

## ПРОГРАММА КУРСА «ГЕОМЕТРИЯ-4», 23/24 у.г.

**1** Топология на множестве. Упорядоченность множества топологий, сравнение топологий. Минимальная топология, порожденная семейством подмножеств. Понятие базы и предбазы; сепарабельность; примеры. Индуцированная топология.

**2** Непрерывные отображения; открытые и замкнутые отображения, гомеоморфизмы. Основные способы задания топологий на множестве : а) с помощью семейства отображений в топологические пространства; б) с помощью семейства отображений топологических пространств в данное множество.

**3** Основные топологические конструкции. Фактор-топология и фактор-пространство; стягивание в точку. Произведение пространств. Цилиндр, конус и надстройка. Операция приклеивания; цилиндр и конус отображения. Примеры.

**4** Понятие связности; связность отрезка. Линейная связность; линейная связность влечет связность; примеры. Образ связного/линейно-связного пространства. Аксиомы отделимости; пример линейно-связного  $T_0$ -пространства, состоящего из двух точек. Теорема о нормальности метрического пространства.

**5** Компактность; компактность замкнутых подмножеств компактного пространства. Замкнутость образа компактного пространства в хаусдорфово пространство; компакт. Компактность метрических пространств.

**6** Свойства прямого произведения с тихоновской топологией. Теорема Александера (без доказательства), теорема Тихонова. Гильбертов куб и его метризации. Пределы обратных спектров (последовательностей). Теорема об обратном спектре компактов. Кольцо целых  $p$ -адических чисел;  $p$ -адический соленоид.

**7** Гомотопия, стягиваемость, ретракция, деформационная ретракция, гомотопическая эквивалентность. Топологии в пространстве отображений: компактно-открытая; топологии поточечной и равномерной сходимости.

**8** Клеточные пространства, аксиомы  $(C)$  и  $(W)$ ; определения и примеры. Скелеты, клеточные отображения, приклеивание клеток. Клеточные разбиения поверхностей. Клеточные разбиения классических пространств : сферы и проективные пространства (вещественные и комплексные).

**9** Основные топологические конструкции для клеточных пространств : произведение; стягивание в точку; приклеивание; цилиндр отображения; конус и надстройка.

**10** Свойства продолжения гомотопии. Теорема Борсука и ее следствия. Существование клеточного пространства с одной вершиной и гомотопически эквивалентного данному клеточному пространству. Теорема о клеточной аппроксимации (без доказательства). Отображения  $S^k$  в  $S^n$  при  $k < n$ ;  $n$ -связность. Существование гомотопически эквивалентного  $n$ -связному клеточному пространству клеточного пространства с одной вершиной и без клеток размерностей  $1 \leq k \leq n$ .

**11** Пространство путей, естественные топологизации и метризации. Композиция путей, ее свойства; гомотопическая ассоциативность. Петли, фундаментальная группа.

Вычисление фундаментальной группы окружности. Роль базисной точки. Фундаментальные группы клеточного пространства и его 2-скелета.

**12** Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением. Теорема о ретракции; фундаментальная группа произведения пространств. Фундаментальная группа – гомотопический инвариант пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке (доказательство в размерности 2).

**13** Теорема Гауса ("основная теорема алгебры"). Фундаментальные группы конечных клеточных пространств – редукция к фундаментальным группам двумерных клеточных комплексов с одной першиной. Копредставления групп. Свободная группа. Канонические копредставления групп поверхностей.

**14** Свободное произведение групп, свойство универсальности. Группа  $PSL(2, \mathbb{Z})$  и ее действие на верхней полуплоскости. Задание этой группы двумя образующими : порядка 2 и бесконечного порядка; порядков 2 и 3. Представление  $PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ .

**15** Пример двух стягиваемых пространств таких, что фундаментальная группа их букета несчетна. Теорема Зейферта-ван Кампена. Доказательство для случая клеточных пространств. Разложение группы  $SL(2, \mathbb{Z})$  в произведение с объединенной подгруппой.

**16** Накрытия, определение и примеры; число листов. Пример: накрытие тора  $T^2$  им самим, заданное матрицей  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ . Поднятие пути; теорема о накрывающей гомотопии; фундаментальная группа накрытия и ее образ в фундаментальной группе пространства. Число листов и классы сопряженных подгрупп.

**17** Регулярные накрытия; Вполне разрывное действие дискретной группы гомеоморфизмов на связном локально-компактном пространстве и индуцируемое им накрытие. Примеры (поверхность Хопфа). Соответствие накрытий над "хорошим" пространством (связным, локально линейно связным и локально-односвязным) и подгруппами его фундаментальной группы. Универсальное накрытие; эквивалентность накрытий и единственность универсального накрытия. Примеры.

**18** Дифференциальные формы на гладком многообразии. Ориентируемость, ориентация. Существование положительно ориентированного (положительно согласованного) атласа. Примеры ориентируемых и неориентируемых многообразий.

**19** Внешний дифференциал и его свойства. Когомологии де Рама; пример вычисления когомологий. Отображение когомологий индуцированное гдладким отображением. Ориентация многообразий с краем и согласованная ориентация края. Теорема Стокса.

**20** Потоки на гладком многообразии. Примеры потоков, геометрические потоки. Дифференциал потока, гомологии де Рама. Спаривание гомологий и когомологий; теорема де Рама. Фундаментальный класс ориентируемого многообразия.

**21** Масса и ко-масса, их зависимость от исходной римановой метрики. Масса фундаментального класса. Оценка абсолютной величины спаривания гомологий и когомологий через массу и ко-массу.

**22** Степень гладкого отображения ориентируемых многообразий. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Теорема Сарда (без доказательства). Целочисленность степени и ее независимость от выбора регулярного значения.

**23** Кобордизмы. Степень кобордантных отображений; гомотопическая инвариантность степени. Важность ориентируемости пленки; пример. Степень mod 2; ее инвариантность при кобордантности отображений, гомотопическая инвариантность. Независимость  $\deg_2$  от выбора регулярного значения.

**24** Степень для непрерывных отображений. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Гомотопическая эквивалентность "достаточно близких" отображений гладких многообразий.

**25** Особые точки векторных полей, понятие индекса изолированной особой точки; независимость индекса особой точки от выбора локальной системы координат. Примеры вычисления индекса в 2-мерном случае. Векторные поля в области  $\mathbb{R}^m$  с гладкой границей; теорема Хопфа. Связь с теоремой Гауса-Боне для поверхностей вложенных в  $\mathbb{R}^3$ .