

Весенний семестр, 2012 г.

Программа курса

“Классическая дифференциальная геометрия”

Проф. О. И. Мохов

кафедра высшей геометрии и топологии

I. Криволинейные системы координат в области n -мерного евклидова пространства

1. Криволинейные системы координат в области n -мерного евклидова пространства. Координатные линии и координатные поверхности. Репер векторов скорости координатных линий, его матрица Грама и ее свойства.
2. Понятие о римановых и псевдоримановых метриках, заданных в области евклидова пространства. Метрика, порождаемая криволинейными системами координат евклидова пространства. Метрика евклидова пространства в криволинейных координатах.
3. Девивационные формулы (уравнения) для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n -мерного евклидова пространства. Символы Кристоффеля, их явное выражение через метрику и закон преобразования.
4. Условие совместности девивационных уравнений для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n -мерного евклидова пространства. Тензор кривизны Римана. Плоские метрики.
5. Ортогональные криволинейные системы координат в n -мерном евклидовом пространстве и диагональность метрики. Коэффициенты Ламе. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат, вид метрики в них. Эллиптическая и эллипсоидальная системы координат.

II. Кривые в n -мерном евклидовом пространстве

1. Элементарная кривая (простая дуга) в n -мерном евклидовом пространстве, параметризация. Параметризованные кривые, эквивалентность. Регулярные кривые. Регулярность координатных линий криволинейных систем координат в n -мерном евклидовом пространстве.

2. Различные способы задания регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность.
3. Касательная прямая к регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве, ее свойства.
4. Длина кривой в n -мерном евклидовом пространстве. Натуральная параметризация, ее свойства.
5. Соприкосновение кривых в n -мерном евклидовом пространстве.
6. Кривизна кривой в n -мерном евклидовом пространстве, ее геометрический смысл и свойства. Вектор кривизны кривой.
7. Точки спрямления кривой. Бирегулярные кривые в n -мерном евклидовом пространстве. Вектор главной нормали и соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве.
8. Радиус кривизны кривой в n -мерном евклидовом пространстве, соприкасающаяся окружность, ее свойства.
9. Формулы для вектора кривизны и кривизны кривой в n -мерном евклидовом пространстве для произвольной регулярной параметризации.
10. Плоские кривые. Коориентация кривой и кривизна со знаком. Формулы Френе плоской кривой.
11. Поле реперов Френе вдоль кривой и кривая в группе ортогональных преобразований, кососимметричность ее вектора скорости в единице группы.
12. Натуральные уравнения плоской кривой и теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне. Явные формулы восстановления плоской кривой по кривизне.
13. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру (глобальный смысл кривизны).
14. Эволюта и эвольвента плоской кривой, их свойства.
15. Пространственные кривые (кривые в трехмерном евклидовом пространстве). Бинормаль бирегулярной кривой. Репер Френе вдоль кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой, их свойства и геометрический смысл. Критерий того, что бирегулярная пространственная кривая является плоской.
16. Вектор Дарбу пространственной кривой, его геометрический смысл.
17. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости пространственной кривой. Локальный вид кривой в проекциях на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости.
18. Формулы для кручения пространственной кривой в натуральной и произвольной параметризациях.
19. Натуральные уравнения пространственной кривой и теорема о восстановлении пространственной кривой по кривизне и кручению.
20. Формулы Френе для кривой в n -мерном евклидовом пространстве.

III. k -мерные подмногообразия (k -мерные поверхности) в n -мерном евклидовом пространстве

1. Элементарное k -мерное подмногообразие (элементарная k -мерная поверхность) в n -мерном евклидовом пространстве. Параметризация. Регулярная параметризация. Регулярные k -мерные поверхности.
2. Координаты на k -мерной поверхности. Координатные линии на k -мерной поверхности, их векторы скорости, регулярность координатных линий на регулярных k -мерных поверхностях. Касательное пространство в точке k -мерной поверхности и его свойства, базис в касательном пространстве, его матрица Грама и ее свойства.
3. Различные способы задания регулярных k -мерных поверхностей, их локальная эквивалентность.
4. Нормальное пространство в точке k -мерной поверхности, его свойства, ортонормированный базис в нормальном пространстве.
5. Первая квадратичная форма k -мерной поверхности как пример римановой метрики, свойства и закон преобразования, квадратичная форма в касательных пространствах k -мерной поверхности.
6. Элемент объема k -мерной поверхности.
7. Базис n -мерного евклидова пространства в каждой точке k -мерной поверхности, его матрица Грама. Разложения Гаусса и Вайнгартена. Вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения k -мерной поверхности, их свойства и законы преобразования. Гиперповерхности.
8. Деривационные формулы (уравнения) для k -мерной поверхности в n -мерном евклидовом пространстве. Символы Кристоффеля, их явное выражение через метрику и закон преобразования. Операторы Вайнгартена, их выражение через первую и вторые квадратичные формы k -мерной поверхности, закон преобразования.
9. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории подмногообразий в n -мерном евклидовом пространстве. Уравнения Гаусса для k -мерного подмногообразия в n -мерном евклидовом пространстве и тензор кривизны Римана.
10. Формулировка теоремы Бонне для k -мерных подмногообразий в n -мерном евклидовом пространстве. Подмногообразия без кручения. Гиперповерхности.

IV. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

1. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Способы задания.

2. Разложения Гаусса и Вайнгартена для двумерных поверхностей. Первая и вторая квадратичные формы. Символы Кристоффеля. Оператор Вайнгартена. Деривационные уравнения.
3. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории поверхностей. Уравнения Гаусса и тензор кривизны Римана.
4. Уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци для двумерных поверхностей. Тензор Кодацци и его симметричность.
5. Совместные системы дифференциальных уравнений и теорема об условии совместности системы дифференциальных уравнений специального типа.
6. Линейные системы дифференциальных уравнений специального вида и отвечающие им условия совместности (“уравнения нулевой кривизны”).
7. Теорема Бонне для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.
8. Кривые на поверхности. Длина кривой на поверхности. Угол между кривыми на поверхности. Площадь поверхности. Геометрический смысл второй квадратичной формы.
9. Условие регулярности кривой пересечения двух регулярных поверхностей. Нормальная составляющая вектора ускорения. Нормальные сечения поверхности. Кривизна нормального сечения.
10. Кривизна кривой на поверхности. Асимптотические направления. Теорема Минье. Примеры.
11. Главные кривизны и главные направления. Собственные значения пары фундаментальных квадратичных форм поверхности.
12. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных кривизн.
13. Гауссова кривизна и средняя кривизна поверхности.
14. Оператор Вайнгартена, его собственные значения и собственные направления. Формулы Родрига.
15. Соприкасающийся параболоид поверхности.
16. Различные типы точек на поверхности, их свойства. Индикатриса Дюпена.
17. Сопряженные направления в касательной плоскости. Сопряженная координатная сеть. Ортогональная сопряженная координатная сеть. Линии кривизны.
18. Сферическое отображение (отображение Гаусса) и его свойства.
19. Третья квадратичная форма поверхности, ее геометрический смысл. Связь с первой и второй квадратичными формами. Первая квадратичная форма образа при сферическом отображении поверхности ненулевой гауссовой кривизны ($K \neq 0$).

V. Внутренняя геометрия двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

1. Теорема Гаусса (Egregium).

2. Изометрия, локальная изометрия. Инварианты локальной изометрии. Изгибание поверхностей. Внутренняя геометрия поверхности.
3. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности. Формулы для геодезической кривизны кривой.
4. Геодезические линии на поверхности. Уравнения геодезических линий, их свойства. Теорема о существовании и единственности геодезической линии в данном направлении на поверхности.
5. Поверхности вращения. Теорема Клеро.
6. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой на поверхности. Параллельный перенос векторов вдоль кривой на поверхности. Ковариантное дифференцирование на поверхности.
7. Полугеодезические координаты и их свойства. Теорема о существовании полугеодезических координат.
8. Геодезические как локально кратчайшие кривые на поверхности.
9. Классификация поверхностей постоянной гауссовой кривизны с точностью до локальной изометрии.
10. Псевдоевклидовы пространства. Псевдосферические координаты внутри изотропного конуса. Псевдосфера. Метрика псевдосферы и геометрия Лобачевского.
11. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости: риманова метрика, гауссова кривизна, геодезические.
12. Параллельный перенос вектора вдоль замкнутого контура на поверхности. Теорема Гаусса–Бонне.