Классическая дифференциальная геометрия
программа курса
весенний семестр 2026

Лектор А. В. Пенской

1. Плоские гладкие регулярные параметризованные кривые. Возможность локально представить образ как график гладкой функции $y(x)$ или $x(y)$.

2. Перепараметризации кривых. Ориентация кривой как класс эквивалентности параметров. Натуральный параметр. Существование натурального параметра, связь различных натуральных параметров.

3. Кривизна плоской параметризованной кривой в натуральной параметризации и в произвольной параметризации.

4. Базис, репер Френе и формулы Френе для кривой в плоскости. Кривизна плоской кривой как угловая скорость вращения касательной. Ориентированная кривизна и ориентированный репер Френе плоской кривой в ориентированной плоскости.

5. Гладкие регулярные параметризованные кривые в n-мерном пространстве. Натуральный параметр, кривизна. Базис и репер Френе для кривой в трёхмерном ориентированном пространстве. Кручение кривой в натуральной параметризации. Формулы Френе для кривой в трёхмерном ориентированном пространстве.

6. Кручение кривой в трёхмерном ориентированном пространстве в произвольной параметризации. Восстановление кривой по кривизне и кручению. Натуральные уравнения кривой.

7. Неявно заданные плоские гладкие регулярные кривые. Возможность локально представить как график гладкой функции $y(x)$ или $x(y)$ и как образ параметризованной кривой. Кривизна неявно заданной плоской гладкой регулярной кривой.

8. Гладкие регулярные параметризованные двумерные поверхности в трёхмерном пространстве. Локальная представимость образа такой поверхности в виде графика.

9. Гладкие регулярные неявно заданные двумерные поверхности в трёхмерном пространстве. Локальная представимость такой поверхности в виде графика и в виде образа параметризованной поверхности.

10. Касательная плоскость и касательные векторы к гладкой регулярной параметризованной двумерной поверхности в трёхмерном пространстве и к гладкой регулярной неявно заданной двумерной поверхности в трёхмерном пространстве.

11. Первая квадратичная форма. Вычисление длин касательных векторов, углов между ними, а также длины кривой на поверхности.

12. Нормальная и геодезическая кривизна кривых на поверхности. Вторая квадратичная форма и нормальная кривизна.

13. Главные направления, главные кривизны. Гауссова и средняя кривизна. Ориентированная нормальная кривизна. Формула Эйлера. Геометрический смысл главных направлений и главных кривизн. Геометрический смысл гауссовой кривизны.

14. Нормальные сечения. Теорема Мёнье. Зависимость второй квадратичной формы, главных кривизн, гауссовой и средней кривизны от изменения направления поля нормалей. Единичная нормаль средней кривизны.

15. Гладкие k-мерные регулярные поверхности в n-мерном пространстве. Касательное и нормальное пространства в точке. Поля ортогональных проекторов на касательные пространства и их гладкость. Нормальная и геодезическая кривизна кривых на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве.

16. Производная функции в аффинном пространстве вдоль вектора. Производная функции, определённой на поверхности в аффинном пространстве, вдоль касательного вектора. Гладкие касательные векторные поля на поверхности в аффинном пространстве. Производная функции, определённой на поверхности в аффинном пространстве, вдоль касательного векторного поля.

17. Связь производной вдоль вектора скорости кривой и производной по параметру этой кривой. Связь частной производной $\frac{\partial}{\partial u^i}$ по отношению к локальному параметру u^i и производной $\partial_{\mathbf{r}_{u^i}}$ вдоль вектора $\mathbf{r}_{u^i}$.

18. Коммутатор векторных полей в аффинном пространстве. Коммутатор касательных векторных полей на поверхности в аффинном пространстве. Утверждение о том, что если векторные поля X и Y в аффинном

пространстве таковы, что $X|_\Sigma$ и $Y|_\Sigma$ касаются поверхности Σ, то ограничение $[X,Y]|_\Sigma$ коммутатора $[X,Y]$ в аффинном пространстве на Σ совпадает с вычисленным на Σ коммутатором $[X|_\Sigma, Y|_\Sigma]$.

19. Производная векторного поля в аффинном пространстве вдоль вектора. Производная векторного поля на поверхности в аффинном пространстве вдоль касательного вектора. Разложение гладкого векторного поля на поверхности в евклидовом пространстве в сумму касательного и нормального гладких векторных полей на поверхности. Векторнозначная вторая квадратичная форма k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Связь с классической второй квадратичной формой на двумерных поверхностях в трёхмерном евклидовом пространстве.

20. Риманова метрика на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве как обобщение первой квадратичной формы. След симметрической билинейной формы в евклидовом векторном пространстве с помощью скалярного произведения. Нормаль средней кривизны k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве как след векторнозначной второй квадратичной формы с помощью римановой метрики.

21. Ковариантная производная касательного векторного поля вдоль касательного вектора или касательного векторного поля на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве и её свойства, в том числе симметричность и согласованность с римановой метрикой (первой квадратичной формой). Понятие связности.

22. Деривационная формула Гаусса $\partial_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$. Выражение геодезической и нормальной кривизны натурально параметризованной кривой на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве через вторую квадратичную форму и ковариантную производную.

23. Определимость связности римановой метрикой (первой квадратичной формой). Запись второй квадратичной формы и ковариантной производной в базисах. Символы Кристоффеля. Явные формулы для символов Кристоффеля через риманову метрику (первую квадратичную форму) в базисе $\mathbf{r}_{u^1}, \ldots, \mathbf{r}_{u^k}$. Симметричность по нижним индексам символов Кристоффеля в базисе $\mathbf{r}_{u^1}, \ldots, \mathbf{r}_{u^k}$.

24. Деривационная формула Гаусса, записанная в координатах. Случай двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

25. Параллельные (ковариантно постоянные) вдоль кривой векторные поля. Параллельный перенос вдоль кривой на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве и его свойства.

26. Геодезические.

27. Оператор Вейнгартена на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве, его связь со второй квадратичной формой и другие свойства.

28. Ковариантная производная нормального векторного поля вдоль касательного вектора или касательного векторного поля на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Деривационная формула Вейнгартена $\partial_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla^{N\Sigma}_X \xi$. Вычисление оператора Вейнгартена и ковариантной производной нормального поля в координатах. Деривационная формула Вейнгартена, записанная в координатах.

29. Формулы Френе для кривой в плоскости и трёхмерном пространстве как частные случаи деривационных формул Гаусса-Вейнгартена. Классические деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена в случае двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве.

30. Параллельные (ковариантно постоянные) вдоль кривой нормальные поля на k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Параллельный перенос нормальных векторов на поверхности вдоль кривой и его свойства. Геометрический смысл кручения кривой в трёхмерном евклидовом пространстве.

31. Тензор кривизны Римана.

32. Уравнение Гаусса для k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве в двух формах,

$$R(X,Y)Z = W_{B(Y,Z)}(X) - W_{B(X,Z)}(Y),$$

$$(R(X,Y)Z,V) = (B(Y,Z),B(X,V)) - (B(X,Z),B(Y,V)).$$

Уравнение Гаусса для двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

33. Явная формула для $R(\mathbf{r}_{u^i},\mathbf{r}_{u^j})\mathbf{r}_{u^l}$ через символы Кристоффеля. Theorema Egregium Гаусса.

34. Кососимметричность $R(X,Y)Z$ по первым двум аргументам. Кососимметричность $(R(X,Y)Z,V)$ по третьему и четвёртому аргументу. Формула для тензора Римана через гауссову кривизну на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

35. Уравнение Петерсона-Кодацци-Майнарди для k-мерной гладкой регулярной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Классическое уравнение Петерсона-Кодацци-Майнарди в случае двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве.

36. Линейное отображение параллельного переноса и задача Коши, которой оно удовлетворяет. Угол поворота при параллельном переносе вдоль петли на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

37. Ковекторы. Дифференциальные 1-формы как поля ковекторов. Дифференциал функции. Базис в пространстве 1-форм. Дифференциальные 2-формы. Внешнее произведение 1-форм. Базис в пространстве 2-форм на двумерной поверхности. Внешний дифференциал 1-формы. Интегрирование 1- и 2-форм. Форма площади, площадь поверхности. Формула Грина с точки зрения дифференциальных форм.

38. Формы $\Gamma_j^s = \Gamma_{ij}^s\, du^i$, матрица из 1-форм $\Gamma = (\Gamma_j^s)$. Формулы

$$R(X,Y) = d\,\Gamma(X,Y) + \Gamma(X)\Gamma(Y) - \Gamma(Y)\Gamma(X), \quad R = d\,\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma.$$

39. Кососимметричность матриц из дифференциальных форм Γ и R в ортонормированном базисе, формула $R_2^1 = d\,\Gamma_2^1$ в ортонормированном базисе касательных векторных полей на двумерной поверхности.

40. Угол поворота при параллельном переносе вдоль границы области на двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве как интеграл по области от гауссовой кривизны, умноженной на форму площади. Формула Гаусса-Бонне.

41. Вариационное описание геодезических.