Вариант 0

1. Найти кривизну и кручение кривой

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t, t, e^{2t}).$$

2. Пусть кривая γ параметризована натуральным параметром s, $\mathbf{b}$ — ее бинормаль, а k и $\varkappa$ ее кривизна и кручение. Выразите отношение

$$\frac{\left(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)}$$

через кривизну и кручение кривой γ.

3. Проверить, что на плоскости с координатами (x, y) матрично-значная функция

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2+y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2+y^2)^4 \end{pmatrix}$$

задает некоторую метрику в единичном круге. В этой метрике найти длину кривой $x^2+y^2 = \alpha$ при постоянном и положительном α.

4. Найдите главные радиусы кривизны поверхности $y = x \operatorname{tg} \dfrac{z}{a}$.

5. В геометрии Лобачевского (модель в верхней полуплоскости) найти площадь треугольника, ограниченного кривыми

$$x = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

6. Найти геодезическую кривизну параллели $z = z_0, z_0 > 1$ на гиперболоиде $x^2+y^2-z^2 = -1$.

7. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе на плоскости с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$ вдоль кривой $\theta = const$?

Решения

1. Найти кривизну и кручение кривой

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t, t, e^{2t}).$$

Решение. Кривизна $k(t)$ и кручение $\varkappa(t)$ кривой, заданной параметрически в виде $\mathbf{r}(t)$, могут быть найдены по формулам

$$k(t) = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \qquad \varkappa(t) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}.$$

В нашем случае $\dot{\mathbf{r}} = (2e^t, 1, 2e^{2t})$, $\ddot{\mathbf{r}} = (2e^t, 0, 4e^{2t})$ и $\dddot{\mathbf{r}} = (2e^t, 0, 8e^2t)$. Для нахождения кривизны нам необходимы длина вектора скорости кривой $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{4e^{2t} + 1 + 4e^{4t}} = 2e^{2t} + 1$ и длина векторного произведения вектора скорости и вектора ускорения кривой. Само векторное произведение имеет вид

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2e^{2t} & 2e^t \\ 4e^{2t} & 2e^t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2e^t & 1 \\ 2e^t & 0 \end{vmatrix} \right) = (4e^{2t}, -4e^{3t}, -2e^t),$$

а его длина равна $\sqrt{16e^{4t} + 16e^{6t} + 4e^{2t}} = 2e^t(e^{2t} + 1)$. Следовательно, $k(t) = \dfrac{2e^t}{(e^{2t} + 1)^2}$. Для вычисления кручения нам еще необходимо смешанное произведение $(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = ([\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dddot{\mathbf{r}}) = 4e^{2t} \cdot 2e^t + (-4e^{3t}) \cdot 0 + (-2e^t) \cdot 8e^{2t} = -8e^{3t}$. И тогда кручение имеет вид $\varkappa(t) = -\dfrac{2e^t}{(e^{2t} + 1)^2}$.

Ответ. $k(t) = \dfrac{2e^t}{(e^{2t} + 1)^2}$, $\varkappa(t) = -\dfrac{2e^t}{(e^{2t} + 1)^2}$.

2. Пусть кривая γ параметризована натуральным параметром s, $\mathbf{b}$ — ее бинормаль, а k и $\varkappa$ ее кривизна и кручение. Выразите отношение

$$\frac{\left(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b} \right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)}$$

через кривизну и кручение кривой γ.

Решение. Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ обозначают вектор скорости и вектор нормали кривой γ. Тогда верны формулы Френе для производных по натуральному параметру:

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\varkappa\mathbf{n} \end{cases}.$$

Тогда числитель дроби из условия принимает вид

$$(\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''') = \big(-\varkappa\mathbf{n}, (-\varkappa\mathbf{n})', (-\varkappa\mathbf{n})''\big). \tag{1}$$

С помощью второго равенства из формул Френе вычислим производную $(-\varkappa\mathbf{n})' = -\varkappa'\mathbf{n} - \varkappa\mathbf{n}' = k\varkappa\mathbf{v} - \varkappa'\mathbf{n} - \varkappa^2\mathbf{b}$; тогда последняя компонента из смешанного произведения (1) равна

$$\begin{aligned} (k\varkappa\mathbf{v} - \varkappa'\mathbf{n} - \varkappa^2\mathbf{b})' &= (k\varkappa)'\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{v}' - \varkappa''\mathbf{n} - \varkappa'\mathbf{n}' - (\varkappa^2)'\mathbf{b} - \varkappa^2\mathbf{b}' = \\ &= \big(k'\varkappa + 2k\varkappa'\big)\mathbf{v} + \big(k^2\varkappa - \varkappa'' + \varkappa^3\big)\mathbf{n} - 3\varkappa\varkappa'\mathbf{b}, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве опять же использовались формулы Френе.

Подставляя эти выражения в формулу (1), получаем

$$(\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''') = \Big(-\varkappa\mathbf{n}, k\varkappa\mathbf{v} - \varkappa'\mathbf{n} - \varkappa^2\mathbf{b}, \big(k'\varkappa + 2k\varkappa'\big)\mathbf{v} + \big(k^2\varkappa - \varkappa'' + \varkappa^3\big)\mathbf{n} - 3\varkappa\varkappa'\mathbf{b}\Big) =$$

$$= (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & -\varkappa & 0 \\ k\varkappa & -\varkappa' & -\varkappa^2 \\ k'\varkappa + 2k\varkappa' & k^2\varkappa - \varkappa'' + \varkappa^3 & -3\varkappa\varkappa' \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\varkappa\big(k\varkappa(-3\varkappa\varkappa') - (-\varkappa^2)(k'\varkappa + 2k\varkappa')\big)\Big) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = (k'\varkappa^4 - k\varkappa^3\varkappa') \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}).$$

Кроме того, векторы $\mathbf{v}, \mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ образуют положительно ориентированный ортонормированный базис, а значит последнее выражение равно

$$k'\varkappa^4 - k\varkappa^3\varkappa' = \varkappa^5 \cdot \frac{k'\varkappa - k\varkappa'}{\varkappa^2} = \varkappa^5 \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)$$

и ответом в данной задаче будет $\varkappa^5$.

Ответ. $\varkappa^5$.

3. Проверить, что на плоскости с координатами (x, y) матрично-значная функция

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2+y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2+y^2)^4 \end{pmatrix}$$

задает некоторую метрику в единичном круге. В этой метрике найти длину кривой $x^2+y^2 = \alpha$ при постоянном и положительном α.

Решение. Обозначим данную матрично-значную функцию через $G(x, y)$. Данная симметричная функция G задает метрику тогда и только тогда, когда ее матрица положительна определена во всех точках, кроме нескольких изолированных особых точек; положительная определенность во всех точках, кроме точки $(0, 0)$, легко проверяется с помощью критерия Сильвестра.

В случае, если кривая задана в параметрическом виде $\gamma(t) = (x(t), y(t)))$ при $t \in [a, b]$, то ее длина равна

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(\dot{x}(t) \quad \dot{y}(t))G(t)\begin{pmatrix}\dot{x}(t) \\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}}dt,$$

где $G(t) = G(x(t), y(y))$ — матрица, задающая метрику.

В нашем случае кривую можно параметризовать в виде $x = \sqrt{\alpha}\cos t, y = \sqrt{\alpha}\sin t$ при $t \in [0, 2\pi]$, тогда

$$G(t) = \frac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} 4\alpha\cos^2 t + \alpha^4 & 4\alpha\cos t\sin t \\ 4\alpha\cos t\sin t & 4\alpha\sin^2 t + \alpha^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^3}\begin{pmatrix} 4\cos^2 t + \alpha^3 & 4\cos t\sin t \\ 4\cos t\sin t & 4\sin^2 t + \alpha^3 \end{pmatrix},$$

а $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-\alpha\sin t, \alpha\cos t)$.

После подстановки указанных выше значений в выражение для длины кривой γ получаем

$$\ell(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-\alpha\sin t \quad \alpha\cos t) \cdot \frac{1}{\alpha^3}\begin{pmatrix} 4\cos^2 t + \alpha^3 & 4\cos t\sin t \\ 4\cos t\sin t & 4\sin^2 t + \alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\alpha\sin t \\ \alpha\cos t\end{pmatrix}}dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\alpha}(-\sin t \quad \cos t) \cdot \begin{pmatrix}-\alpha^3\sin t \\ \alpha^3\cos t\end{pmatrix}}dt = \int\limits_0^{2\pi} \alpha dt = 2\pi\alpha.$$

Ответ. $2\pi\alpha$.

4. Найдите главные радиусы кривизны поверхности $y = x \operatorname{tg} \dfrac{z}{a}$.

Решение. Вначале заметим, что если мы рассмотрим цилиндрическую систему координат, то $x = u\cos v, y = u\sin v$, а $z = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = av$, то есть наша поверхность является геликоидом.

Для нахождения главных кривизн найдем первую и вторую квадратичные формы поверхности (главные радиусы кривизны это числа обратные к главным кривизнам). Параметрическое уравнение поверхности имеет вид $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$. Имеем, $\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$ и $\mathbf{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$. Первая квадратичная форма составлена из скалярных произведений этих векторов:

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2+u^2 \end{pmatrix}.$$

Вторая квадратичная форма составлена из скалярных произведений вектора нормали к поверхности с векторами вторых производных по координатам. Вектор нормали может быть найден как нормированное векторное произведение векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, то есть

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\big|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\big|} = \frac{(a\sin v, -a\cos v, u)}{\sqrt{a^2\sin^2 v + a^2\cos^2 v + u^2}} = \frac{\big(a\sin v, -a\cos v, u\big)}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Векторы вторых производных параметрического уравнения поверхности имеют вид: $\mathbf{r}_{uu} = (0,0,0)$, $\mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\mathbf{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$. Вторая квадратичная форма принимает вид:

$$B(u,v) = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) \\ (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) & (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Главные кривизны поверхности это корни уравнения $\det(B - \lambda G) = 0$. Левая часть имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} & -\lambda(a^2+u^2) \end{pmatrix} = \lambda^2(a^2+u^2) - \frac{a^2}{a^2+u^2}.$$

Следовательно главные кривизны это $\lambda_{1,2} = \pm\frac{a}{a^2+u^2}$, а главные радиусы кривизны $R_{1,2} = \pm\frac{a^2+u^2}{a}$, или в начальных координатах в пространстве $R_{1,2} = \pm\frac{a^2+x^2+y^2}{a}$.

Замечание. Можно производить вычисления и в начальных координатах, выбрав, например, в качестве переменных параметризации x и z (y уже через них выражена). В этом случае решение будет отличаться только более громоздкими вычислениями.

Ответ. $R_{1,2} = \pm\dfrac{a^2+x^2+y^2}{a}$.

5. В геометрии Лобачевского (модель в верхней полуплоскости) найти площадь треугольника, ограниченного кривыми

$$x = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Решение 1. Площадь треугольника на плоскости Лобачевского равна π минус сумма углов, поэтому нам достаточно найти углы этого треугольника. Вначале найдем координаты его вершин. Первые две кривые пересекаются в точке $A(0,\sqrt{3})$, первая и третья — в точке $B(0,3)$, вторая и третья — в точке $C(3,0)$ (нас интересуют общие точки только в верхней полуплоскости).

Углы на плоскости Лобачевского в модели в верхней полуплоскости совпадают с углами между соответствующими окружностями (прямыми и окружностями) на обычной евклидовой плоскости. Окружности $(x-1)^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=9$ касаются в точке C, а значит $\angle C = 0$. Прямая $x=0$ проходит через центр окружности $x^2+y^2=9$, а значит в точке пересечения образует с ней угол $\frac{\pi}{2}$. Следовательно $\angle B = \frac{\pi}{2}$. Угол A это угол между прямой $x=0$ и касательной к окружности $(x-1)^2+y^2=4$ в точке A. Этот угол дополняет до $\frac{\pi}{2}$ угол между радиусом PA этой окружности и прямой $x=0$ (см. рис. 1). Последний угол легко находится из прямоугольного треугольника KPA и равен $\frac{\pi}{6}$, а значит $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Итого площадь треугольника ABC равна $\pi - \angle A - \angle B - \angle C = \frac{\pi}{6}$.

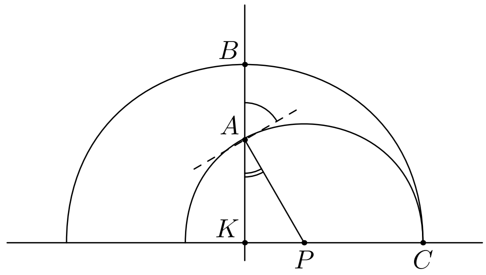

Рис. 1: Треугольник ABC

Решение 2. Площадь области на поверхности может быть найдена с помощью интеграла от корня из определителя первой квадратичной формы по этой области, то есть

$$S(D) = \iint\limits_D \sqrt{\det G(u,v)}dudv.$$

Для плоскости Лобачевского в модели в верхней полуплоскости $(x,y), y>0$ метрика имеет вид $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$ и $\sqrt{\det G(x,y)} = \frac{1}{y^2}$. Следовательно площадь нашего треугольника D равна $S(D) = \iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$, что после перехода к повторному интегралу (см. рис. 2) дает выражение

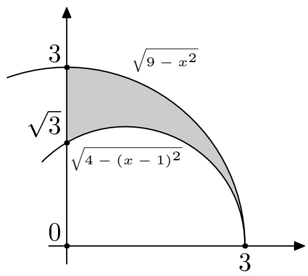

Рис. 2: Переход к повторному интегралу

$$S(D) = \int\limits_0^3 \int\limits_{\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{y^2}dydx = \int\limits_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx =$$

$$= \left(\arcsin\frac{x-1}{2} - \arcsin\frac{x}{3}\right)\Big|_0^3 = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

6. Найти геодезическую кривизну параллели $z=z_0, z_0>1$ на гиперболоиде $x^2+y^2-z^2=-1$.

Решение. Геодезическая кривизна кривой на поверхности равна длине проекции вектора ее главной нормали (с учетом длины, так как обычно нормаль единичной длины) на касательную плоскость к поверхности. В нашем случае кривая является окружностью в плоскости $z=z_0$ с центром $(0,0,z_0)$ и радиусом $R=\sqrt{z_0^2-1}$. Все точки окружности равнозначны и имеют одинаковую геодезическую кривизну, так как и сам гиперболоид, и окружность переходят в себя при вращении относительно оси z. Поэтому мы найдем геодезическую кривизну только для точки $A=(\sqrt{z_0^2-1}, 0, z_0)$ нашей окружности.

Главная нормаль окружности направлена по ее радиусу и имеет длину, равную $1/R$, то есть $\mathbf{n}_\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{z_0^2-1}}, 0, 0\right)$. Вместо того, чтобы искать длину проекции на касательную плоскость, мы найдем длину проекции на нормаль к поверхности; тогда длина проекции на касательную плоскость получится из теоремы Пифагора. Единичная нормаль к поверхности в точке A имеет вид $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2z_0^2-1}}(\sqrt{z_0^2-1}, 0, -z_0)$ и длина проекции вектора $\mathbf{n}_\gamma$ на нее равна модулю скалярного произведения $|(\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{n})| = \frac{1}{\sqrt{2z_0^2-1}}$. Тогда геодезическая кривизна равна

$$k_g = \sqrt{\mathbf{n}_\gamma^2 - (\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{z_0^2-1} - \frac{1}{2z_0^2-1}} = \frac{z_0}{\sqrt{(z_0^2-1)(2z_0^2-1)}}.$$

Ответ. $\frac{z_0}{\sqrt{(z_0^2-1)(2z_0^2-1)}}$.

7. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе на плоскости с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$ вдоль кривой $\theta = \mathrm{const}, \varphi \in [0, 2\pi]$?

Решение 1. Уравнение параллельного переноса вектора (x^1, x^2) вдоль кривой $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ записывается в виде $\dot{x}^i + \Gamma^i_{jk} x^j \dot{\gamma}^k = 0$. Найдем символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right)$$

для нашей метрики, где g_{pq} — метрика, а g^{pq} — обратная к ней матрица; первой переменной мы будем считать θ, а второй φ.

Нас интересуют только ненулевые символы Кристоффеля. Если $i = 1$, то m тоже должно быть равно 1 (так как $g^{12} = 0$) и первые два слагаемых в скобках нулевые. Последнее слагаемое ненулевое только если $j = k = 2$. Тогда $g^{11} = 1$, $g_{22} = \operatorname{sh}^2\theta$ и $\Gamma^1_{22} = -\operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\theta$.

Если $i = 2$, то m опять же 2 и третье слагаемое в скобках точно нулевое, так как g_{pq} не зависит от φ. Из параметров j и k один должен быть равен 1, а второй — 2, так как иначе выражение в скобках нулевое. Итого $g^{22} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta}$.

Данную кривую можно параметризовать как $\gamma(t) = (\theta_0, t)$, тогда $\dot{\gamma}^1 = 0$ и $\dot{\gamma}^2 = 1$. Уравнения параллельного переноса по этой кривой принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 - \operatorname{sh}\theta_0 \operatorname{ch}\theta_0 x^2 = 0 \\ \dot{x}^2 + \frac{\operatorname{ch}\theta_0}{\operatorname{sh}\theta_0} x^1 = 0 \end{cases}.$$

. Решением является следующее семейство векторов $x^1(t) = C_1 \sin(t \operatorname{ch}\theta_0) + C_2 \cos(t \operatorname{ch}\theta_0)$, $x^2(t) = \dfrac{C_1}{\operatorname{sh}\theta_0} \cos(t \operatorname{ch}\theta_0) - \dfrac{C_2}{\operatorname{sh}\theta_0} \sin(t \operatorname{ch}\theta_0)$. В качестве начального вектора мы можем взять любой вектор (с любыми константами C_1 и C_2); мы возьмем $C_1 = 1, C_2 = 0$, тогда $\mathbf{x}(0) = \big(x^1(0), x^2(0)\big) = \left(0, \frac{1}{\operatorname{sh}\theta_0}\right)$ и $\mathbf{x}(2\pi) = \big(x^1(2\pi), x^2(2\pi)\big) = \left(\sin(2\pi \operatorname{ch}\theta_0), \frac{\cos(2\pi \operatorname{ch}\theta_0)}{\operatorname{sh}\theta_0}\right)$.

Косинус угла поворота это косинус угла между начальным и итоговым вектором, который может быть найден из отношения скалярного произведения этих векторов к произведению их длин в метрике нашей поверхности. В нашем случае длина начального (а значит и конечного!) очевидно равна 1, а значит достаточно просто посчитать скалярное произведение.

$$\cos\alpha = (\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(2\pi)) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\operatorname{sh}\theta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2\pi \operatorname{ch}\theta_0) \\ \frac{\cos(2\pi \operatorname{ch}\theta_0)}{\operatorname{sh}\theta_0} \end{pmatrix} = \cos(2\pi \operatorname{ch}\theta_0).$$

Значит $\alpha = 2\pi k \pm 2\pi \operatorname{ch}\theta_0$. При $\theta_0 = 0$ (вообще так говорить не совсем корректно, так как в точке (0,0) метрика не положительно определена) кривой нет, а значит и вектор не поворачивается, то есть $k = 1$ и $\alpha = \pm 2\pi(1 - \operatorname{ch}\theta_0)$. При этом знак будет зависеть от того, в какую сторону мы направим нормаль к поверхности.

Замечание. В "обычном" случае, когда мы смотрим на плоскость "сверху" так, что угол φ возрастает при движении против часовой стрелки, координата $x^2(t)$ переносимого вектора убывает, так как при $t = 0$ она равна максимальна. Вторая координата соответствует переменной φ, а значит вектор поворачивается по часовой стрелке и в итоге поворот осуществляется на отрицательный угол, то есть $\alpha = 2\pi(1 - \operatorname{ch}\theta_0)$.

Решение 2. Угол поворота при параллельном переносе вектора по кривой может быть найден с помощью интеграла от Гауссовой кривизны по области, которую эта кривая ограничивает. Хотя Гауссова кривизна и выражается только лишь через метрику, но это сделать не так и просто, поэтому мы найдем известную поверхность на которой реализуется такая метрика.

В качестве такой поверхности нам подойдет верхняя половина двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, параметризованного переменными такими u и v, что $x = \operatorname{sh}\theta\cos\varphi$, $y = \operatorname{sh}\theta\sin\varphi$ и $z = \operatorname{ch}\theta$. Однако, если мы рассмотрим обычную индуцированную метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то мы не получим нужной метрики, так как в этом случае $ds^2 = (\operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta)d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$. Но метрика, индуцированная квадратичной формой $dx^2 + dy^2 - dz^2$, даст нужную нам метрику $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$. Верхняя половина двуполостного гиперболоида с метрикой, индуцированной $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$, является одной из реализаций плоскости Лобачевского. Значит наша поверхность изометрична плоскости Лобачевского и нам нужно узнать угол поворота при переносе по ней.

Гауссова кривизна плоскости Лобачевского равна -1. Область, ограниченная кривой $\theta = \theta_0$, на плоскости (θ, φ) является кругом D радиусом θ_0 с центром в начале координат. Следовательно

$$\alpha = \iint\limits_D K ds = -\iint\limits_D ds = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\theta_0} \operatorname{sh}\theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \operatorname{ch}\theta_0).$$

Ответ. $\alpha = 2\pi(1 - \operatorname{ch}\theta_0)$.