Задача 16.** Пусть $M$ многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как $\iota$ гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем $p$ с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор $X$ в точке $q \in M$ касателен к $N$, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$.

Докажите, что коммутатор двух векторных полей на $M$, касательных к подмногообразию $N$, — тоже векторное поле, касательное к $N$.

**Задача 17.** Рассмотрим на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию $f(x, y, z) = x$. Пусть $u$, $v$ обозначают локальные координаты, соотвествующие стереографической проекции из северного полюса. Найдите координаты дифференциала $df$ в базисе $du$, $dv$ пространства дифференциальных 1-форм (то есть ковекторных полей). Найдите значение этого дифференциала в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ на касательном векторе $w = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$.

**Задача 18$^*$.** Пусть $N \subset M$ подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$, такую, что $\gamma((a, b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}N$ для каждого $t \in (a, b)$.

**Задача 19.** Является ли $\mathrm{SL}(n)$ подмногообразием $\mathrm{GL}(n)$? Вложенным подмногооразием? Погружённым подмногообразием? Аналогичные вопросы для $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n)$.

**Задача 20.** Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где $\alpha$ — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R}, \varphi)$ — плотное подмногообразие в $\mathbb{T}$ (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразие вложенное?

**Задача 21$^*$.** Пусть $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $p = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ множество $f^{-1}(f(p))$ будет вложенным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

**Задача 22$^*$.** Построить пример такой поверхности $\Sigma$ в $\mathbb{R}^n$, что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразием.

**Задача 23.** Найти $d\omega$, если

$$\omega = x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

**Задача 24.** Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$$

а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $(x, y) = f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$.

**Задача 25.** Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про $k$-формы?

**Задача 26.** Записать дифференциальную форму

$$\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

в полярных координатах.

**Задача 27.** Записать дифференциальную форму

$$\omega = \sqrt{x^2+y^2}dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$$

в полярных координатах.

**Задача 28.** Докажите, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие замкнуто. Докажите, что ограничение точной формы на подмногообразие точно.

**Задача 29.** Пусть $\Omega$ дифференциальная $p$-форма, $\omega$ дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что $\Omega$ представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

**Задача 30.** Вычислить интеграл от формы

$$\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Напомним, что если $\iota : N \hookrightarrow M$ — подмногообразие, то под интегралом по $N$ формы $\omega \in \Omega(M)$ подразумевается интеграл по $N$ формы $\iota^*\omega$.

**Задача 31.** Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

где $L$ ориентированный отрезок от точки $(1,2)$ до точки $(2,1)$ в $\mathbb{R}^2$.

**Задача 32.** Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L -x^2 ydx + xy^2 dy,$$

где $L$ окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

**Задача 33.** Вычислить

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

для *любого* контура $L$. Как ответ соотносится с теоремой Стокса?

**Задача 34.** Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ метрику, индуцированную стандартной метрикой на $\mathbb{R}^3$. Найдите с помощью найденной метрики на сфере угол между векторами $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial\psi}$, где $\varphi$, $\psi$ — сферические координаты на сфере, в точке с координатами $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{4}$.

**Задача 35.** Найти форму объёма на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Найти площадь (двумерный объём) двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

**Задача 36.** Доказать, что на $n$-мерном многообразии $M$ существует дифференциальная $n$-форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда $M$ ориентируемо.

**Задача 37*.** Докажите, что форма объема на единичной сфере $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ получается ограничением на неё формы

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Задача 38.** Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

**Задача 39.** Найдите когомологии плоскости без одной точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**Задача 40.** Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

**Задача 41*.** Доказать, что отображение

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{S}^n} \omega$$

задает изоморфизм $H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$.

**Задача 42*.** Найдите когомологии $n$-мерного тора $\mathbb{T}^n$.

**Задача 43*.** Найдите когомологии $\mathbb{S}^n$.

**Задача 44*.** Найдите когомологии $\mathbb{R}P^n$.

**Задача 45*.** Найти когомологии $\mathbb{S}^2$ с $g$ приклееными ручками.

**Задача 46*.** Найти когомологии бутылки Клейна $\mathbb{K}\mathrm{l}$.

**Задача 47*.** Найти когомологии $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (дополнение к незаузленной окружности в трехмерном пространстве).

**Задача 48*.** Найдите когомологии $\mathbb{CP}^n$.

**Задача 49*.** Найти когомологии $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$.

**Задача 50*.** Являются ли тривиальными касательные расслоения $TS^1$, $TS^2$, $TS^3$?

**Задача 51*.** Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение. *Указание: можно рассмотреть, например, лист Мёбиуса как расслоение над окружностью.*

**Задача 52*.** Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их тензорное произведение — тривиальное расслоение. *Указание: можно рассмотреть, например, универсальное расслоение над $\mathbb{R}P^n$.*

**Задача 53*.** Доказать, что нормальное расслоение к двумерной сфере в трёхмерном евклидовом пространстве тривиально. Вывести из этого, что сумма касательного расслоения к двумерной сфере и тривиального расслоения ранга 1 является тривиальным расслоением ранга 3.

**Задача 54.** Пусть $f$ — функция на многообразии $M^n$. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ тензором типа $\binom{0}{2}$, вообще говоря, не является.

**Задача 55.** Пусть $T_{ij}$ тензор типа $(0,2)$ такой, что $\det T_{ij} \neq 0$. Пусть $T^{ij}$ обозначает элементы матрицы, обратной к $T_{ij}$. Доказать, что тогда $T^{ij}$ является тензором типа $(2,0)$.

**Задача 56*.** Найти (с точносью до изоморфизма) все одномерные вещественные расслоения над $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$.

**Задача 57*.** Как связаны универсальное расслоение $\gamma^1$ над $\mathbb{R}P^1$ и лист Мёбиуса, расслоенный над окружностью?

**Задача 58*.** Является ли ориентируемым тривиальное расслоение над $\mathbb{R}P^1$? Является ли ориентируемым универсальное расслоение $\gamma^1$ над $\mathbb{R}P^1$?

**Задача 59.** Пусть $A$ — такое поле линейных операторов на $\mathbb{R}^2$, что в точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ оператор $A(x,y) : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ осуществляет поворот касательной плоскости на угол $x$. Рассмотрим $x^1 = x$ и $x^2 = y$ как координаты и $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$ как базис в векторных полях. Пусть $T^i_j$ — соответствующее тензорное поле. Найдите компоненты этого тензорного поля. Найдите свёртку по верхнему и нижнему индексу.

**Задача 60.** Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ радиуса 1 и сферические координаты $\varphi$, $\psi$. Запишите в этих координатах функцию $f(x,y,z) = x$. Найдите её дифференциал $df$. Это тензор типа $\binom{0}{1}$, какие у него компоненты? Поднимите индекс у этого тензора с помощью канонической метрики на сфере.

**Задача 61.** Рассмотрим евклидову метрику на плоскости. Найдите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты в полярных координатах.

**Задача 62.** Найдите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты для стандартной сферы радиуса 1 в сферических координатах.

**Задача 63.** Для векторного поля $X$ на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где $\nabla$ — связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

**Задача 64.** На лекции согласованность связности с метрикой определялась как выполнение тождества

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$$

для любого вектора $X$ и любых векторных полей $Y, Z$. Доказать, что это определение эквивалентно обращению в ноль ковариантной производной метрического тензора $g_{ij;k} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g)_{ij} = 0$.

**Задача 65.** Доказать, что если связность на римановом многообразии согласована с метрикой, то операции опускания и поднимания индекса у тензора перестановочны с ковариантным дифференцированием.

**Задача 66.** Найти ковариантную производную $\nabla_X dV$ от формы объёма $dV$ для связности Леви-Чивиты.

**Задача 67.** Градиент $\operatorname{grad} f$ функции $f$ — это векторное поле, полученное из дифференциала функции $f$ подниманием индекса. Определим оператор Лапласа-Бельтрами от функции $f$ формулой

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Найдите оператора Лапласа-Бельтрами на евклидовой плоскости в полярных координатах.

**Задача 68.** Пусть даны символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}$ и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ двух связностей $\nabla$ и $\tilde{\nabla}$ на многообразии $M$. Доказать, что их разность $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

**Задача 69*.** Доказать, что $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} X^i)$.

**Задача 70*.** Пусть $M$ — риманово многообразие с римановой метрикой $g$ с компонентами $g_{ij}$. Мы определили тензор $g^{ij}$ типа $\binom{2}{0}$, называемый «метрикой с поднятыми индексами», следующим образом: матрица с матричными элементами $g^{ij}$ является обратной к матрице с элементами $g_{ij}$. Проверьте, что $g^{ij}$ является евклидовой метрикой на кокасательном расслоении $T^*M$. Мы знаем, что связность Леви-Чивиты в касательном расслоении $TM$ риманова многообразия $M$ задаёт связность в кокасательном расслении $T^*M$, то есть ковариантное дифференцирование 1-форм. В $T^*M$ есть евклидова метрика $g^{ij}$. Проверьте, что они согласованы, то есть для любого вектора $X$ и любых 1-форм $\sigma$ и $\tau$ верно тождество $X(\sigma, \tau) = (\nabla_X \sigma, \tau) + (\sigma, \nabla_X \tau)$.

**Задача 71.** Пусть $M$ — многообразие, а $\nabla$ — *произвольная* связность в касательном расслоении $TM$. Определим формулой $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ *кручение* связности $\nabla$. Проверьте, что кручение определяет тензор типа $\binom{1}{2}$, называемый тензором кручения связности $\nabla$. Проверьте, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам. Докажите, что симметричность связности равносильна нулевому кручению.

**Задача 72.** Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество для скалярной кривизны $R = \dfrac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

**Задача 73.** Рассмотрим двумерную поверхность $M$ в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$, и связностью Леви-Чивиты. Пусть $\mathrm{Ric}(X,Y)$ обозначает значение тензора Риччи на паре векторов, то есть $\mathrm{Ric}(X,Y) = R_{ij}X^iY^j$. Пусть $K$ — гауссова кривизна $M$. Доказать, что в данном случае

а) $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\langle X,Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,

б) скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

**Задача 74.** Доказать, что для $n$-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса $r$ с индуцированной метрикой $\langle\,,\rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(< Y,Z > X- < X,Z > Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

**Задача 75.** Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

**Задача 76.** Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой? *Указание: так как на двумерной поверхности параллельный перенос восстанавливается по параллельному переносу некоторого одного начального вектора, то достаточно найти результат параллельного переноса начального вектора, параллельного оси цилиндра.*

**Задача 77.** Как устроен параллельный перенос на круговом конусе? *Указание: как связаны метрики на конусе и его развертке?*

**Задача 78.** На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Найдите ответ, решая дифференциальное уравнение параллельного переноса. Как решить эту задачу, не решая дифференциальное уравнение?

**Задача 79.** Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

**Задача 80.** Доказать, что если прямая лежит на поверхности в евклидовом пространстве, то она будет геодезической на этой поверхности.

**Задача 81.** Найти результат параллельного переноса вектора $(0,1,1)$ из точки $(1,0,0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = 1$ в точку $(1,-1,1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x = 1, \\ y+z = 0. \end{cases}$$

*Указание: воспользуйтесь тем, что прямая на поверхности является геодезической, а поле скоростей геодезической параллельно вдоль неё.*

**Задача 82.** Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Проверьте, что $x + \frac{\dot y}{\dot x}y$ является первым интегралом уравнений геодезических. Выпишите с его помощью уравнение для $\dfrac{dy}{dx}$ и решите его.*

**Задача 83.** Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая — геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

**Задача 84.** Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

**Задача 85.** Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{R}^3$).

**Задача 86.** Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

**Задача 87$^*$.** Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между $r$ и $\alpha$, где $r$ расстояние от точки до оси вращения, а $\alpha$ угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

**Задача 88$^*$.** Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*