**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 0.**
**Дифференциал, теорема о неявной функции, теорема об обратной функции.**

**Задача 1.** Написать определение производной, частной производной, дифференциала функции нескольких переменных и дифференциала отображения $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Матрицей дифференциала в каком базисе является матрица Якоби?

**Задача 2.** Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Найти частные производные $F^1$ и $F^2$ по $x$, $y$. Написать матрицу Якоби.

**Задача 3*.** Пусть $J$ фиксированная диагональная матрица $n \times n$. Рассмотрим функцию $f$ на пространстве квадратных матриц $n \times n$, заданную формулой

$$f(X) = \operatorname{tr}(XJX^T).$$

Найти значение $d_X f(H)$ дифференциала $df$ на «приращении» $H$ в точке $X$.

**Задача 4.** Написать формулировку теоремы о неявной функции.

**Задача 5.** Рассмотрим окружность, заданную неявным образом как множество точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 1$. В каких точках выполняются условия теоремы о неявной функции, дающие возможность найти $y(x)$? Найти выражения для $y(x)$ явно. Сделать то же самое для. $x(y)$.

**Задача 6.** Рассмотрим сферу, заданную неявным образом как множество точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. В каких точках выполняются условия теоремы о неявной функции, дающие возможность найти $z(x, y)$? Найти выражения для $z(x, y)$ явно.

**Задача 7.** Вывести из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции.

**Задача 8.** Найти с помощью теоремы об обратной фукнции производную $\arcsin x$.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 1.**
**Плоские гладкие регулярные параметризованные кривые.**
**Натуральный параметр. Кривизна. Репер и формулы Френе.**

**Задача 1.** Рассмотрим кривую

$$x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3$$

Является ли параметр $t$ натуральным? Найти кривизну кривой в точке $(x(1), y(1))$.

**Задача 2.** Найти кривизну эллипса с полуосями $a$ и $b$ в его вершинах.

**Задача 3.** Найти кривизну графика функции $y = -\ln\cos x$ в произвольной точке.

**Задача 4.** Доказать, что кривизна плоской кривой равна нулю тогда и только тогда, когда это прямая.

**Задача 5.** Рассмотрим циклоиду

$$\gamma(t) = \left(a(t - \sin t),\, a(1 - \cos t)\right).$$

Найти натуральный параметр.

**Задача 6.** Рассмотрим плоскую кривую $\gamma(s)$ в натуральной параметризации. Пусть для данного $s$ при достаточно малых $\varepsilon$ три точки $\gamma(s-\varepsilon)$, $\gamma(s)$, $\gamma(s+\varepsilon)$ не лежат на одной прямой. Доказать, что через них проходит единственная окружность. Обозначим её радиус через $R(s, \varepsilon)$. Найти

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{R(s, \varepsilon)}.$$

**Задача 7.** Пусть кривая задана параметрически в *полярной* системе координат:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Как найти её кривизну?

**Задача 8.** Найти кривизну кривой, заданной в полярных координатах как $r = a\,\varphi^k$.

**Задача 9.** Пусть кривая является решением дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Как найти её кривизну?

**Задача 10*.** Доказать, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 2. Гладкие регулярные параметризованные кривые в трёхмерном пространстве. Кручение. Репер и формулы Френе. Натуральные уравнения кривых. Неявно заданные плоские кривые.**

**Задача 1.** Найти кривизну и кручение кривой $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

**Задача 2.** Пусть $R > 0$ и $h \neq 0$ две постоянные. Рассмотрим винтовую линию

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, ht).$$

Параметризовать её натуральным параметром. Найти кривизну и кручение. Найти явно репер Френе.

**Задача 3.** a) Описать кривые с постоянными кривизной и кручением, то есть найти кривые, заданные натуральными уравнениями

$$k(s) = k_0, \quad \varkappa(s) = \varkappa_0,$$

где $k_0 > 0$ и $\varkappa_0$ некоторые константы. b) Найти плоскую кривую, заданную натуральным уравнением $k = \frac{1}{s}$. c) Найти натуральное уравнение графика функции $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.

**Задача 4.** Найти кривизну окружности $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ по формуле для кривизны неявно заданной кривой.

**Задача 5.** Доказать, что a) если кривизна пространственной кривой тождественно равна нулю, то это прямая; b) если кручение кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в плоскости; c) кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

**Задача 6.** Для какой функции $f(t)$ кривая

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, f(t))$$

является плоской?

**Задача 7.** Рассмотрим кривую $\gamma(s)$ в ориентированном трёхмерном пространстве с натуральным параметром $s$. Фиксируем некоторое значение $s_0$ параметра. Найти главные члены в разложении в ряд по степеням $s - s_0$ проекций кривой на плоскости, порождённые $v(s_0), n(s_0)$ (соприкасающаяся плоскость), $n(s_0), b(s_0)$ (нормальная плоскость), $v(s_0), b(s_0)$ (спрямляющая плоскость).

**Задача 8*.** Доказать, что если кривая с $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ лежит на сфере радиуса $R$, то

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right), \tag{1}$$

где $'$ обозначает производную по отношению к натуральному параметру. Доказать, что если ещё и $k' \neq 0$, то и обратное верно: из тождества (1) следует, что кривая лежит на некоторой сфере радиуса $R$.

**Задача 9*.** Рассмотрим гладкую регулярную кривую $\mathbf{r}(s)$ в натуральной параметризации в $n$-мерном ориентированном евклидовом пространстве. Рассмотрим векторы

$$\mathbf{v}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(s), \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}(s), \ldots, \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\mathbf{r}(s).$$

Пусть точка $\mathbf{r}(s)$ такова, что эта система векторов линейно независима. Тогда мы можем ортогонализовать эту систему, используя алгоритм ортогонализации по Граму-Шмидту, и отнормировать затем полученные векторы так, чтобы их длина стала равной единице. Мы получим ортонормированную систему из $n-1$ вектора, которые мы обозначим через $\mathbf{g}_1(s), \ldots, \mathbf{g}_{n-1}(s)$. Чтобы получить *положительно ориентированный* ортонормированный базис, дополним эту систему единственно возможным вектором $\mathbf{g}_n(s)$. Эта процедура аналогична построению бинормали в трёхмерном случае. Ортонормированный репер $(\mathbf{r}(s); \mathbf{g}_1(s), \ldots, \mathbf{g}_n(s))$ называют репером Френе кривой $\mathbf{r}(s)$. Доказать, что верны формулы Френе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\mathbf{g}_1(s) = k_1(s)\mathbf{g}_2(s), \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{d}{ds}\mathbf{g}_i(s) = -k_{i-1}(s)\mathbf{g}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{g}_{i+1}(s), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{d}{ds}\mathbf{g}_n(s) = -k_{n-1}(s)\mathbf{g}_{n-1}(s), \end{cases} \tag{2}$$

где $k_1(s) = k(s)$ кривизна кривой, а $k_2(s), \ldots, k_{n-1}(s)$ некоторые функции от $s$. Величины $\varkappa_1(s) = k_2(s), \ldots, \varkappa_{n-2}(s) = k_{n-1}(s)$ называются (высшими) кручениями.

**Задача 10*.** Рассмотрим кривую $\mathbf{r}(s)$ в $n$-мерном ориентированном евклидовом пространстве, параметризованную произвольным параметром $t$. Пусть $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ обозначает объём $k$-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, при $k < n$ и ориентированный объём $k$-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, при $k = n$. Пусть

$$V_i = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \ldots, \frac{d^i\mathbf{r}}{dt^i}\right).$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2}V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 3. Гладкие регулярные параметризованные и неявно заданные поверхности в трёхмерном пространстве. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма.**

**Задача 1.** Рассмотрим сферу

$$x = \cos\varphi\cos\theta, \quad y = \sin\varphi\cos\theta, \quad z = \sin\theta,$$

точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ и вектор $X = (0, 1, 0)$. Доказать, что вектор $X$ касательный к сфере в точке $P$. Найти локальные координаты $\varphi_0, \theta_0$ точки $P$ и координаты вектора $X$ в базисе $\mathbf{r}_\varphi(\varphi_0, \theta_0), \mathbf{r}_\theta(\varphi_0, \theta_0)$. Найти первую квадратичную форму. Найти с её помощью длину $X$.

**Задача 2.** Параметризовать явно тор вращения, полученный вращением окружности радиуса $r$ с центром на расстоянии $R$ от оси вращения. Является ли это гладкой регулярной параметризованной поверхностью?

**Задача 3.** Задать тор вращения из предыдущей задачи неявно. Является ли это гладкой регулярной неявно заданной поверхностью?

**Задача 4.** Найти на торе вращения в произвольной точке касательную плоскость и первую квадратичную форму.

**Задача 5.** Найти на торе вращения длину меридиана и произвольной параллели с помощью первой квадратичной формы.

**Задача 6.** В анализе касательная плоскость к графику поверхности $z = f(x, y)$ в точке $A = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ задаётся уравнением

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{1}$$

Если мы параметризуем этот график как $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, как соотносится касательная плоскость в точке $A$, определённая нами на лекциях как $\langle \mathbf{r}_u(x_0, y_0), \mathbf{r}_v(x_0, y_0)\rangle$, с формулой (1)?

**Задача 7.** Найти угол между кривыми $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u^2.$$

Решите задачу дважды: один раз с использованием локальных координат $u, v$ и первой квадратичной формы, другой раз с использованием глобальных координат $x, y, z$.

**Задача 8.** Найти касательную плоскость в произвольной точке поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi).$$

Найти первую квадратичную форму. Доказать, что параллели и меридианы всегда ортогональны.

**Задача 9.** Пусть $\varrho(s)$ пространственная кривая в натуральной параметризации, а $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ её базис Френе. Определим каналовую поверхность кривой как

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \varrho(s) + \mathbf{n}(s)\cos\varphi + \mathbf{b}(s)\sin\varphi.$$

Найти первую квадратичную форму.

**Задача 10.** Кривая на сфере, пересекающая все меридианы сферы под данным фиксированным углом, называется локсодромией. Найти уравнение локсодромии.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 4. Поверхности в трёхмерном пространстве, их кривизны.**

**Задача 1.** Рассмотрим сферу радиуса $R$

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\theta, \quad z = R\sin\theta.$$

1. Найти базис $\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\theta$ в касательном пространстве точки сферы. Найти первую квадратичную форму. Зависят ли её коэффициенты от $\varphi, \theta$? Если да, то почему, ведь казалось бы, что сфера симметрична относительно вращений пространства и метрика в каждой точке должна быть одинакова?

2. Найти поле внешних единичных нормалей $n$, а также производные $\mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{r}_{\varphi\theta}, \mathbf{r}_{\theta\theta}$. Найти найти вторую квадратичную форму. Найти явным вычислением главные кривизны и главные направления. Единственны ли главные направления? Найти гауссову и среднюю кривизну через главные кривизны.

3. Найти гауссову и среднюю кривизны по формулам

$$K = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}}, \quad H = \mathrm{tr}(\mathrm{II} \cdot \mathrm{I}^{-1}),$$

где $\mathrm{I}, \mathrm{II}$ обозначают матрицы первой и второй квадратичных форм в любом базисе.

**Задача 2.** На лекции главные кривизны, гауссова и средняя кривизны сферы радиуса $R$ были найдены с помощью формулы Эйлера

$$k_n^o = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi,$$

где $k_n^o$ ориентированная нормальная кривизна. Повторим этот вывод.

1. Рассмотрим сферу радиуса $R$ с полем внешних единичных нормалей $n$. Рассмотрим большой круг $\gamma(s)$ на этой сфере, параметризованный натуральным параметром. Доказать, что вектор ускорения $\ddot{\gamma}(s)$ лежит в плоскости большого круга и коллинеарен $n$.

2. Доказать, что ориентированная нормальная кривизна большого круга равна минус кривизне большого круга. Найти её.

3. Из того, что полученный результат не зависит от выбора большого круга или точки на нём, доказать с помощью формулы Эйлера, что главные кривизны одинаковы и найти их. Вычислить гауссову и среднюю кривизну.

**Задача 3.** Задать тор вращения явной параметризацией. Найти явно первую и вторую квадратичную формы, главные кривизны и главные направления. Единственны ли главные направления? Найти гауссову и среднюю кривизну. В каких точках гауссова кривизна положительна, в каких отрицательна?

**Задача 4.** Рассмотрим поверхность вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi).$$

Доказать без вычислений, что главные направления касательны к параллелям и меридианам. Найти явно первую и вторую квадратичную формы, главные кривизны. Найти гауссову и среднюю кривизну.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 5. Нормальные сечения. Нормаль средней кривизны. $k$-мерные гладкие регулярные поверхности в $\mathbb{R}^n$. Касательное и нормальное пространства. Поля ортогональных проекторов на касательные и нормальные пространства.**

**Задача 1.** Рассмотрим сферу радиуса $R$

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\theta, \quad z = R\sin\theta.$$

и параллель $\varphi = t$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ на ней. Обозначим через $A$ точку с локальными координатами $\varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1. Найти координаты точки $A$ в глобальных координатах в объемлющем пространстве. Найти натуральную параметризацию $\gamma(s)$ указанной выше параллели в локальных и глобальных координатах, такую, что $\gamma(0) = A$.

2. Найти вектор скорости $\dot\gamma(0)$ и нормаль к сфере в точке $A$. Описать явно нормальное сечение сферы в точке $A$ в направлении касательного вектора $\dot\gamma(0)$. Найти кривизну этого нормального сечения в точке $A$.

3. Найти ортогональные проекторы на касательное и нормальное пространство к сфере в точке $A$. Найти кривизну, нормальную кривизну и геодезическую кривизну параллели в точке $A$ с помощью этих проекторов.

4. Найти прямым вычислением обе части равенства в теореме Мёнье в точке $A$ для описанных выше параллели и нормального сечения и сравнить их.

**Задача 2.** Параметризовать прямой круговой цилиндр радиуса $R$ и найти его поле единичных нормалей средней кривизны. Смотрит ли оно «внутрь» или «наружу» цилиндра?

**Задача 3.** Рассмотрим двумерный тор в четырёхмерном пространстве с параметризацией

$$r(u, v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v).$$

1. Доказать, что это гладкая регулярная поверхность. Найти касательное и нормальное пространство в произвольной точке.

2. Найти ортонормированный базис в касательных векторных полях. Найти явно проектор на касательное пространство и проектор на нормальное пространство в произвольной точке

3. Рассмотрим «обмотку тора», то есть кривую $u = t$, $v = \alpha t$. Параметризовать её натуральным параметром. Найти вектор ускорения в натуральной параметризации, его касательную и нормальную проекцию, а из этого геодезическую и нормальную кривизну данной кривой.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 6. Производная функции вдоль вектора и векторного поля в аффинном пространстве и на поверхности в аффинном пространстве. Коммутатор векторных полей.**

**Задача 1.** Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой $f(x, y) = x^2 - y^2$, точку $A = (1, 2)$ и вектор $Y = (1, 1)$. Найти производную $\partial_Y f(A)$.

**Задача 2.** Рассмотрим единичную сферу

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Пусть в локальных координатах $\varphi$, $\theta$ функция $f$ задана формулой

$$f(\varphi, \theta) = \sin\varphi\sin 2\theta,$$

точка $A$ имеет локальные координаты $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, а вектор $Y$ имеет координаты $(1, 1)$ в базисе $\mathbf{r}_\varphi$, $\mathbf{r}_\theta$.

1. Найти производную $\partial_Y f(A)$, используя локальные координаты $\varphi$, $\theta$.
2. Найти глобальные координаты $x, y, z$ точки $A$ и координаты вектора $Y$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$. Найти какое-нибудь продолжение $f$ в окрестность точки $A$ в $\mathbb{R}^3$. и записать его как $f(x, y, z)$.
3. Найти производную $\partial_Y f(A)$, используя глобальные координаты $x$, $y$, $z$ и сравнить с результатом из пункта 1.

**Задача 3.** Рассмотрим двумерный тор Клиффорда в четырёхмерном пространстве с параметризацией

$$r(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\right).$$

Рассмотрим на этом торе векторные поля

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \quad Y(u, v) = (-\sin u, \cos u, \sin v, -\cos v).$$

Являются ли они гладкими? Являются ли они касательными? Если да, найдите их координаты в базисе $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Гладкие ли они?

**Задача 4.** Рассмотрим два векторных поля в $\mathbb{R}^3$,

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0), \quad Y(x, y, z) = (0, -z, y).$$

1. Являются ли они гладкими? Найти их коммутатор $[X, Y]$ в $\mathbb{R}^3$.
2. Рассмотрим единичную сферу $\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta)$. Будут ли ограничения $X|_{\mathbb{S}^2}$, $Y|_{\mathbb{S}^2}$ гладкими? Касательными? Если да, найти их координаты в базисе $\mathbf{r}_\varphi$, $\mathbf{r}_\theta$. Используя эти координаты, найти $[X|_{\mathbb{S}^2}, Y|_{\mathbb{S}^2}]$.
3. Найти ограничение $[X, Y]|_{\mathbb{S}^2}$ коммутатора $[X, Y]$ из пункта 1 и сравнить с коммутатором $[X|_{\mathbb{S}^2}, Y|_{\mathbb{S}^2}]$ из пункта 2.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 7. Векторнозначная вторая квадратичная форма $k$-мерной гладкой регулярной поверхности в $n$-мерном евклидовом пространстве. Нормаль средней кривизны.**

*Мы используем обозначения из лекций: производная в аффинном пространстве $\partial_X Y$ векторного поля $Y$ вдоль вектора или векторного поля $X$, ортогональные проекторы $P$ на касательное пространство и $Id - P$ на нормальное пространство, векторнозначная вторая квадратичная форма $B(X,Y) = (Id-P)(\partial_X Y)$ на $k$-мерной поверхности в $n$-мерном евклидовом пространстве, классическая вторая квадратичная форма $II(X,Y)$ на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, $n$ выбранное поле единичных нормалей на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, риманова метрика (первая квадратичная форма) $g$, нормаль средней кривизны $\zeta = \operatorname{tr}_g B$, средняя кривизна $H = \lambda_1 + \lambda_2$ на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.*

**Задача 1.** Рассмотрим двумерный тор Клиффорда в четырёхмерном пространстве с параметризацией

$$r(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\right).$$

1. Почему это тор? Выбрать такую область $D$ в плоскости $u$, $v$, чтобы $r$ было взаимно однозначным отображением $D$ на $r(D)$.

2. Найти базисные касательные векторные поля $r_u$, $r_v$ и найти ортонормированный базис $\eta_1$, $\eta_2$ в нормальных векторных полях.

3. Используя базис $\eta_1$, $\eta_2$ в нормальных векторных полях найти проектор $Id - P$ на нормальное пространство. Написать его $4 \times 4$ матрицу.

4. Найти $B(r_u, r_u)$, $B(r_u, r_v)$, и $B(r_v, r_v)$.

5. Найти матрицу $(g_{ij})$ римановой метрики (первой квадратичной формы) на торе Клиффорда. Найти обратную матрицу $g^{-1} = (g^{ij})$.

6. Найти нормаль средней кривизны $\zeta = \operatorname{tr}_g B$.

**Задача 2.** Рассмотрим парметризованную натуральным параметром плоскую кривую в евклидовой плоскости с репером Френе $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$. Рассмотрим базис $\mathbf{v}$ в касательных векторных полях. Найти матрицу $(g_{ij})$ римановой метрики (первой квадратичной формы) на плоской кривой. Найти обратную матрицу $g^{-1} = (g^{ij})$. Предложить базис в нормальных векторных полях. Найти $B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Найти нормаль средней кривизны $\zeta = \operatorname{tr}_g B$.

**Задача 3.** Рассмотрим парметризованную натуральным параметром кривую в трёхмерном евклидовом пространстве с репером Френе $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Расмотрим базис $\mathbf{v}$ в касательных векторных полях. Найти матрицу $(g_{ij})$ римановой метрики (первой квадратичной формы) на плоской кривой. Найти обратную матрицу $g^{-1} = (g^{ij})$. Предложить базис в нормальных векторных полях. Найти $B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Найти нормаль средней кривизны $\zeta = \operatorname{tr}_g B$.

**Задача 4.** Доказать, что на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве $B(X,Y) = II(X,Y)\, n$ и $\zeta = H\, n$.

**Задача 5.** Рассмотрим трёхмерную сферу в четырёхмерном пространстве с параметризацией

$$r(u,v) = \left(\cos\varphi^1 \cos\varphi^2 \cos\varphi^3, \sin\varphi^1 \cos\varphi^2 \cos\varphi^3, \sin\varphi^2 \cos\varphi^3, \sin\varphi^3\right).$$

1. Найти базисные касательные векторные поля $r_{\varphi^i}$ и найти ортонормированный базис $n$ в нормальных векторных полях.
2. Используя базис $n$ в нормальных векторных полях найти проектор $Id - P$ на нормальное пространство. Написать его $4 \times 4$ матрицу.
3. Найти $B(r_{\varphi^i}, r_{\varphi^j})$.
4. Найти матрицу $(g_{ij})$ римановой метрики (первой квадратичной формы) на трёхмерной сфере. Найти обратную матрицу $g^{-1} = (g^{ij})$.
5. Найти нормаль средней кривизны $\zeta = \operatorname{tr}_g B$.

**Задача 6.** Рассмотрим бутылку Клейна в четырёхмерном пространстве с параметризацией

$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos 2u \sin v, \sin 2u \sin v).$$

Почему это бутылка Клейна? Выбрать такую область $D$ в плоскости $u$, $v$, чтобы $r$ было взаимно однозначным отображением $D$ на $r(D)$. Сделать для этой бутылки Клейна пункты 2-6 из задачи 1.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 8. Вторая квадратичная форма и связность на $k$-мерной гладкой регулярной поверхности в $n$-мерном евклидовом пространстве.**

*Мы используем обозначения из лекций: производная в аффинном пространстве $\partial_X Y$ векторного поля $Y$ вдоль вектора или векторного поля $X$, ортогональные проекторы $P$ на касательное пространство и $Id - P$ на нормальное пространство, векторнозначная вторая квадратичная форма $B(X,Y) = (Id - P)(\partial_X Y)$ и ковариантная производная $\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$ на $k$-мерной поверхности в $n$-мерном евклидовом пространстве, классическая вторая квадратичная форма $II(X,Y)$ на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, $n$ выбранное поле единичных нормалей на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, риманова метрика (первая квадратичная форма) $g$, символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^l$.*

**Задача 1.** Рассмотрим единичную сферу

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta),$$

будем нумеровать координаты как $u^1 = \varphi$, $u^2 = \theta$.

1. Найти базисные касательные векторные поля $\mathbf{r}_\varphi$, $\mathbf{r}_\theta$. Найти производную в объемлющем евклидовом пространстве $\partial_X Y$ для
$$X = \cos\theta\,\mathbf{r}_\theta, \quad Y = \sin\theta\,\mathbf{r}_\varphi.$$
2. Найти проектор $P$ на касательное пространство и найти $\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$.
3. Найти риманову метрику (первую квадратичную форму) $g$.
4. Найти символы Кристоффеля в базисе $\mathbf{r}_\varphi$, $\mathbf{r}_\theta$.
5. Вычислить $\nabla_X Y$, используя символы Кристоффеля.

**Задача 2.** Рассмотрим геликоид

$$\begin{cases} x &= u\cos\varphi, \\ y &= u\sin\varphi, \\ x &= h\,\varphi, \end{cases}$$

где $0 < u < +\infty$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и на нём винтовую линию $u = R$, $\varphi = t$, где $t \in \mathbb{R}$, а $R > 0$ константа.

1. Параметризовать винтовую линию натуральным параметром $\gamma(s)$. Найти её кривизну $k$.
2. Найти для геликоида проектор $P$ на касательное пространство и проектор $Id - P$ на нормальное пространство.
3. Найти нормальную $k_n = (Id - P)(\ddot{\gamma})$ и геодезическую $k_g = P(\ddot{\gamma})$ кривизну винтовой линии на геликоиде. Сравнить $k^2$ и $k_n^2 + k_g^2$.
4. Фиксировать нумерацию локальных координат на геликоиде, найти метрику и символы Кристоффеля для геликоида.

5. Записать винтовую линию на геликоиде в локальных координатах. Найти геодезическую кривизну как $k_g = |\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|$. Сравнить с результатом, полученным ранее.

6. Выберем единичное нормальное поле $n$ на геликоиде как базис в нормальных векторных полях. Найти компоненты второй квадратичной формы $b^1_{11} = L$, $b^1_{12} = M$, $b^1_{22} = N$. Найти нормальную кривизну как $k_n = |B(\dot\gamma, \dot\gamma)|$. Сравнить с результатом, полученным ранее.

**Задача 3.** Обратите внимание, что рассматриваемая нами в предыдущей задаче винтовая линия также лежит на круговом цилиндре радиуса $R$. Сделать для винтовой линии на цилиндре всё то же самое, что делалось для винтовой линии на геликоиде.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 9.**
**Параллельный перенос и геодезические.**

**Задача 1.** На какой угол повернётся вектор после параллельного переноса вдоль параллели широты $\theta_0$ на сфере радиуса 1?

**Задача 2.** Рассмотрим круговой конус с углом $\alpha$ между осью и образующей. На какой угол поворачивается вектор при параллельном переносе вдоль параллели?

**Задача 3.** Пусть $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ две двумерные поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, касающиеся друг друга вдоль кривой $\gamma(t)$, то есть $\gamma(t)$ лежит на $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ и для любого $t$ совпадают касательные плоскости, то есть $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Доказать, что параллельный перенос вдоль $\gamma(t)$ на $\Sigma_1$ совпадает с параллельным переносом вдоль $\gamma(t)$ на $\Sigma_2$.

**Задача 4.** С помощью задачи 3 решить задачу 1.

**Задача 5.** Доказать, что если прямая (с аффинной нормальной параметризацией) лежит на поверхности, то она геодезическая.

**Задача 6.** Найти геодезические на сфере радиуса 1.

**Задача 7.** Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x &= 1, \\ y+z &= 0. \end{cases}$$

**Задача 8.** Пусть $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ две двумерные поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, касающиеся друг друга вдоль кривой $\gamma(t)$, то есть $\gamma(t)$ лежит на $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ и для любого $t$ совпадают касательные плоскости, то есть $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Доказать, что $\gamma(t)$ является геодезической на $\Sigma_1$ тогда и только тогда, когда она является геодезической на $\Sigma_2$.

**Задача 9.** Найти геодезические на цилиндре и конусе.

**Задача 10.** На каких конусах есть самопересекающиеся геодезические?

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 10. Параллельный перенос и геодезические.**

**Задача 1.** Найти результат параллельного переноса вектора $(0,1,1)$ из точки $(1,0,0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ в точку $(1,-1,1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x &= 1, \\ y+z &= 0. \end{cases}$$

**Задача 2.** Пусть $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ две двумерные поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, касающиеся друг друга вдоль кривой $\gamma(t)$, то есть $\gamma(t)$ лежит на $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ и для любого $t$ совпадают касательные плоскости, то есть $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Доказать, что $\gamma(t)$ является геодезической на $\Sigma_1$ тогда и только тогда, когда она является геодезической на $\Sigma_2$.

**Задача 3.** Найти геодезические на цилиндре и конусе.

**Задача 4.** На каких конусах есть самопересекающиеся геодезические?

**Задача 5.** Доказать, что меридиан (в аффинной натуральной параметризации) поверхности вращения — геодезическая. При каком условии параллель — геодезическая?

**Задача 6.** Найти геодезические (без параметризации) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости плоскости Лобачевского, то есть в полуплоскости $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ с метрикой

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 11. Параллельный перенос и геодезические.**

**Задача 1.** Рассмотрим винтовую линию в натуральной параметризации,

$$\gamma(s) = \left( R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{R^2+h^2}} \right).$$

a) Найти явно базис Френе $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, кривизну и кручение.

b) Найти ковариантные производные $\nabla^{N\gamma}_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$ и $\nabla^{N\gamma}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}$ нормальных векторных полей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ вдоль касательного векторного поля $\mathbf{v}$.

c) Рассмотрим вектор $\xi_0 = (-1, 0, 0)$ в точке $\gamma(0)$. Проверить, что это нормальный вектор к винтовой линии в этой точке.

d) Найти параллельное вдоль винтовой линии нормальное к ней векторное поле $\xi(s)$, такое, что $\xi(0) = \xi_0$. Как это можно сделать, работая в базисе евклидова пространства, и как это можно сделать, работая в базисе $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ нормальных к винтовой линии векторных полей?

e) Найти результат параллельного переноса вдоль винтовой линии нормального вектора $\xi_0 = (-1, 0, 0)$ из точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(2\pi)$.

f) Найти угол $\varphi(s)$ между $\xi(s)$ и $\mathbf{n}(s)$. Сравнить $\dot{\varphi}(s)$ и кручение.

**Задача 2.** Рассмотрим двумерную поверхность $\Sigma$ с параметризацией

$$r(u, v) = (u, v, u^2, v^2)$$

в четырёхмерном евклидовом пространстве.

a) Выбрать какой-нибудь базис $\eta_i$, $\eta_2$ в нормальных векторных полях и найти ковариантные производные $\nabla^{N\Sigma}_{r_{u^i}}\eta_\alpha$ базисных нормальных векторных полей вдоль базисных касательных векторных полей.

b) Рассмотрим кривую $\gamma(t)$ на поверхности $\Sigma$ с параметризацией $u = t$, $v = 0$ в локальных координатах. Написать уравнение параллельного переноса нормального векторного поля для этой кривой. Перенести параллельно нормальный вектор $(0, 0, 1, 0)$ вдоль $\gamma(t)$ из точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(1)$.

**Задача 3.** Найти геодезические на цилиндре и конусе.

**Задача 4.** На каких конусах есть самопересекающиеся геодезические?

**Задача 5.** Доказать, что меридиан (в аффинной натуральной параметризации) поверхности вращения — геодезическая. При каком условии параллель — геодезическая?

**Задача 6.** Найти геодезические (без параметризации) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости плоскости Лобачевского, то есть в полуплоскости $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ с метрикой

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 12. Тензор кривизны Римана. Геодезические.**

**Задача 1.** Найти $R(X,Y)Z$ на сфере радиуса $r$.

**Задача 2.** Найти $R(X,Y)Z$ на прямом круговом цилиндре радиуса $r$.

**Задача 3.** Найти $R(X,Y)Z$ на прямом конусе с углом $\alpha$ между осью вращения и образующей.

**Задача 4.** Найти $R(X,Y)Z$ на торе вращения.

**Задача 5.** Записать классическое уравнение Гаусса для двумерной поверхности в трёхмерном пространстве в терминах символов Кристоффеля и коэффициентов второй квадратичной формы, которое получается после подстановки в уравнение Гаусса из лекций базисных векторных полей $X = \mathbf{r}_{u^i}$, $Y = \mathbf{r}_{u^j}$, $Z = \mathbf{r}_{u^l}$.

**Задача 6.** Доказать, что меридиан (в аффинной натуральной параметризации) поверхности вращения — геодезическая. При каком условии параллель — геодезическая?

**Задача 7.** Найти геодезические (без параметризации) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости плоскости Лобачевского, то есть в полуплоскости $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ с метрикой

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

**Задача 8.** Мы уже знаем, что длина вектора скорости геодезической является первым интегралом. Доказать, что на поверхности вращения расстояние от точки геодезической до оси вращения, умноженное на синус угла между геодезической и меридианом является вторым первым интегралом (интегралом Клеро).

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 13.**
**Уравнение Петерсона-Майнарди-Кодацци.**
**Параллельный перенос. Геодезические.**

**Задача 1.** Найти геодезические (без параметризации) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости плоскости Лобачевского, то есть в полуплоскости $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ с метрикой

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости плоскости Лобачевского выписать и решить уравнения параллельного переноса вдоль кривых а) $x = x_0$, $y = t$ и б) $x = t$, $y = y_0$.

**Задача 3.** Рассмотрим двумерную поверхность в трёхмерном пространстве. Выберем поле единичных нормалей $n$. Доказать, что главные направления — собственные векторы оператора Вейнгартена $W_n$.

**Задача 4.** Назовём линией кривизны такую кривую, что её касательный вектор в каждой точке является главным направлением в этой точке. Найти линии кривизны на сфере и поверхности вращения.

**Задача 5.** Выписать уравнение для линий кривизны. Найти уравнение для линий кривизны на поверхности $z = x^2 - y^2$.

**Задача 6.** Доказать, что координатные линии являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $F = M = 0$. Вывести из уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци, что в такой ситуации выполнены равенства

$$\partial_v \lambda_1 = (k_2 - k_1)\, \partial_v \ln \sqrt{E}, \quad \partial_u \lambda_2 = (k_1 - k_2)\, \partial_u \ln \sqrt{G}$$

для главных кривизн $\lambda_1$, $\lambda_2$.

**Задача 7.** Доказать теорему Иоахимсталя: если две поверхности пересекаются под постоянным углом, то их линия пересечения является линией кривизны на одной поверхности тогда и только тогда, когда она является линией кривизны на другой. Приведите примеры.

**Задача 8.** Пусть дана кривая в натуральной параметризации на двумерной поверхности в трёхмерном пространстве. Рассмотрим базис Дарбу, состоящий из касательного вектора $\dot{\gamma}$, вектора нормали к поверхности $n$ и вектора $e = [\dot{\gamma}, n]$. Выведите по аналогии с формулами Френе формулы для производных векторов из базиса Дарбу, где используйте геодезическое кручение $\varkappa_g = (\dot{e}, n)$. Доказать, что для линий кривизны геодезическое кручение нулевое. Верно ли обратное, то есть является ли кривая с нулевым геодезическим кручением линией кривизны?

**Задача 9.** Пусть дана кривая в натуральной параметризации на двумерной поверхности в трёхмерном пространстве. Доказать, что $\varkappa_g = (\dot{\gamma}, \dot{n}, n)$.

**Задача 10.** Доказать, что плоская геодезическая, отличная от прямой, является линией кривизны.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 14.**
**Уравнение Петерсона-Майнарди-Кодацци.**
**Дифференциальные формы.**

**Задача 1.** Доказать, что координатные линии являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $F = M = 0$. Вывести из уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци, что в такой ситуации выполнены равенства

$$\partial_v \lambda_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\, \partial_v \ln \sqrt{E}, \quad \partial_u \lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, \partial_u \ln \sqrt{G}$$

для главных кривизн $\lambda_1$, $\lambda_2$.

**Задача 2.** Доказать теорему Иоахимсталя: если две поверхности пересекаются под постоянным углом, то их линия пересечения является линией кривизны на одной поверхности тогда и только тогда, когда она является линией кривизны на другой. Приведите примеры.

**Задача 3.** Доказать, что плоская геодезическая, отличная от прямой, является линией кривизны.

**Задача 4.** Пусть $A = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ точка на плоскости. Рассмотрим ковектор $\omega = 2dx - dy \in T^*_A\mathbb{R}^2$ и вектор $\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \in T_A\mathbb{R}^2$ в этой точке. Найти число $\omega(X)$.

**Задача 5.** Рассмотрим дифференциальную 1-форму $\omega = y^2\, dx + x\, dy$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и векторное поле $X = y\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$. Найти функцию $\omega(X)$.

**Задача 6.** Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем сферу без северного полюса стереографическими координатами $u$, $v$. Пусть $\Phi(x, y, z) = z$ и $f := \Phi|_{\mathbb{S}^2}$. Найти $df$ в стереографических координатах.

**Задача 7.** Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем сферу сферическими координатами $\varphi$, $\theta$. Записать в этих координатах форму площади. Найти площадь сферы.

**Задача 8.** Рассмотрим тор вращения. Параметризуем угловыми координатами $\varphi$, $\theta$. Записать в этих координатах форму площади. Найти площадь тора вращения.

**МГУ, классическая дифференциальная геометрия. Семинар 15. Разное.**

**Задача 1.** Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем сферу сферическими координатами $\varphi$, $\theta$. Записать в этих координатах форму площади. Найти площадь сферы.

**Задача 2.** Рассмотрим тор вращения. Параметризуем угловыми координатами $\varphi$, $\theta$. Записать в этих координатах форму площади. Найти площадь тора вращения.

**Задача 3.** Найти гауссову кривизну тора вращения. Вычислить эйлерову характеристику тора вращения через триангуляцию и через теорему Гаусса-Бонне.

**Задача 4.** Доказать, что критические точки функционала длины это в точности всевозможные перепараметризации геодезических.

**Задача 5.** Пусть $A = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ точка на плоскости. Рассмотрим ковектор $\omega = 2dx - dy \in T^*_A\mathbb{R}^2$ и вектор $\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \in T_A\mathbb{R}^2$ в этой точке. Найти число $\omega(X)$.

**Задача 6.** Рассмотрим дифференциальную 1-форму $\omega = y^2\,dx + x\,dy$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и векторное поле $X = y\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$. Найти функцию $\omega(X)$.

**Задача 7.** Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем сферу без северного полюса стереографическими координатами $u$, $v$. Пусть $\Phi(x, y, z) = z$ и $f := \Phi|_{\mathbb{S}^2}$. Найти $df$ в стереографических координатах.

**Задача 8.** Доказать теорему Иоахимсталя: если две поверхности пересекаются под постоянным углом, то их линия пересечения является линией кривизны на одной поверхности тогда и только тогда, когда она является линией кривизны на другой. Приведите примеры.

**Задача 9.** Доказать, что плоская геодезическая, отличная от прямой, является линией кривизны.