

Вопросы к экзамену по курсу  
«Дифференциальная геометрия и топология»  
осенний семестр 2011 г.  
лектор И.А.Дынный

1. Замены локальных координат. Касательный вектор. Касательное пространство в точке, его размерность.
2. Касательный вектор как вектор скорости кривой и как дифференцирование по направлению.
3. Определение гладкого векторного поля. Векторное поле как дифференциальный оператор первого порядка.
4. Векторное поле как однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов.
5. Коммутатор векторных полей. Связь с дифференциальными операторами и запись в координатах.
6. Критерий одновременной выпрямляемости векторных полей.
7. Тензор в точке. Размерность пространства тензоров в точке.
8. Гладкое тензорное поле. Операции над тензорными полями: перестановка индексов, тензорное умножение, свертка.
9. Определение ковариантного дифференцирования. Основные свойства и формулы преобразования коэффициентов связности.
10. Пространство связностей, связь с тензорами типа  $(1,2)$ . Тензор кручения.
11. Параллельный перенос векторов и его свойства.
12. Ковариантное дифференцирование произвольных тензорных полей.
13. Тензор кривизны связности.
14. Плоские связности. Критерий существования локальной системы координат, в которой тождественно обнуляются коэффициенты данной связности.

15. Определение гладкого многообразия. Примеры.
16. Задание многообразий системой уравнений в евклидовом пространстве. Подмногообразия.
17. Гладкие отображения гладких многообразий. Дифференциал отображения. Формулировка теоремы Сарда. Прообраз регулярной точки.
18. Риманова метрика на многообразии. Длина кривой. Структура метрического пространства на римановом многообразии.
19. Существование римановой метрики на многообразии.
20. Существование и единственность симметрической связности, согласованной с римановой метрикой.
21. Связность Леви-Чивиты в случае индуцированной метрики на поверхности в трехмерном пространстве.
22. Тензор Римана. Критерий евклидовости римановой метрики.
23. Симметрии тензора Римана.
24. Скалярная кривизна. Совпадение с удвоенной гауссовой кривизной для поверхности в трехмерном пространстве.
25. Геодезические. Экспоненциальное отображение.
26. Теорема о реализации кратчайшего расстояния.
27. Дифференциальные формы. Перенос дифференциальных форм с образа на прообраз при гладких отображениях. Внешнее умножение.
28. Дифференциал дифференциальной формы и его свойства.
29. Интеграл дифференциальной формы по многообразию. Многообразии с краем. Формула Стокса.
30. Теорема Брауэра «о барабане». Теорема «о непричесываемости ежа».