Задачи по курсу «Дифференциальная геометрия и топология»
лектор И.А.Дынников
осенний семестр 2011 г.

1. Доказать, что набор вторых частных производных $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$ произвольной гладкой функции преобразуется как тензор в критических точках функции f и только в них.

2. Найти все тензоры с двумя и четырьмя индексами, координаты которых не зависят от выбора системы координат.

3. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ — две локальных системы координат в области евклидова пространства. Доказать тождество
$$\frac{\partial \left(\det \left\| \frac{\partial x}{\partial y} \right\| \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)}{\partial y^i} = 0.$$

4. Пусть g_{ij} — тензор с двумя нижними индексами, причем матрица (g_{ij}) невырождена. Доказать, что элементы g^{ij} обратной матрицы образуют тензор с двумя верхними индексами.

5. Для невырожденного тензора g_{ij} доказать, что оператор Лапласа–Бельтрами
$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$
корректно определен, т.е. не зависит от выбора системы координат (сводится к задаче 3). Здесь g обозначает $\det \|g_{ij}\|$.

6. Пусть T — тензорное поле типа (p, q), а X — векторное поле. Доказать, что производная Ли $L_X T$ поля T вдоль X, определяемая по формуле
$$(L_X T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = X^k \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} - \frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^k} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \frac{\partial X^{i_2}}{\partial x^k} T^{i_1 k i_3 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \ldots - \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x^k} T^{i_1 \ldots i_{p-1} k}_{j_1 \ldots j_q} +$$
$$+ \frac{\partial X^k}{\partial x^{j_1}} T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_2 \ldots j_q} + \frac{\partial X^k}{\partial x^{j_2}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 k j_3 \ldots j_q} + \ldots + \frac{\partial X^k}{\partial x^{j_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} k},$$
также является корректно определенным тензорным полем типа (p, q).

7. Пусть в области евклидова пространства дана аффинная связность, и относительно нее данное тензорное поле T^i_j ковариантно постоянно. Доказать, что определитель матрицы (T^i_j) постоянен. Доказать, что постоянна и ее жорданова нормальная форма.

8. Дано тензорное поле, компоненты которого не зависят ни от точки, ни от выбора локальной системы координат. Доказать, что оно ковариантно постоянно относительно любой аффинной связности.

9. В окрестности точки $O=(0,0,\ldots,0)$ пространства $\mathbb{R}^n$ дана аффинная связность. Пусть γ — замкнутый контур, идущий по границе квадрата $[0,\varepsilon]\times[0,\varepsilon]\times\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}$ из O в O. Пусть A_ε — матрица параллельного переноса вдоль этого контура. Выразить
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A_\varepsilon-1}{\varepsilon^2}$$
через тензор кривизны данной связности.

10. Для тензора кривизны симметрической связности доказать тождество
$$\nabla_k R^l_{mij}+\nabla_i R^l_{mjk}+\nabla_j R^l_{mki}=0.$$

11. Показать, что подмножество ортогональных матриц A порядка n таких, что $A^2=-1$, образует компактное подмногообразие в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$, и найти размерность этого подмногообразия.

12. Найти число связных компонент группы $O(m,n)$ в зависимости от m и n.

13. При каких n,k многообразие Грассмана $G_{n,k}$ k-мерных плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ ориентируемо?

14. Построить полное метрическое пространство и в нем бесконечную последовательность $B_1,B_2,\ldots$ замкнутых шаров со свойствами:
$$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\ldots,\qquad \bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=\varnothing.$$

15. Доказать, что на ориентированном n-мерном римановом многообразии формула
$$\omega_{i_1i_2\ldots i_n}=\pm\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n},$$
в которой знак «$+$» или «$-$» берется в зависимости от того, согласована ориентация данной карты с ориентацией многообразия или нет, g обозначает определитель матрицы (g_{ij}), а $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ определено по формуле
$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}=\begin{cases}0, & \text{если } \{i_1,\ldots,i_n\}\neq\{1,\ldots,n\},\\ (-1)^\sigma, & \text{если } \sigma=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\ i_1&i_2&\ldots&i_n\end{pmatrix}\end{cases},$$
задает тензорное поле.

16. Пусть $M\subset\mathbb{R}^{n+k}$ — график отображения $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, причем $df|_{(0,\ldots,0)}=0$. Метрика в $\mathbb{R}^{n+k}$ считается стандартной, в качестве локальных координат на M возьмем координаты из $\mathbb{R}^n$. Доказать, что тогда компоненты тензора Римана индуцированной метрики в точке $P=\Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},f(0)\Big)$ вычисляются по формуле
$$R^i_{jkl}\big|_P=\big((f_{ik},f_{jl})-(f_{il},f_{jk})\big)\big|_{(0,\ldots,0)},$$

где скобки обозначают стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

17. Доказать, что гауссова кривизна 4-мерной поверхности в $\mathbb{R}^5$ может быть вычислена через тензор Римана первой квадратичной формы по формуле

$$K = \frac{1}{6}\bigl(R^{12}_{12}R^{34}_{34} - R^{12}_{13}R^{34}_{24} + R^{12}_{14}R^{34}_{23} - R^{13}_{12}R^{24}_{34} + R^{13}_{13}R^{24}_{24} - R^{13}_{14}R^{24}_{23} + \\ + R^{14}_{12}R^{23}_{34} - R^{14}_{13}R^{23}_{24} + R^{14}_{14}R^{23}_{23}\bigr).$$

18. Доказать, что если риманово многообразие полно как метрическое пространство, то любая геодезическая может быть продолжена до бесконечности.

19. Доказать, что параметризованная кривая $\gamma(t) = \exp(tB)$, где B — кососимметрическая матрица порядка n, является геодезической на группе $SO(n)$, в качестве метрики на которой берется индуцированная метрика по отношению к стандартному вложению этой группы в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц порядка n.

20. Для дифференциальной k-формы ω и $k+1$ векторного поля $X_0, \dots, X_k$ доказать тождество

$$(d\omega)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{k=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i}\Bigl(\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k)\Bigr) + \\ + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k),$$

где крышка над аргументом означает, что он пропущен, и $\omega(X_1, \dots, X_k)$ понимается как $\omega_{i_1 \dots i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}$.