

# Дифференциальная геометрия, III курс, осенний семестр 2013–2014 уч.г. Задачи.

С.М.Гусейн-Заде

**Задача 1\***. Является ли подмногообразием плоскости  $\mathbb{R}^2$  интервал  $y = 0, 0 < x < 1$ ? (Осторожно! См. определение.)

**Задача 2\***. Является ли  $GL(n, \mathbb{R})$  подмногообразием в  $(n^2$ -мерном) векторном пространстве матриц размера  $n \times n$ .

**Задача 3**. Доказать, что  $SO(3)$  является подмногообразием в  $(9$ -мерном) векторном пространстве матриц размера  $3 \times 3$ .

**Задача 4\***. Доказать, что  $SO(n)$  является подмногообразиями (вещественно  $2n^2$ -мерного) векторного пространства комплексных матриц размера  $n \times n$ .

**Задача 5\***. Доказать, что  $U(n)$  и  $SU(n)$  являются подмногообразием в  $(2n^2$ -мерном) векторном пространстве комплексных матриц размера  $n \times n$ .

**Задача 6\***. Верно ли, что любое  $k$ -мерное подмногообразие  $M$  пространства  $\mathbb{R}^n$  является множеством решений системы из  $(n - k)$  уравнений  $f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \dots, f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0$ , для которой ранг матрицы  $\text{rk} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a) \right)$  ( $i = 1, \dots, n - k, j = 1, \dots, n$ ) равен  $n - k$  в любой точке  $a \in M$ ?

**Задача 7\***. Доказать, что  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  является гладким многообразием.

**Задача 8**. Доказать, что пространство  $G(k, n)$   $k$ -мерных линейных подпространств в  $\mathbb{R}^n$  является гладким многообразием ( $G(k, n)$  называется Грассмановым многообразием).

**Задача 9\***. Доказать, что  $T \otimes S$  действительно является тензором ( $T$  и  $S$  — тензоры).

**Задача 10\***. Пусть  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$  Доказать, что  $\delta_{ij}$  не является тензором (типа  $(0, 2)$ ).

**Задача 11\*.** Пусть  $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$  Доказать, что  $\delta_j^i$  является тензором типа  $(1, 1)$ . Что за оператор (в касательном пространстве к рассматриваемому многообразию) отвечает этому тензору?

**Задача 12\*.** Пусть  $f$  — функция на многообразии  $M^n$ . Доказать, что  $v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$  вектором, вообще говоря, не является.

**Задача 13\*.** Пусть  $u^i$  и  $v^j$  — вектора (в одной точке). Является ли вектором  $w^i = u^i v^i$ ?

**Задача 14\*.** Пусть  $u^i$  ( $i = 1, 2$ ) — вектор в некоторой точке поверхности. Является ли вектором  $v^i$ , где  $v^1 = -u^2$ ,  $v^2 = u^1$ ?

**Задача 15\*.** Пусть  $f$  — функция на многообразии  $M^n$ . Доказать, что  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$  тензором (типа  $(0, 2)$ ), вообще говоря, не является.

**Задача 16\*.** Пусть  $f$  — функция на многообразии  $M^n$ . Доказать, что в критических точках функции  $f$  (т.е. в точках, в которых  $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$ )  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$  является тензором типа  $(0, 2)$ .

**Задача 17\*.** Пусть  $v^i = v^i(x)$  — векторное поле на многообразии  $M^n$ . Доказать, что  $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$  тензором (типа  $(1, 1)$ ), вообще говоря, не является.

**Задача 18\*.** Пусть  $v^i = v^i(x)$  — векторное поле на многообразии  $M^n$ . Доказать, что  $T^{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$  тензором (типа  $(2, 0)$ ), вообще говоря, не является.

**Задача 19.** Пусть  $u^i = u^i(x)$  и  $v^i = v^i(x)$  — векторные поля на многообразии  $M^n$ . Является ли векторным полем  $w^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$ ?

**Задача 20\*.** Пусть  $\alpha_i = \alpha_i(x)$  — ковекторное поле на многообразии  $M^n$ . Доказать, что  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$  тензором (типа  $(0, 2)$ ), вообще говоря, не является.

**Задача 21\*.** Пусть  $T_{kl}^{ij}$  — тензор типа  $(2, 2)$ . Доказать, что  $\hat{T}_\ell^i = T_{j\ell}^{ij}$  является тензором (типа  $(1, 1)$ ).

**Задача 22.** Доказать, что дифференциальная 2-форма  $x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx + z \cdot dx \wedge dy$  на  $\mathbb{R}^3$  инвариантна относительно всех ортогональных замен координат. Выяснить, как она ведет себя при гомотетиях пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 23.** Пусть  $v^i = v^i(x)$  — векторное поле на многообразии  $M^n$ . Доказать, что в точках, в которых  $v_i$  обращается в ноль,  $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$  является тензором типа  $(1, 1)$ .

**Задача 24.** Пусть  $a_{ij}$  — тензор типа  $(0, 2)$  такой, что  $\det(a_{ij}) \neq 0$ ,  $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$  ( $(a_{ij})$  и  $(a^{ij})$  — соответствующие матрицы). Доказать, что  $a^{ij}$  — тензор типа  $(2, 0)$ .

**Задача 25.** Проверить (или, правильнее, проинтерпретировать), что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями (общей) теоремы Стокса.

**Задача 26.** Доказать, что для функций  $\varphi$  и  $\psi$  на пространстве  $\mathbb{R}^3$  и для ограниченной области  $V \subset \mathbb{R}^3$  имеет место равенство

$$\int \int \int_V (\varphi \Delta \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)) dV = \int \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma.$$

**Задача 27\*.** Доказать, что на любом многообразии существует риманова метрика (т.е. положительно определенный симметричный тензор типа  $(0, 2)$ ).

**Задача 28.** Пусть  $M^k$  — подмногообразие аффинного пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  — гладкая функция на многообразии  $M^k$ . Доказать, что существует гладкая функция  $F$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$  такая, что  $f = F|_{M^k}$ .

**Задача 29.** Пусть  $M^n$  — ориентированное риманово многообразие. Доказать, что  $\sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  ( $x^1, \dots, x^n$  — положительно ориентированная локальная система координат на  $M^n$ ) является (корректно определенной)  $n$ -формой на  $M^n$ .

**Задача 30.** Назовем  $n$ -форму  $\omega$  на  $n$ -мерном многообразии  $M^n$  невырожденной, если в любой локальной системе координат  $x^1, \dots, x^n$  форма  $\omega$  равна  $f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , где функция  $f$  в ноль не обращается. Доказать, что на неориентируемом многообразии не существует невырожденной  $n$ -формы.

**Задача 31.** Верно ли, что на любом многообразии  $M^n$  существует дифференциальная  $n$ -форма, ограничение которой на касательное пространство  $T_x M^n$  в любой точке  $x \in M^n$  не равно нулю?

**Задача 32.** Доказать, что на многообразии  $M^n$  существует дифференциальная  $n$ -форма, ограничение которой на касательное пространство  $T_x M^n$  в любой точке  $x \in M^n$  не равно нулю, тогда и только тогда, когда многообразие  $M^n$  ориентируемо.

**Задача 33\*.** Пусть  $U$  — открытая область в многообразии  $M^n$ ,  $f$  — (бесконечно дифференцируемая) функция на  $U$ . Доказать, что для любого замкнутого множества  $V \subset U$  существует функция  $\tilde{f}$ , определенная на (всем) многообразии  $M^n$  и совпадающая с функцией  $f$  в некоторой окрестности множества  $V$ .

**Задача 34\*.** Пусть  $U$  — открытая область в многообразии  $M^n$ ,  $\omega$  — дифференциальная  $k$ -форма на  $U$ . Доказать, что для любого замкнутого множества  $V \subset U$  существует  $k$ -форма  $\tilde{\omega}$  на многообразии  $M^n$ , совпадающая с формой  $\omega$  в некоторой окрестности множества  $V$ .

**Задача 35\*.** Пусть  $U$  — открытая область в многообразии  $M^n$ ,  $\omega$  — замкнутая (соответственно — точная)  $k$ -форма на  $U$ . Верно ли, что для любого замкнутого множества  $V \subset U$  существует замкнутая (соответственно — точная)  $k$ -форма  $\tilde{\omega}$  на многообразии  $M^n$ , совпадающая с формой  $\omega$  в некоторой окрестности множества  $V$ ?

**Задача 36.** Доказать, что для 1-формы  $\omega$  на многообразии  $M^n$  и для любых векторных полей  $X$  и  $Y$  на  $M^n$  имеет место равенство  $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$ , где  $[X, Y]$  — коммутатор векторных полей  $X$  и  $Y$ .

**Задача 37\*.** Пусть  $M^n$  и  $N^k$  — гладкие многообразия,  $U$  — открытая область в  $M^n$ ,  $f$  — (гладкое) отображение  $U \rightarrow N^k$ . Верно ли, что для любого замкнутого множества  $V \subset U$  существует отображение  $\tilde{f} : M^n \rightarrow N^k$ , совпадающее с  $f$  в некоторой окрестности множества  $V$ ?

**Задача 38\*.** Доказать, что аффинное пространство  $\mathbb{R}^n$  гомотопически эквивалентно точке.

**Задача 39\*.** Доказать, что окружность  $S^1$  гомотопически не эквивалентна точке.

**Задача 40.** Доказать, что двумерная сфера  $S^2$  гомотопически не эквивалентна точке.

**Задача 41.** Вычислить группы когомологий де Рама плоскости без точки  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Задача 42\*.** Вычислить группы когомологий де Рама плоскости без нескольких (конечного числа) точек. Предъявить дифференциальные формы, соответствующие базису в группах когомологий.

**Задача 43.** Вычислить группы когомологий де Рама трехмерного (координатного) пространства без осей координат.

**Задача 44.** Вычислить группы когомологий де Рама двумерной сферы  $S^2$ .

**Задача 45.** Доказать, что двумерная сфера  $S^2$  гомотопически не эквивалентна окружности  $S^1$ .

**Задача 46.** Доказать, что любое замкнутое (компактное без края) ориентируемое многообразие гомотопически не эквивалентно точке.

**Задача 47.** Доказать, что замкнутое ориентируемое многообразие размерности  $n$  гомотопически не эквивалентно замкнутому многообразию размерности  $k$  при  $k < n$ .

**Задача 48\*.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Доказать, что пространство  $X$  гомотопически эквивалентно точке тогда и только тогда, когда тождественное отображение  $id : X \rightarrow X$  ( $id(x) = x$ ) гомотопично отображению в точку.

**Задача 49\*.** Пусть на многообразии  $M^n$  задана гладкая инволюция  $\sigma$  (отображение  $M^n \rightarrow M^n$ , квадрат  $\sigma \circ \sigma$  которого совпадает с тождественным). Пусть  $\sigma^*$  — индуцированное отображение  $H_{dR}^k(M^n) \rightarrow H_{dR}^k(M^n)$ ,  $a$  — элемент группы  $H_{dR}^k(M^n)$ , для которого  $\sigma^*a = a$ . Доказать, что в классе смежности  $a$  существует  $k$ -форма  $\omega$ , для которой  $\sigma^*\omega = \omega$ .

**Задача 50\*.** Пусть на многообразии  $M^n$  задано гладкое действие конечной группы  $G$ . Дифференциал  $G$ -инвариантной форма  $G$ -инвариантен. (Докажите.) Обозначим через  $H_{dR,G}^k(M^n)$  факторпространство  $G$ -инвариантных замкнутых  $k$ -форм по подпространству дифференциалов  $G$ -инвариантных  $(k-1)$ -форм. Доказать, что  $H_{dR,G}^k(M^n)$  изоморфно подпространству группы  $H_{dR}^k(M^n)$ , состоящему из  $G$ -инвариантных классов когомологий.

**Задача 51\*.** Пусть на многообразии  $M^n$  задано гладкое действие окружности  $S^1$  (т.е. непрерывное по  $g \in S^1$  семейство отображение  $\varphi_g : M^n \rightarrow M^n$ , для которого  $\varphi_{g_1 \cdot g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ ),  $a$  — элемент группы когомологий де Рама  $H_{dR}^k(M^n)$ . Доказать, что в классе смежности  $a$  существует  $k$ -форма  $\omega$ , для которой  $\varphi_g^*\omega = \omega$  для всех  $g \in S^1$ .

**Задача 52.** Пусть  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  — замкнутая  $k$ -форма на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Написать явную формулу, определяющую  $(k-1)$ -форму  $\chi$ , для которой  $d\chi = \omega$ .

**Задача 53\*.** Пусть  $\omega = \sum_{i=1}^4 \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^4$  и  $\Omega = \sum_{i_1 < i_2} \Omega_{i_1 i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$  — замкнутые 3- и 2-формы соответственно на  $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$ , где  $\mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^3 = x^4 = 0\}$ . Доказать, что формы  $\omega$  и  $\Omega$  точны и написать явную формулу для формы  $\xi$  такой, что  $d\xi = \omega$ .

**Задача 54\*.** Доказать, что  $H_{dR}^0(M^n)$  — линейное пространство, размерность которого равна количеству связных компонент многообразия  $M^n$ . (Говорят, что две точки  $x$  и  $y$  лежат в одной компоненте связности многообразия  $M^n$ , если их можно соединить путем, т.е. если существует (непрерывное) отображение  $f : I \rightarrow M^n$  отрезка  $I = [0, 1]$  в многообразии  $M^n$  такое, что  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .)

**Задача 55\*.** Пусть  $M^n$  — замкнутое (т.е. компактное без края) ориентированное многообразие,  $int : H_{dR}^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  — отображение, ставящее в соответствие элементу  $a \in H_{dR}^n(M^n)$  интеграл по многообразию  $M^n$  (замкнутой)  $n$ -формы  $\omega$  на многообразии  $M^n$  из класса смежности  $a$ :  $[\omega] = a$ . Доказать, что  $int$  — отображение на.

**Задача 56\*.** Вычислить когомологии  $H_{dR}^k(S^1)$  окружности  $S^1$ .

**Задача 57.** Вычислить все коэффициенты связности  $\Gamma_{pq}^i$  для обычной (тривиальной) связности на плоскости в полярных координатах. Пользуясь этим вычислить дивергенцию  $div v = v_{;i}^i$  в полярных координатах.

**Задача 58\*.** Вычислить все коэффициенты связности  $\Gamma_{pq}^i$  для обычной (тривиальной) связности в пространстве в сферических координатах. Пользуясь этим вычислить дивергенцию  $div v = v_{;i}^i$  в сферических координатах.

**Задача 59\*.** Доказать, что (для связности на многообразии, согласованной с метрикой) дивергенция  $div v = v_{;i}^i$  векторного поля  $v = v(x)$  равна

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i),$$

где  $g = \det(g_{ij})$  — определитель матрицы Грама.

**Задача 60\*.** Доказать, что если  $\Gamma_{pq}^i$  и  $\Gamma_{pq}^{*i}$  — коэффициенты двух аффинных связностей на многообразии  $M^n$ , то  $\Gamma_{pq}^i - \Gamma_{pq}^{*i}$  — тензор.

**Задача 61.** Доказать, что если аффинная связность на римановом многообразии согласована с метрикой, то операция поднимания (опускания) индекса перестановочна с ковариантным дифференцированием.

**Задача 62\*.** Будем говорить, что (риманова) метрика на многообразии  $M^k$  является собственной, если для любой точки  $x_0 \in M^k$  экспоненциальное отображение определено на всем касательном пространстве  $T_{x_0}M^n$  (а не только на окрестности нуля в нем). Доказать, что на любом многообразии существует собственная риманова метрика.

**Задача 63\*.** Доказать, что если аффинная связность на римановом многообразии согласована с метрикой, то операция параллельного переноса векторов вдоль кривой сохраняет скалярное произведение.

**Задача 64\*.** Чему равна ковариантная производная от формы объема (для аффинной связности на ориентированном римановом многообразии, согласованной с метрикой).

**Задача 65.** В каких-либо координатах на двумерной сфере написать уравнения параллельного переноса векторов вдоль "меридиана" и вдоль "параллели" (вообще говоря, не экватора) и найти их решения.

**Задача 66.** Рассматривается поверхность с координатами  $r$  и  $\varphi$ , где  $r > 0$ ,  $\varphi$  — периодическая координата, меняющаяся от 0 до  $2\pi$ , и с метрикой  $ds^2 = dr^2 + \text{sh}^2 r \cdot d\varphi^2$ . Написать уравнение параллельного переноса векторов вдоль кривой  $r = 1$  и вычислить результат обноса вдоль всей кривой (т.е. для  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

**Задача 67\*.** Доказать, что для поверхности в (трехмерном) пространстве скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой.